Flerdimensionell Analys

Lösningsförslag

Baserat på

Övningar i Flerdimensionell analys

5 Lokala undersökningar och optimering

Kommentarer om andra gradens Taylorpolynom

För den intresserade läsaren, tänkte jag visa ett vackert sätt att formulera Taylorpolynom i flera dimensioner. 0:te ordningens approximation av $f(\mathbf{x})$ i $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ är som bekant endast värdet i punkten $\mathbf{a}$ d.v.s.

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{a}), \text{ för } \mathbf{x} \approx \mathbf{a}.$$

Önskas ett första ordningens polynom som approximation där det läggs till en term proportionell mot $\mathbf{x} - \mathbf{a}$, så måste alla derivator matcha derivatorna av $f(\mathbf{x})$. Det är känt från föregående kapitel att generaliseringen av derivatan av f är gradienten av f som här betecknas ∇f. Första ordningens Taylorpolynom ges således av

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}),$$

vilket motsvarar att bestämma tangentplanet till f i punkten $\mathbf{a}$ vilket borde kännas korrekt eftersom det är första ordningens approximation. Jämför med hur första ordningens polynom i en dimension är en rät linje och ett plan är i princip oändligt många räta linjer i olika riktningar.
För att nu få en andra ordningens term—och det är här som det vackra kommer in—introduceras matrisen Hessianen av f som konceptuellt är gradienten av gradienten av f och blir en $n \times n$ matris då gradienten är en $n \times 1$ vektor. Beteckningen som används här är $\nabla\nabla f$ och definitionen är som lyder

$$\nabla\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Andra ordningens Taylorpolynom blir således i analogi med fallet i en dimension

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T \cdot \nabla\nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}),$$

där den tredje termen motsvarar matrismultiplikation.
För att visa principen kan fallet för två dimensioner lyftas. Då ges $\mathbf{x} = (x, y), \mathbf{a} = (x_0, y_0)$, gradienten

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right),$$

och Hessianen

$$\nabla\nabla f(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}, \end{pmatrix}$$

och Taylorpolynomet av andra ordningen ges av

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}, \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}.$$

Utförs matrismultiplikationerna ses att det är samma uttryck som återges i Månsson och Nordbecks formulering.

5.1

Lösning finns i övningsbok.

5.2

a) Inled med att bestämma första ordningens derivator och evaluera dem i origo.

$$f(x,y) = (1+x+y^2)^{1/2} \implies \begin{cases} f'_x(x,y) = \frac{1}{2(1+x+y^2)^{1/2}} \\ f'_y(x,y) = \frac{y}{(1+x+y^2)^{1/2}} \end{cases} \implies \begin{cases} f'_x(0,0) = \frac{1}{2} \\ f'_y(0,0) = 0 \end{cases}.$$

Andra ordningens derivator (observera att den blandade partiella derivatan $f''_{xy} = f''_{yx}$ och därför minskas besväraret om endast en av dem att räknas ut)

$$\begin{cases} f''_{xx}(x,y) = -\frac{1}{4(1+x+y^2)^{3/2}} \\ f''_{xy}(x,y) = -\frac{y}{2(1+x+y^2)^{3/2}} \\ f''_{yy}(x,y) = -\frac{y^2}{(1+x+y^2)^{3/2}} + \frac{1}{(1+x+y^2)^{1/2}} \end{cases} \implies \begin{cases} f''_{xx}(0,0) = -\frac{1}{4} \\ f''_{x,y}(0,0) = 0 \\ f''_{yy}(0,0) = 1 \end{cases}.$$

Med tillägget att $f(0,0) = 1$ ges därför ges andra ordningens Taylorpolynom T_2 i origo av

$$\begin{aligned} T_2[f(0,0)](x,y) &= f(0,0) + f'_x x + f'_y y + \frac{1}{2} f''_{xx} x^2 + f''_{xy} xy + \frac{1}{2} f''_{yy} y^2 \\ &= 1 + x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}y^2 \end{aligned}$$

b) Samma procedur som ovan ger $f(0,0) = 1$,

$$f(x,y) = (x+1)^{y+1} \implies \begin{cases} f'_x(x,y) = (y+1)(x+1)^y \\ f'_y(x,y) = (x+1)^{y+1}\ln(x+1) \end{cases} \implies \begin{cases} f'_x(0,0) = 1 \\ f'_y(0,0) = 0 \end{cases},$$

och slutligen

$$\begin{cases} f''_{xx}(x,y) = y(y+1)(x+1)^{y-1} \\ f''_{xy}(x,y) = (x+1)^y((y+1)\ln(x+1)+1) \\ f''_{yy}(x,y) = (x+1)^{y+1}\ln^2(x+1) \end{cases} \implies \begin{cases} f''_{xx}(0,0) = 0 \\ f''_{x,y}(0,0) = 1 \\ f''_{yy}(0,0) = 0 \end{cases}.$$

Detta ger Taylorpolynomet av grad 2 i origo

$$\begin{aligned} T_2[f(0,0)](x,y) &= f(0,0) + f'_x x + f'_y y + \frac{1}{2} f''_{xx} x^2 + f''_{xy} xy + \frac{1}{2} f''_{yy} y^2 \\ &= 1 + x + xy \end{aligned}$$

5.3

a) Jag refererar till första sektionen i detta kapitel men ger också den utskrivna mastrismultiplikationen d.v.s.

$$
\begin{aligned}
f(x,y) \approx f(x_0,y_0) &+ \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \\
&+ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x-x_0 & y-y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}, \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \\
= f(x_0,y_0) &+ \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(y-y_0) \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}(x-x_0)^2 + \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y}(x-x_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}(y-y_0)^2
\end{aligned}
$$

b) Enligt formeln ovan med derivatorna

$$
f(x,y) = \sqrt{1+x+y} \implies \begin{cases} f'_x(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{1+x+y}} \\ f'_y(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{1+x+y}} \end{cases} \implies \begin{cases} f''_{xx}(x,y) = -\frac{1}{4\sqrt{1+x+y}^3} \\ f''_{xy}(x,y) = -\frac{1}{4\sqrt{1+x+y}^3} \\ f''_{yy}(x,y) = -\frac{1}{4\sqrt{1+x+y}^3} \end{cases},
$$

evaluerade i $(1,0)$

$$
f(1,0) = \sqrt{2}, \quad \begin{cases} f'_x(1,0) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ f'_y(1,0) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}, \quad \begin{cases} f''_{xx}(1,0) = -\frac{1}{8\sqrt{2}} \\ f''_{xy}(1,0) = -\frac{1}{8\sqrt{2}} \\ f''_{yy}(1,0) = -\frac{1}{8\sqrt{2}} \end{cases}.
$$

Taylorpolynomet av grad 2 är således

$$
\sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}((x-1)+y) - \frac{1}{16\sqrt{2}}((x-1)+y)^2 + \mathcal{O}(x^3, y^3).
$$

5.4

Lösning finns i övningsbok.

5.5

a) $h^2 + k^2 \geq 0$ med likhet endast om $h = k = 0 \implies$ **positiv definit**.

b) Eftersom $h^2 - k^2$ kan anta alla värden större än, lika med eller mindre än 0, är formen **indefinit**.

c) **Indefinit** av samma anledning som ovan.

d) Kvadradkomplettering ger

$$h^2 + hk + k^2 = (h + \frac{1}{2}k)^2 - \frac{1}{4}k^2 + k^2 = (h + \frac{1}{2}k)^2 + \frac{3}{4}k^2,$$

vilket är **positivt definit** enligt samma argunment som i **a)** om man sätter $s = h + k/2$ och $t = \sqrt{3}k/2$.

e) Kvadradkomplettering ger $h^2 + k^2 + 2hk = (h + k)^2$ vilket är **positiv semi-definit** eftersom om $h = -k$ ger värden på $(h, k) \neq (0, 0)$ så att formen är 0.

f) Kvadradkomplettering ger $h^2 + k^2 + 4hk = (h + k)^2 + 2hk$ vilket tack vare det obestämda tecknet av $2hk$ är **indefinit**

5.6

a) **Positivt definit** eftersom $h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 \geq 0$ med likhet om och endast om $h_1 = h_2 = h_3 = 0$.

b) **Indefinit** tack vare minustecknet framför h_3.

c) Det gäller att $h_1^2 + h_2^2 \geq 0$ men det existeras värden på $(h_1, h_2, h_3) \neq (0, 0, 0)$ så att formen är 0. Ta t.ex. $(0, 0, t)$ för alla $t \in \mathbb{R}$. Därför är formern **positivt semi-definit**.

d) **Indefinit** eftersom det går inte att dra några begränsningar för tecken på formen.

e) Kvadratkomplettering

$$\begin{aligned} h_1^2 - h_2^2 - h_3^2 + 2h_1h_2 + 4h_2h_3 &= (h_1 + h_2)^2 - 2h_2^2 - h_3^2 + 4h_2h_3 \\ &= (h_1 + h_2)^2 - 2(h_2 - h_3)^2 + h_3^2 \\ &= k_1^2 - k_2^2 + k_3^2, \end{aligned}$$

för $k_1 = (h_1 + h_2), k_2 = \sqrt{2}(h_2 - h_3)$ och $k_3 = h_3$. Formen är således **indefinit**.

f) Kvadratkomplettering

$$\begin{aligned} h_1^2 + 2h_2^2 + 2h_3^2 + 2h_1h_2 - 2h_1h_3 + 2h_2h_3 &= (h_1^2 + 2h_1h_2 - 2h_1h_3 + h_2^2 - 2h_2h_3 + h_3^2) + h_2^2 + h_3^2 + 4h_2h_3 \\ &= (h_1 + h_2 - h_3)^2 + h_2^2 + h_3^2 + 4h_2h_3, \end{aligned}$$

vilket är **indefinit** tack vare den sista termen $4h_2h_3$.

5.7

Lösning finns i övningsbok.

5.8

Identifiera samtidiga nollställen till första ordningen derivator

$$f(x,y) = x^2y^2 + 27xy + 27y \implies \begin{cases} f'_x = 3x^2y^2 + 27y = 0 \\ f'_y = 2x^3y + 27x + 27 = 0 \end{cases}.$$

Som synes löses den första ekvationen av $y = 0$ varvid den senare ges av $27x + 27 = 0 \implies x = -1$. Den första identifierade stationära punkten är således $(-1, 0)$. För att finna stationära punkter där $y \neq 0$, kan därför den första ekvationen divideras med $y \neq 0$ vilket ger systemet

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x^2y + 27 = 0 \\ 2x^3y + 27x + 27 = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} y = \frac{-27}{3x^2} \\ 2x^3\left(\frac{-27}{3x^2}\right) + 27x + 27 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = \frac{-9}{x^2} \\ -18x + 27x + 27 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases}, \end{aligned}$$

vilket ger den andra stationära punkten $(x, y) = (-3, -1)$.
För att undersöka karaktären av dessa stationära punkter, undersökes den kvadratiska formen $f''_{xx}x^2 + 2f''_{xy}xy + f''_{yy}y^2$. Derivatorna kan beräknas enligt

$$\begin{cases} f''_{xx}(x,y) = 6xy^2 \\ f''_{xy}(x,y) = 6x^2y + 27 \\ f''_{yy} = 2x^3 \end{cases} \implies \begin{cases} \text{Kvadratiska formen } 54xy - 2y^2 \text{ i } (-1,0) \\ \text{Kvadratiska formen } -18x^2 - 54xy - 27y^2 \text{ i } (-3,-1) \end{cases}$$

Den första kvadratiska formen $54xy - 2y^2$ är ganska uppenbarligen indefinit till följd av oberoende av x^2. Punkten $(-1, 0)$ är således en sadelpunkt och inte en lokal extrempunkt. För $(-3, -1)$ gäller efter division med 18 kvadratkomplettering

$$-18x^2 - 54xy - 54y^2 \to -x^2 - 3xy - 3y^2 = -(x + \frac{3}{2}y)^2 - \frac{3}{4}y^2,$$

vilket är negativt definit och punkten $(-3, -1)$ är således en lokal maximipunkt.

5.9

Samtidiga nollställen till första ordningens derivator

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + x^3 + y^3 \implies \begin{cases} f'_x = 2x + 3x^2 = x(3x+2) \\ f'_y = 2y + 3y^2 = y(3y+2) \end{cases},$$

vilka är noll oberoende av varandra för $x = 0, -2/3$ och $y = 0, -2/3$. Det existerar således fyra stationära punkter.
Den kvadratiska formen i punkten (x_0, y_0) kan formuleras som

$$f''_{xx}x^2 + 2f''_{xy}xy + f''_{yy}y^2 = (2 + 6x_0)x^2 + 2(0)xy + (2 + 6y_0)y^2 = 2(x^2 + y^2) + 6x_0x^2 + 6y_0y^2.$$

Evaluerade i de fyra olika punkterna ges resultatet nedan.

Punkt	Kvadratisk Form	Karaktär	Typ av stationär punkt
$(0,0)$	$2x^2+2y^2$	Positiv Definit	Lokal minimipunkt
$(0,-2/3)$	$2x^2-2y^2$	Indefinit	Sadelpunkt
$(-2/3,0)$	$-2x^2+2y^2$	Indefinit	Sadelpunkt
$(-2/3,-2/3)$	$-2x^2-2y^2$	Negativt Definit	Lokal maximipunkt

5.10

a)

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= (1+\sin(x+y))\ln(1+2x+y)-2x-y \\
&\implies \begin{cases} f'_x(x,y) = \frac{2(\sin(x+y)+1)}{2x+y+1} + \ln(2x+y+1)\cos(x+y) - 2 \\ f'_y(x,y) = \frac{\sin(x+y)+1}{2x+y+1} + \ln(2x+y+1)\cos(x+y) - 1 \end{cases} \\
&\implies \begin{cases} f'_x(0,0) = 0 \\ f'_y(0,0) = 0 \end{cases} .
\end{aligned}
$$

Funktionen har alltså en stationär punkt i origo. För att undersöka typen av stationär punkt används

$$
\begin{cases} f''_{xx}(x,y) = -\frac{4(\sin(x+y)+1)}{(2x+y+1)^2} - \ln(2x+y+1)\sin(x+y) + \frac{4\cos(x+y)}{2x+y+1} \\ f''_{xy}(x,y) = -\frac{2(\sin(x+y)+1)}{(2x+y+1)^2} - \ln(2x+y+1)\sin(x+y) + \frac{3\cos(x+y)}{2x+y+1} \\ f''_{yy}(x,y) = -\frac{\sin(x+y)+1}{(2x+y+1)^2} - \ln(2x+y+1)\sin(x+y) + \frac{2\cos(x+y)}{2x+y+1} \end{cases} \implies \begin{cases} f''_{xx}(0,0) = 0 \\ f''_{xy}(0,0) = 1 \\ f''_{yy}(0,0) = 1 \end{cases} ,
$$

varför den kvadratiska formen är $2xy+y^2$ vilken är indefinit och origo är en sadelpunkt.

b)

$$
f(x,y) = 4x^2+12xy+9y^2+x^4 \implies \begin{cases} f'_x(x,y) = 4x^3+8x+12y \\ f'_y(x,y) = 12x+18y \end{cases} \implies \begin{cases} f'_x(0,0) = 0 \\ f'_y(0,0) = 0 \end{cases} ,
$$

vilket gör origo till en stationär punkt. För avgöra dess karaktär beräknas

$$
\begin{cases} f''_{xx}(x,y) = 12x^2+8 \\ f''_{xy}(x,y) = 12 \\ f''_{yy}(x,y) = 18 \end{cases} \implies \begin{cases} f''_{xx}(0,0) = 8 \\ f''_{xy}(0,0) = 12 \\ f''_{yy}(0,0) = 18 \end{cases} .
$$

Den kvadratiska formen

$$
8x^2+12xy+18y^2 = 8(x+\frac{3}{4}y)^2
$$

är positivt definit $\implies$ lokal minimipunkt.

c)

$$f(x,y,z) = e^{xyz}(1 - \arctan(x^2+y^2+2z^2)$$

$$\implies \begin{cases} f'_x(x,y,z) = -\frac{2xe^{xyz}}{(x^2+y^2+2z^2)^2+1} + yz\left(1 - \arctan\left(x^2+y^2+2z^2\right)\right)e^{xyz} \\ f'_y(x,y,z) = xz\left(1 - \arctan\left(x^2+y^2+2z^2\right)\right)e^{xyz} - \frac{2ye^{xyz}}{(x^2+y^2+2z^2)^2+1} \\ f'_z(x,y,z) = xy\left(1 - \arctan\left(x^2+y^2+2z^2\right)\right)e^{xyz} - \frac{4ze^{xyz}}{(x^2+y^2+2z^2)^2+1} \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} f'_x(0,0,0) = 0 \\ f'_y(0,0,0) = 0 \\ f'_z(0,0,0) = 0 \end{cases}.$$

$\implies$ Stationär punkt.

$$\begin{cases} f''_{xx}(x,y,z) = \frac{8x^2\left(x^2+y^2+2z^2\right)e^{xyz}}{\left((x^2+y^2+2z^2)^2+1\right)^2} - \frac{4xyze^{xyz}}{(x^2+y^2+2z^2)^2+1} + y^2z^2\left(1 - \arctan\left(x^2+y^2+2z^2\right)\right)e^{xyz} - \frac{2e^{xyz}}{(x^2+y^2+2z^2)^2+1} \\ f''_{xy}(x,y,z) = -\frac{(2x^2+2y^2)ze^{xyz}}{(x^2+y^2+2z^2)^2+1} + (xyz^2+z)\left(1 - \arctan\left(x^2+y^2+2z^2\right)\right)e^{xyz} + \frac{8xy\left(x^2+y^2+2z^2\right)e^{xyz}}{\left((x^2+y^2+2z^2)^2+1\right)^2} \\ f''_{xz}(x,y,z) = -\frac{(2x^2+4z^2)ye^{xyz}}{(x^2+y^2+2z^2)^2+1} + (xy^2z+y)\left(1 - \arctan\left(x^2+y^2+2z^2\right)\right)e^{xyz} + \frac{16xz\left(x^2+y^2+2z^2\right)e^{xyz}}{\left((x^2+y^2+2z^2)^2+1\right)^2} + \\ f''_{yy}(x,y,z) = x^2z^2\left(1 - \arctan\left(x^2+y^2+2z^2\right)\right)e^{xyz} - \frac{4xyze^{xyz}}{(x^2+y^2+2z^2)^2+1} + \frac{8y^2\left(x^2+y^2+2z^2\right)e^{xyz}}{\left((x^2+y^2+2z^2)^2+1\right)^2} - \frac{2e^{xyz}}{(x^2+y^2+2z^2)^2+1} \\ f''_{yz}(x,y,z) = (x^2yz+x)\left(1 - \arctan\left(x^2+y^2+2z^2\right)\right)e^{xyz} - \frac{2x(y^2+2z^2)e^{xyz}}{(x^2+y^2+2z^2)^2+1} + \frac{16yz\left(x^2+y^2+2z^2\right)e^{xyz}}{\left((x^2+y^2+2z^2)^2+1\right)^2} \\ f''_{zz}(x,y,z) = x^2y^2\left(1 - \arctan\left(x^2+y^2+2z^2\right)\right)e^{xyz} - \frac{8xyze^{xyz}}{(x^2+y^2+2z^2)^2+1} + \frac{32z^2\left(x^2+y^2+2z^2\right)e^{xyz}}{\left((x^2+y^2+2z^2)^2+1\right)^2} - \frac{4e^{xyz}}{(x^2+y^2+2z^2)^2+1} \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} f''_{xx}(0,0,0) = -2 \\ f''_{xy}(0,0,0) = 0 \\ f''_{xz}(0,0,0) = 0 \\ f''_{yy}(0,0,0) = -2 \\ f''_{yz}(0,0,0) = 0 \\ f''_{zz}(0,0,0) = -4 \end{cases}.$$

Den kvadratiska formen

$$-2x^2 - 2y^2 - 4z^2$$

är negativt definit $\implies$ lokal maximipunkt i origo.

d)

$$f(x,y,z) = 1 + x^2 + 2y^3 + 4z^2 - 2xy + 6yz - 2xz \implies \begin{cases} f'_x(x,y,z) = -2(x+y+z) \\ f'_y(x,y,z) = -2x + 6y^2 + 6z \\ f'_z(x,y,z) = -2x + 6y + 8z \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} f'_x(0,0,0) = 0 \\ f'_y(0,0,0) = 0 \\ f'_z(0,0,0) = 0 \end{cases}.$$

$\implies$ Stationär punkt.

$$\begin{cases} f''_{xx}(x,y,z) = -2 \\ f''_{xy}(x,y,z) = -2 \\ f''_{xz}(x,y,z) = -2 \\ f''_{yy}(x,y,z) = 12y \\ f''_{yz}(x,y,z) = 6 \\ f''_{zz}(x,y,z) = 8 \end{cases} \implies \begin{cases} f''_{xx}(0,0,0) = -2 \\ f''_{xy}(0,0,0) = -2 \\ f''_{xz}(0,0,0) = -2 \\ f''_{yy}(0,0,0) = 0 \\ f''_{yz}(0,0,0) = 6 \\ f''_{zz}(0,0,0) = 8 \end{cases}.$$

Den kvadratiska formen

$$f''_{xx}x^2 + 2f''_{xy}xy + 2f''_{xz}xz + f''_{yy}y^2 + 2f''_{yz}yz + f''_{zz}z^2 = -2x^2 - 4xy - 4xz + 12yz + 8z^2.$$

Kvadratkomplettering ger

$$-2x^2-4xy-4xz+12yz+8z^2 = -2(x+y+z)^2+2y^2+8yz+10z^2 = -2(x+y+z)^2+2(y+2z)^2+2z^2,$$

vilket är indefinit till följd av olika tecken framför kvadraterna. Den stationära punkten är en sadelpunkt.

5.11

c) En förutsättning för en extrempunkt är ett det är en stationär punkt d.v.s. att första ordningens derivator är noll. Detta kan formuleras enligt

$$\begin{cases} 0 = f'_x(0,0) = 2x(1+y) + 3y\Big|_{(x,y)=(0,0)} = 0 \\ 0 = f'_y(0,0) = x^2 + 3x + 2y\Big|_{(x,y)=(0,0} = 0 \end{cases},$$

vilket som synes är uppfyllt.
För att undersöka huruvida det är en extrempunkt, studeras andra ordningens derivator eftersom med teorin för Taylorutvecklingar kan dessa derivator ge information om funktionen växer eller avtar nära origo d.v.s. om det är en maximi- eller minimipunkt eller ingetdera. Eftersom

$$\begin{cases} f''_{xx}(x,y) = 2y+2 \implies f''_{xx}(0,0) = 2 \\ f''_{xy}(x,y) = 2x+3 \implies f''_{xy}(0,0) = 3 \\ f''_{yy}(x,y) = 2 \implies f''_{yy}(0,0) = 2 \end{cases},$$

är den kvadratiska formen $2x^2 + 6xy + 2y^2 = 2(x+y)^2 + 2xy$ vilken är indefinit och origo är ingen extrempunkt.

5.12

För en stationär punkt gäller att alla första ordnigens derivator är noll samtidigt. Detta villkor kan formuleras

$$f(x,y,z) = (x+xy+yz)e^x \implies \begin{cases} 0 = f'_x(x,y,z) = (x+xy+yz+1+y)e^x \\ 0 = f'_y(x,y,z) = (x+z)e^x \\ 0 = f'_z(x,y,z) = ye^x \end{cases}.$$

Eftersom $e^x \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ kan denna faktor divideras bort och ekvationssystemet blir

$$\begin{cases} x+xy+yz+1+y=0 \\ x+z=0 \\ y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-1 \\ x=-z \\ y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}.$$

Detta är således den enda stationära punkten. För att avgöra dess karaktär, studera den kvadratiska formen i $(-1,0,1)$ som ges av $f''_{xx}(-1,0,1)x^2 + 2f''_{xy}(-1,0,1)xy + 2f''_{xz}(-1,0,1)xz + f''_{yy}(-1,0,1)y^2 + 2f''_{yz}(-1,0,1)yz + f''_{zz}(-1,0,1)z^2$. De ingående derivatorna kan räknas ut till

$$\begin{cases} f''_{xx}(x,y,z) = (x+xy+yz+1+y+1+y)e^x \implies f''_{xx}(-1,0,1) = e^{-1} \\ f''_{xy}(x,y,z) = (x+z+1)e^x \implies f''_{xy}(-1,0,1) = e^{-1} \\ f''_{xz}(x,y,z) = ye^x \implies f''_{xz}(-1,0,1) = 0 \\ f''_{yy}(x,y,z) = 0 \implies f''_{yy}(-1,0,1) = 0 \\ f''_{yz}(x,y,z) = e^x \implies f''_{yz}(-1,0,1) = e^{-1} \\ f''_{zz}(x,y,z) = 0 \implies f''_{zz}(-1,0,1) = 0 \end{cases}.$$

Den kvadratiska formen är således $e^{-1}\left(x^2+xy+yz\right)$ vilken uppenbarligen är indefinit och punkten är ingen extrempunkt.

5.13

a) Nollställe i origo kräver

$$\begin{cases} f'_x(0,0) = 4x^2+axy+y^2+(x+a)(8x+ay)\Big|_{(x,y)=(0,0)} = 0, \quad \forall a \in \mathbb{R} \\ f'_y(0,0) = (x+a)(ax+2y)\Big|_{(x.y)=(0,0)} = 0, \quad \forall a \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Funktionen har alltså en stationär punkt i origo för alla a.

b) Till följd av att

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x,y) &= 24x+2ay+8a \implies f''_{xx}(0,0) = 8a \\ f''_{xy}(x,y) &= ax+2y+a(x+a) \implies f''_{xy}(0,0) = a^2 \\ f''_{yy}(x,y) &= 2x+2a \implies f''_{yy}(0,0) = 2a \end{aligned}$$

.

Således är den kvadratiska formen i origo 0 om $a=0$ vilket inte ger tillräckligt med information för att avgöra om origo är ett extremvärde. Men eftersom t.ex. $f'''_{xxx}(0,0) = 24 \neq 0$ varierar funktionen som $24x^3$ i $x-$led nära origo vilket kan anta värden både större än och mindre än noll efterosm x^3 inte har ett specifierat tecken. Origo kan således inte vara ett extremvärde.

c) Enligt ovanstående så är den kvadratiska formen i origo

$$8ax^2 + 2a^2xy + 2ay^2.$$

och uppgiften är att bestämma a så att denna formen är positivt eller negativt definit. Efter lite omkrivning och kvadratkomplettering kan den kvadratiska formen formuleras

$$\begin{aligned} 8ax^2 + 2a^2xy + 2ay^2 &= 2a\left[4x^2 + axy + y^2\right] = 2a\left[4\left(x + \frac{1}{8}ay\right)^2 - \frac{1}{16}a^2y^2 + y^2\right] \\ &= 2a\left[4\left(x + \frac{1}{8}ay\right)^2 + \frac{16 - a^2}{16}y^2\right]. \end{aligned}$$

Denna formen är definit om och endast om koefficienterna framför de nya kvadraterna $\left(x + \frac{1}{8}ay\right)^2$ och y^2 har samma tecken d.v.s.

$$\frac{16 - a^2}{16} \geq 0 \implies -4 \leq a \leq 4.$$

Notera att $a \neq 0$ eftersom förfaktorn $2a$ då ger att hela den kvadratiska formen är noll. Värden på a så att origo är en extrempunkt är därför

$$\{a \in \mathbb{R}\backslash\{0\} | -4 \leq a \leq 4\}.$$

5.14

Stationära punkter ges av $f'_x = f'_y = 0$. Detta ger

$$f'_x(x, y) = -e^y(y - 1)\cos x = 0 \implies y = 1 \text{ eller } x = \frac{\pi}{2} + n\pi \text{ för } n \in \mathbb{Z}.$$

$$f'_y(x, y) = e^y\left(1 - \sin x + y + 1 - (y - 1)\sin x\right) = e^y\left(2 + y(1 - \sin x)\right),$$

vilket inte är noll för $y = 1$. Det andra alternativet från kravet $f'_x = 0$ är alltså $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ för $n \in \mathbb{Z} \implies \sin x = \pm 1$. För $\sin x = 1$ ges

$$f'_y(x, y) = 2e^y \neq 0, \quad \forall y.$$

Däremot för $\sin x = -1$ ($x = \frac{3\pi}{2} + n2\pi$) ges

$$f'_y(x, y) = (2 + 2y)e^y = 0 \text{ för } y = -1.$$

De stationära punkterna är således oändligt många och alla av typen

$$(x, y) = \left(\frac{3\pi}{2} + n2\pi, -1\right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

För att undersöka deras karaktär, beräkna

$$f''_{xx}(x,y) = (y-1)\,e^y \sin(x) \implies f''_{xx}\left(\frac{3\pi}{2} + n2\pi, -1\right) = \frac{2}{e}$$
$$f''_{xy}(x,y) = -ye^y \cos(x) \implies f''_{xy}\left(\frac{3\pi}{2} + n2\pi, -1\right) = 0$$
$$f''_{yy}(x,y) = (3 + y - (y+1)\sin x)\,e^y \implies f''_{yy}\left(\frac{3\pi}{2} + n2\pi, -1\right) = \frac{2}{e}.$$

Den kvadratiska formen $2(x^2+y^2)/e$ är onekligen positivt definit för alla stationära punkter och alla dessa är lokala minima utan existens av lokala maxima.

5.15

För en kontinuerlig reelvärd funktion f, gäller att f garanterat antar ett största och minsta värde i mängden $\mathcal{D}$ om $\mathcal{D}$ är kompakt d.v.s. sluten (innehåller randen) och begränsad.

a) **Nej**, eftersom $|y| < 1$ kan det inte avgöras om minsta och största värde antas om inte gränsvärdet $|y| \to 1$ undersökes.

b) **Ja**, området är kompakt.

c) **Nej**, området är inte begränsat.

d) **Nej**, området är inte begränsat.

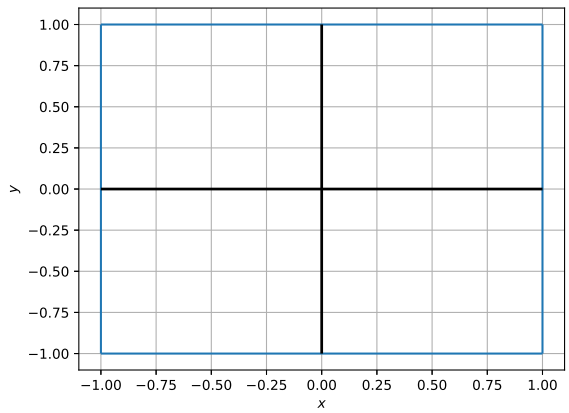
e) **Ja**, området är begränsat och slutet $\iff$ kompakt.

5.16

Lösning finns i övningsbok.

5.17

Undersökning av största och minsta värde måste omfatta såväl randen som lokala extrempunkter. Inbördes ordning spelar ingen roll men föreliggande lösning inleds med att undersöka värden på randen. Området i fråga är uppritat i figur 5.1.



Figur 5.1: Område i uppgift **5.17**.

Det finns alltså fyra ränder att undersöka $x = -1$, $x = 1$, $y = -1$ och $y = 1$. Eftersom funktionen är symmetrisk i x och y, räcker det att undersöka $x = -1$ och $x = 1$. De två ränderna $y = -1$ och $y = 1$ beter sig ekvivalent.

- $x = -1$. För $x = -1$ ges

$$f(-1, y) = f_1(y) = -y + y^2.$$

  Extremvärden för $f_1(y)$ ges då $\frac{df_1}{dy} = -1 + 2y = 0 \implies y = 1/2$ och värdet av $f_1(1/2) = -1/2 + (1/2)^2 = -1/4$.
  Randpunkterna av $f_1(y)$ är $y = \pm 1$ där värdet av funktionen är $f_1(-1) = 1 + 1 = 2$ och $f_1(1) = -1 + 1 = 0$. På randen $x = -1$ är alltså största värdet 2 och minsta värdet $-1/4$.
- $x = 1$. För $x = 1$ ges istället

$$f(1, y) = f_2(y) = y + y^2.$$

  Randpunkter $y = \pm 1$ ger $f_2(-1) = 0$ och $f_2(1) = 2$ medans extremvärden ges av $\frac{df_2}{dy} = 1 + 2y = 0 \implies y = -1/2$ där funktionens värde är $f_2(-1/2) = -1/2 + (-1/2)^2 = -1/4$. Även på randen $x = 1$ ges största värde av 2 och minsta värde av $-1/4$.

Vidare, undersöks extremvärden inom definitionsmängden. Stationära punkter ges av

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = y + 2xy^2 = 0 \\ f'_y(x, y) = x + 2x^2 y = 0 \end{cases} \iff \Big[(x, y) = (0, 0) \text{ eller för } (x, y) \neq (0, 0)\Big] y = -\frac{1}{2x}.$$

För $x = y = 0$ ges värdet $f(0, 0) = 0$. På kurvan $y = -1/2x$ ges

$$f(x, -1/2x) = x\left(-\frac{1}{2x}\right) + x^2\left(-\frac{1}{2x}\right)^2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}.$$

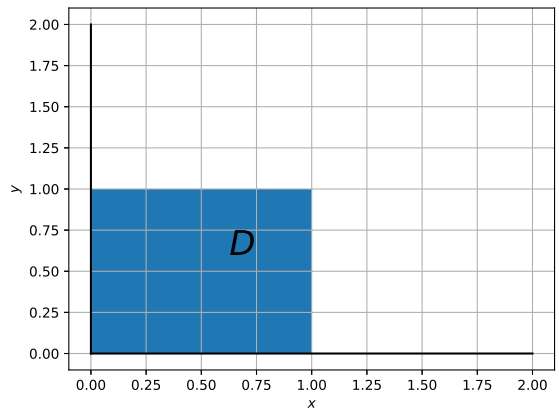
Totalt finns största värdet 2 och minsta värdet $-1/4$.

5.18

Lösning finns i övningsbok.

5.19

Området D av intresse är illustrerat i figur



Figur 5.2: Område D i uppgift **5.19**.

Största (och minsta) värde kan endast antas på rander eller i lokala extrempunkter. Först undersöks de fyra hörnen $(0,0), (1,0), (1,1)$ och $(0,1)$ (som är randpunkter till randen).

- $(x,y) = (0,0) \implies z = \boxed{0}$.
- $(x,y) = (1,0) \implies z = \boxed{0}$.
- $(x,y) = (1,1) \implies z = \frac{7}{2(1+2+3)} = \boxed{\frac{7}{12}}$.
- $(x,y) = (0,1) \implies z = \frac{7}{2(1+3)} = \boxed{\frac{7}{8}}$.

Alla dessa värden är mindre än 1 och undersökningen måste fortskrida.

- $x = 0$. Funktionen ges på denna rand av

$$z(0,y) = z_1(y) = \frac{7y^2}{2(1+3y)},$$

med extremvärden

$$\begin{aligned} 0 = \frac{dz_1}{dy} &= \frac{14y}{2(1+3y)} - 3\frac{7y^2}{2(1+3y)^2} = \frac{14y(1+3y) - 21y^2}{2(1+3y)^2} \\ &= \frac{7y(3y+2)}{2(1+3y^2)^2} \\ &\implies 7y(3y-2) = 0 \implies y = 0, \text{ eller } y = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Hörnpunkten $(0,0)$ har redan undersökts och värdet är $z = 0$. $y = -2/3$ tillhör inte området.

- $x = 1$ Funktionen ges av

$$z(1, y) = z_2(y) = \frac{7y^2}{2(3+3y)}.$$

Det kan ses redan här att räkningarna blir analoga med $x = 0$ men för den noggranna matematikern redovisas letandet av extremvärden

$$\begin{aligned} 0 = \frac{dz_2}{dy} &= \frac{14y}{2(3+3y)} - 3\frac{7y^2}{2(3+3y)^2} = \frac{14y(3+3y) - 21y^2}{2(1+3y)^2} \\ &= \frac{42y + 21y^2}{2(3+3y)^2} = \frac{7y(6+3y)}{2(3+3y)^2} \\ &\implies 7y(6+3y) = 0 \implies y = 0 \text{ eller } y = -2 \notin D. \end{aligned}$$

Där ytan når höjden $z = 0$ precis som redan bestämt.

- $y = 0$. Funktionen i x blir

$$z(x, 0) = z_3(x) = 0.$$

Funktionen är här alltså konstant noll.

- $y = 1$. Det följer

$$z(x, 1) = z_4(x) = \frac{7}{2+4x},$$

med extremvärden

$$0 = \frac{dz_4}{dx} = -4\frac{7}{(2+4x)^2},$$

som saknar reella rötter. Alltså finns inga extremvärden på denna rand.

Undersökningen forstätter att studera extremvärden innanför området D. Alla stationära punkter ges av

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{14y^2}{2(1+2x+3y)^2} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{14y}{2(1+2x+3y)} - 3\frac{7y^2}{2(1+2x+3y)^2} = \frac{7y(2+4x+3y)}{2(1+2x+3y)^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 14y^2 = 0 \\ 7y(2+4x+3y) = 0 \end{cases} \iff y = 0.$$

Vilket redan har undersökt. De funna potentiella störst och minsta värdena är således $z = 0, 7/12$ och $7/8$ varav inget värde är större än 1. Ytan når alltså aldrig över $z = 1$.

5.20

Börja med att undersöka randen av kvadraten

- $x = 0 \implies f(0, y) = f_1(y) = \boxed{0}$.

- $x = 2 \implies f(2, y) = f_2(y) = 16y^2 - 4y^4 - 12$. I hörnet $y = 0$ ges värdet $f_2(0) = \boxed{-12}$ och i $y = 2$ ges $f_2(2) = 16 \times 2^2 - 4 \times 2^4 - 12 = \boxed{-12}$.
  Extremvärden längs med denna rand ges av

$$0 = \frac{df_2}{dy} = 32y - 16y^3 = 16y(2 - y^2) \implies y = 0, \pm\sqrt{2}.$$

  Endast $y = 0$ och $y = \sqrt{2}$ tillhör området och för $y = 0 \implies f_2(0) = -12$ som tidigare visats och for $y = 1$ ges

$$f_2(1) = 16 \times \sqrt{2}^2 - 4\sqrt{2}^4 - 12 = 32 - 16 - 12 = \boxed{4}.$$

- $y = 0 \implies f(x, 0) = f_3(x) = -3x^2$,
  med största och minsta värden i hörnen $x = 0 \implies f_3(0) = \boxed{0}$ och $x = 2 \implies f_3(2) = -3 \times 2^2 = \boxed{-12}$.
- $y = 2 \implies f(x, 2) = f_4(x) = 16x^2 - 32x - 3x^2 = 13x^2 - 32x$. Hörnen $x = 0, 2$ har redan undersökts och där är värdena av f 0 respektive -12 medans extremvärden ges av

$$0 = \frac{df_4}{dx} = 26x - 32 \implies x = \frac{32}{26} = \frac{16}{13} \implies f_4(16/13) = 13 \times \left(\frac{16}{13}\right)^2 - 32 \times \frac{16}{13} = \boxed{-\frac{256}{13}}.$$

Vad som återstår nu är att finna extremvärden inom området. Stationära punkter ges av

$$\begin{cases} f'_x = 8xy^2 - 2y^4 - 6x = 0 \\ f'_y = 8x^2y - 8xy^3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 8xy^2 - 2y^4 - 6x = 0 \\ 8xy(x - y^2) = 0 \end{cases}.$$

Om origo $(x, y) = (0, 0)$ frånses (denna punkt har redan kollats) ges från den andra ekvationen $y^2 = x$ vilket insatt i den första ger

$$0 = 8x^2 - 2x^2 - 6x = 6x(x - 1) \implies \{x \neq 0\} \implies x = 1 \implies y = {}^{+}_{(-)}1,$$

och i den stationära punkten $(1, 1)$ ges

$$f(1, 1) = 4 - 2 - 3 = \boxed{-1}.$$

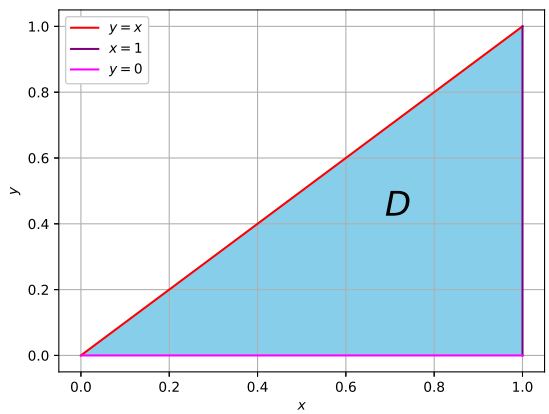
Sammanfattningsvis ges största och minsta värde av 4 och $-256/13$.

5.21

Lösning finns i övningsbok.

5.22

Området är begränsat av linjerna $y = 0, y = x$ och $x = 1$ och blir således en triangel med hörn i $(0,0), (1,0)$ och $(1,1)$ i enlighet med figur 5.3.



Figur 5.3: Område D i uppgift **5.22**.

Som blivit vana i dessa lösningsförslag, inleds en undersökning av randen.

- $y = 0 \implies f(x,y) = f_1(x) = x^2 - x$ med extremvärden för

$$0 = \frac{df_1}{dx} = 2x - 1 \implies x = 1/2 \implies f_1(1/2) = \boxed{-1/4}.$$

  I hörnen $(0,0)$ och $(1,0)$ ges $f_1(0) = \boxed{0}$ och $f_1(1) = \boxed{0}$.
- $y = x \implies f(x,y) = f_2(x) = x^2 - 3x^2 + x^2 - x + 4x = -x^2 + 3x = x(3-x)$. Extremvärden ges av

$$0 = \frac{df_2}{dx} = 3 - 2x \implies x = \frac{3}{2} \notin D.$$

- $x = 1 \implies f(1,y) = f_3(y) = 1 - 3y + y^2 - 1 + 4y = y + y^2$. Extremvärden återfinns i

$$0 = \frac{df_3}{dy} = 1 + 2y \implies y = -1/2 \notin D.$$

  I det tredje hörnet $(1,1)$ ges däremot $f_3(1) = \boxed{2}$.

Extremvärden inom området D måste återfinnas i stationära punkter

$$\begin{cases} f'_x = 2x - 3y - 1 = 0 \\ f'_y = -3x + 2y + 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}(1+3y) \\ -\frac{3}{2}(1+3y) + 2y + 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}(1+3y) \\ -\frac{5}{2}y + \frac{5}{2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

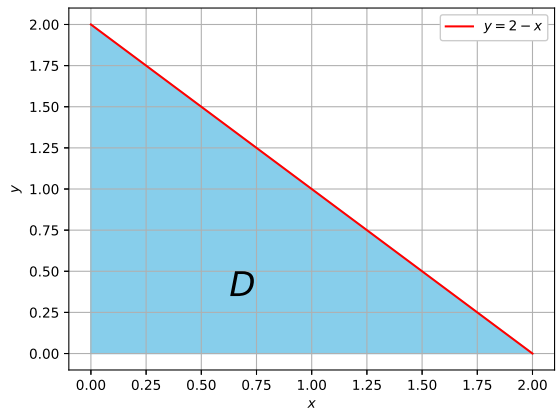
$(2,1) \notin D$ varför största och minsta värden är $2, -1/4$.

5.23

Om begränsningen skrivs om lite kan inses

$$0 \leq x + y \leq 2 \iff -x \leq y \leq 2 - x.$$

Med ytterliggare inskränkningar $0 \leq x, y$ kan slutsatsen dras att området är begränsat av linjerna $x = 0$, $y = 0$ och $y = 2 - x$. Detta område D är illustrerat i figur 5.4.



Figur 5.4: Område D i uppgift **5.23**.

Nedan följer en undersökning av funktionens värden på ränderna $x = 0, y = 0$ och $y = 2 - x$. I hörnen av triangeln $(0,0), (0,2)$ och $(2,0)$ ges värdena

$$\begin{cases} f(0,0) = \boxed{0} \\ f(0,2) = 2 - (2^2)^2 = 2 - 16 = \boxed{-14} \\ f(2,0) = \boxed{-14} \end{cases}.$$

Ränderna beskrivs av kurvorna

$$f(x,y) = x + y - (x^2 + y^2)^2 \implies \begin{cases} f(0,y) = f_1(y) = y - y^4 \\ f(x,0) = f_2(x) = x - x^4 \\ f(x, 2-x) = f_3(x) = x + 2 - x + (x^2 + (2-x)^2)^2 = 2 - (2x^2 + 4x - 4)^2 \end{cases}.$$

med stationära punkter

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{df_1}{dy} = 1 - 3y^3 \implies y = 1 \to f_1(1) = \boxed{0} \\ 0 &= \frac{df_2}{dx} = 1 - 3x^3 \implies x = 1 \to f_2(1) = \boxed{0} \\ 0 &= \frac{df_3}{dx} = 2(2x^2 + 4x - 4)(4x + 4) \\ &\implies \{x = -1 \notin D\} \implies 2x^2 + 4x - 4 = 0 \\ &\implies x^2 + 2x - 2 = 0 \implies x = -1 \underset{(-)}{+} \sqrt{3} \\ &\to f_3(-1 + \sqrt{3}) = \boxed{0}. \end{aligned}$$

Extrempunkter inom området kräver

$$\begin{cases} 0 = f'_x = 1 - 4x(x^2+y^2) \\ 0 = f'_y = 1 - 4y(x^2+y^2) \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ 1 - 4x(2x^2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \to f(1/2, 1/2) = \boxed{\frac{3}{4}}.$$

Alltså är största och minsta värde $3/4$ och -14.

5.24

Lösning finns i övningsbok.

5.25

Som den fantastiska entusiast för polära koordinater som läsaren bör vara vid detta laget så kanske det inses att detta område är enhetscirkelskivan. Denna rand $x^2 + y^2 = 1$ är lättare att undersöka i just polära koordinater

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases} \implies f(r,\phi) = r^2\cos^2\phi + r\cos\phi(r^2\sin^2\phi - 1).$$

Randen ges av $r = 1$ eller $x = \cos\phi$ och $y = \sin\phi$ varför funktionen ges av

$$\cos^2\phi + \cos\phi\underbrace{(\sin^2\phi - 1)}_{-\cos^2\phi} = \cos^2\phi - \cos^3\phi =$$

På gränserna $\cos\phi = \pm 1$ ges värdena

$$\begin{cases} \cos\phi = -1 \to f = \cos^2\phi - \cos^3\phi \Big|_{\cos\phi=-1} = \boxed{2} \\ \cos\phi = 1 \to f = \cos^2\phi - \cos^3\phi \Big|_{\cos\phi=1} = \boxed{0} \end{cases}$$

För extrempunkter längs med randen, låt $t = \cos\phi$. Det följer då att randen $\gamma(t) = \cos^2\phi - \cos^3\phi = t^2 - t^3$ och stationära punkter

$$0 = \frac{d\gamma}{dt} = 2t - 3t^2 = t(2-3t) \implies t = 0, \text{ eller } t = \frac{2}{3}.$$

För $t = 0 \implies \gamma(0) = \boxed{0}$ medans $\gamma(2/3) = 2^2/3^2 - 2^3/3^3 = \boxed{\frac{4}{27}}$.

För att finna stationära punkter inom området spelar de mindre roll vilket koordinatsystem som används. I x, y krävs att

$$\begin{cases} 0 = f'_x = 2x + y^2 - 1 \\ 0 = f'_y = 2xy \end{cases}.$$

Den senare ekvationen kräver att antingen $x = 0 \implies y = \pm 1 \implies f(0, \pm 1) = \boxed{0}$ eller $y = 0 \implies x = \frac{1}{2} \to f(1/2, 0) = \boxed{-\frac{1}{4}}$.
Största och minsta värden är alltså $2, -\frac{1}{4}$.

5.26

Området är en cirkelskiva med radie 2 och centrum i origo. Randen undersöks således kankse bäst i polära koordinater enligt

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases} \quad ; \quad 0 \le r \le 2, 0 \le \phi < 2\pi.$$

Randen ges av $r = 2$ där funktionen blir

$$f(x,y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2} = \left(r^2\cos^2\phi + 3r^2\sin^2\phi\right)e^{-r^2\cos^2\phi - r^2\sin^2\phi}\Big|_{r=2}$$
$$4\left(\cos^2\phi + 3\sin^2\phi\right)e^{-4}.$$

Randpunkterna för denna kurva $\phi = 0$ (vilket är ekvivalent med $\phi = 2\pi$ eftersom de trigonometriska funktionerna är periodiska) ger värdet

$$4\left(\cos^2\phi + 3\sin^2\phi\right)e^{-4}\Big|_{\phi=0} = \boxed{\frac{4}{e^4}}.$$

Stationära punkter längs med kurvan kräver

$$0 = \frac{d}{d\phi}4\left(\cos^2\phi + 3\sin^2\phi\right)e^{-4} = \frac{4}{e^4}\left(-2\cos\phi\sin\phi + 6\sin\phi\cos\phi\right)$$
$$= \frac{16}{e^4}\cos\phi\sin\phi = \frac{8}{e^4}\sin 2\phi \implies \phi = 0.$$

Denna punkt $(r, \phi) = (2, 0)$ har redan undersökts tidigare.
Då var randen undersökt och analysen övergår till stationära punkter inom området. Stationär punkt kräver $f'_x(x,y) = f'_y(x,y) = 0$ och eftersom

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + 3y^2\right)e^{-x^2-y^2} = -2x\left(x^2 + 3y^2 - 1\right)e^{-x^2-y^2},$$

medans

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + 3y^2\right)e^{-x^2-y^2} = -2y\left(x^2 + 3y^2 - 3\right)e^{-x^2-y^2}.$$

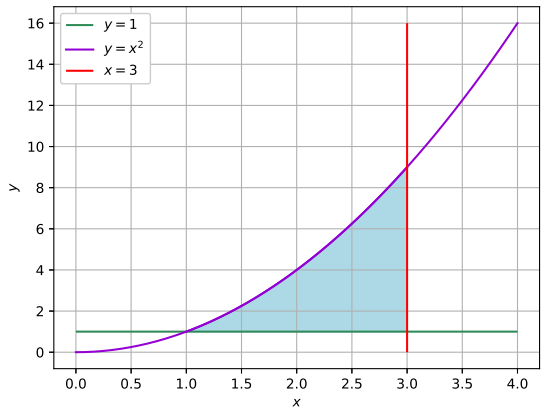
Kravet för stationär punkt är alltså eftersom $e^{-x^2-y^2} \neq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} f'_x = -2x\left(x^2 + 3y^2 - 1\right)e^{-x^2-y^2} = 0 \\ f'_y = -2y\left(x^2 + 3y^2 - 3\right)e^{-x^2-y^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x(x^2 + 3y^2 - 1) = 0 \\ -2y(x^2 + 3y - 3) = 0 \end{cases}$$
$$\implies \begin{cases} x = 0 \text{ eller } x^2 + 3y^2 - 1 = 0 \\ y = 0 \text{ eller } x^2 + 3y^2 - 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \text{ eller } x = \pm\sqrt{1 - 3y^2} \\ y = 0 \text{ eller } x = \pm\sqrt{3 - 3y^2} \end{cases}.$$

Vilka av dessa krav på x och y är förenliga d.v.s. kan gälla samtidigt? Först och främst är $x = 0$ förenligt med $y = 0$ eftersom de ekvationerna i en variabel inte ställer några krav på den anra variabeln. En stationär punkt är således $(0, 0)$ där värdet av f är $\boxed{0}$.
Om $x = 0$ kan även $x = \pm\sqrt{3 - 3y^2}$ givet att $\sqrt{3 - 3y^2} = 0 \implies y = \pm 1$ varför $(0, 1)$ och $(0, -1)$ är stationära punkter inom området med värdena $\boxed{\dfrac{3}{e}}$.
Om $x = \pm\sqrt{1 - 3y^2}$ kan uppenbarligen inte $x = \pm\sqrt{3 - 3y^2}$ och därför måste $y = 0$ gälla. De sista möjliga stationära punkterna är således $(\pm 1, 0)$ eftesom $\pm\sqrt{1 - 0} = \pm 1$. I dessa punkterna är värdet av funktionen $\boxed{\dfrac{1}{e}}$.
Funktionens största och minsta värde i området är därför $\frac{3}{e}$ respektive 0. (Notera $0 < 4e^{-4} \approx 4/3^4 = 4/81 < 3/e$).

5.27

Området i fråga är markerat i figur 5.5.



Figur 5.5: Område i uppgift 5.27

Börja med att undersöka största och minsta värde på randen. Området begränsas av de tre linjerna

- $y = 1$ för $1 \leq x \leq 3$.
- $x = 3$ för $1 \leq y \leq 3^2 = 9$.
- $y = x^2$ för $1 \leq x \leq 3$

Dessa ränder kan undersökas var för sig.

- $y = 1$ och $1 \leq x \leq 3 \implies f(x, 1) = f_1(x) = \frac{x^2-2}{x^2} = 1 - \frac{2}{x^2}$. I hörnen $x = 1 \implies f(1, 1) = \boxed{-1}$ och $x = 3 \implies f(3, 1) = 1 - \frac{2}{3^2} = \boxed{\dfrac{7}{9}}$. Längs med kurvan finns inga stationära punkter eftersom $f_1'(x) = 4x^{-3} \neq 0$.
- $x = 3$ och $1 \leq y \leq 9$ ger funktionen i y som $f(3, y) = f_2(y) = \frac{5+2y}{9y} = \frac{5}{9y} + \frac{2}{9}$. Hörnet $(3, 1)$ hanterades i förra stycket. I det hörn som ännu inte redan har räknats ut vilket är $(3, 9)$ (se

figur 5.5) ges $f_2(9) = \frac{5}{81} + \frac{2}{9} = \boxed{\frac{23}{81}}$. Längs med linjestycket finns återigen inga stationära punkter då $f_2'(y) = -\frac{5}{9}y^{-2} \neq 0$.

- $y = x^2$ och $1 \leq x \leq 3 \implies f(x, x^2) = f_3(x) = \frac{3x^2-4}{x^4}$. Hörnen $(1,1)$ och $(3,9)$ (se figur 5.5) har redan undersökts i tidigare. Längs med kurvan ges stationära punkter av

$$\begin{aligned}
0 = \frac{df_3}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{3x^2-4}{x^4}\right) = \frac{6x}{x^4} - 4\frac{3x^2-4}{x^5} \\
&= \frac{6x^2 - 12x^2 + 16}{x^5} \\
&= \frac{16 - 6x^2}{x^5} \\
&\implies 16 - 6x^2 = 0 \\
&\implies x = {}_{(-)}^{+}\frac{4}{\sqrt{6}} = {}_{(-)}^{+}\frac{4}{\sqrt{2}\sqrt{6}} \\
&= {}_{(-)}^{+}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Eftersom $\sqrt{2} \approx 1.4$ och $\sqrt{3} \approx 1.7$ ger en uppskattning att den positiva roten $x = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ger en punkt inom området $(2\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{8}{3})$. I denna punkt ges

$$f_3\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 - 4}{\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^4} = \frac{3\left(\frac{8}{3}\right) - 4}{\frac{8^2}{3^2}} = \frac{4}{\frac{64}{9}} = \boxed{\frac{9}{16}}.$$

Vidare undersöks värden i stationära punkter. För en sådan punkt erfordras att

$$\begin{cases} 0 = f_x'(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x^2+2y-4}{x^2y} = \frac{2x}{x^2y} - 2\frac{x^2+2y-4}{x^3y} = \frac{8-4y}{x^3y} \\ 0 = f_y'(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{x^2+2y-4}{x^2y} = \frac{2}{x^2y} - \frac{x^2+2y-4}{x^2y^2} = \frac{4-x^2}{x^2y^2} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 8 - 4y = 0 \\ 4 - x^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = {}_{(-)}^{+}2 \\ y = 2 \end{cases},$$

där $x = -2$ exkluderas då punkten $(-2, 2)$ inte ligger i området. $(2,2)$ ligger dock i området och är en stationär punkt. Värdet av funktionen i punkten är

$$f(2,2) = \frac{2^2 + 2 \times 2 - 4}{2^2 \times 2} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

Största och minsta värde är $7/9$ respektive -1.

5.28

Lösning finns i övningsbok.

5.29

Om läsaren inte känner till $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ är ett enhetsklot (ifylld enhetssfär) så vet läsaren detta nu, memorerar detta på valfritt vis och kommer aldrig att glömma det för resten av livet.
Efterom $x, y, z \geq 0$, hanteras bara en åttondel av detta klot och den totala randen utgörs såväl av $x^2+y^2+z^2=1$ för $x \geq 0, y \geq 0$ och $z \geq 0$ som kvartscirkelskivorna

$$\begin{cases} x^2+y^2=1; & x,y \geq 0 \quad (z=0) \\ x^2+z^2=1; & x,y \geq 0 \quad (y=0) \\ y^2+z^2=1; & x,y \geq 0 \quad (x=0) \end{cases}.$$

Om du är osäker på vad detta kommer ifrån, försök att rita området, speciellt för $x=0$, $y=0$ och även $z=0$.
Funktionen ifråga är

$$f(x,y,z) = xyz + xy,$$

och ränderna som behövs undersökas gås igenom en och en nedan.

- $x^2+y^2=1, z=0 \implies f(x,y)=xy$, vilket endast ger en stationär punkt i origo (varför?) där funktionens värde är $\boxed{0}$. För att hitta största värdet av funktionen xy givet $x^2+y^2=1$, är det lättaste att använda optimering med bivillkor vilket inte kommer förrän senare i kapitlet. För att undvika detta, används istället polära koordinater

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases} \implies xy = r^2\cos\phi\sin\phi = \frac{1}{2}r^2\sin 2\phi.$$

  Eftersom för $x^2+y^2=1 \implies r^2=1$ och maxvärdet för $\sin 2\phi = 1$ för $\phi = \frac{\pi}{4}$ (vilket tillhör randen) så är maxvärdet av $\frac{1}{2}r^2\sin 2\phi$ och då implicit även xy just $\boxed{\frac{1}{2}}$ på randen.

- $x^2+z^2=1, y=0 \implies f(x,y,z)=0$.
- $y^2+z^2=1, x=0 \implies f(x,y,z)=0$.
- $x^2+y^2+z^2=1$; $x,y,z, \geq 0$. Detta är den svåraste randen att undersöka. Återigen hade det varit enklast att ta till optimering med bivillkor men av respekt för att det inte har gåtts igenom, visas här en annan metod. I sfäriska/rymdpolära koordinater ges randen av

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}, \quad \begin{cases} r = 1 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

  Alltså är

$$f(x,y,z) = xyz + xy = xy(z+1) = \sin^2\theta\cos\phi\sin\phi(\cos\theta+1) = \frac{1}{2}\sin 2\phi\sin^2\theta(\cos\theta+1).$$

  Både då $\phi=0$ och $\phi=\pi/2$ så är funktionen 0 och eftersom $x,y,z \geq 0$, och så måste funktionen anta ett maximalt värde innan den "vänder". Återigen är $\sin 2\phi$ som störst 1 för $\phi=\pi/4$ och funktionen är då

$$\frac{1}{2}\sin^2\theta(\cos\theta+1), \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

  Optimering med avseende på θ ger

$$
\begin{aligned}
0 = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{2}\sin^2\theta(\cos\theta+1)\right) &= \frac{1}{2}\left(2\sin\theta\cos\theta(\cos\theta+1) - \sin^2\theta\sin\theta\right) \\
&= \frac{1}{2}\sin\theta\left(2\cos^2\theta + 2\cos\theta - \sin^2\theta\right) \\
&= \frac{1}{2}\sin\theta\left(3\cos^2\theta + 2\cos\theta - 1\right),
\end{aligned}
$$

eftersom $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$. Om $\sin\theta = 0$ så är hela funktionen 0 vilket är ointressant. Istället undersökes

$$
\begin{aligned}
3\cos^2\theta + 2\cos\theta - 1 = 0 &\iff \cos^2\theta + \frac{2}{3}\cos\theta - \frac{1}{3} = 0 \\
&\implies \cos\theta = -\frac{1}{3} \overset{+}{\scriptstyle(-)} \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

För $\cos\theta = \frac{1}{3}$ ges funktionens värde av

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sin^2\theta(\cos\theta+1) &= \frac{1}{2}\left(1-\cos^2\theta\right)(\cos\theta+1) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(\frac{1}{3}+1\right) \\
&= \frac{1}{2}\times\frac{8}{9}\times\frac{4}{3} \\
&= \boxed{\frac{16}{27}}.
\end{aligned}
$$

För stationära punkter i området gäller att

$$
\begin{cases}
f'_x(x,y,z) = yz + y = 0 \\
f'_y(x,y,z) = xz + x = 0 \\
f'_z(x,y,z) = xy = 0
\end{cases}.
$$

Den sista ekvationen kräver antingen $x = 0$ eller $y = 0$ och i båda dessa fall så är funktionens värde konstant $\boxed{0}$. Det finns alltså inga stationära punkter där $f \neq 0$.

Största och minsta värde är efter allt detta 16/27 respektive 0.

5.30

Lösning finns i övningsbok.

5.31

$$f(x,y) = xy^2e^{-xy}, \quad \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le b > 1 \end{cases},$$

Stationära punkter ges av

$$\begin{cases} 0 = f'_x(x,y) = y^2(1-yx)e^{-xy} \\ 0 = f'_y(x,y) = x(2y - xy^2)e^{-xy} \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = y^2(1-xy) \\ 0 = xy(2-xy) \end{cases}.$$

För den första ekvationen kan antingen $y = 0$ vilket insatt i den andra ekvationen ger full frihet för x. Funktionens värde för $y = 0$ är $f(x,0) = \boxed{0}$. Om istället $xy = 1$ så blir den andra ekvationen inte noll och de enda stationära punkter som går att återfinna är för $y = 0$.

Randpunkter är först och främst för $x = 0$ respektive $y = 0$ där funktionens värde är $\boxed{0}$. För $x = 2$ är funktionen $f(2,y) = 2y^2e^{-2y}$ med stationära punkter

$$\frac{df(2,y)}{dy} = (4y - 4y^2)e^{-2y} = 4y(1-y)e^{-2y},$$

alltså återfinns punkterna $(2,0) \to f(2,0) = \boxed{0}$ och $(2,1) \to f(2,1) = \frac{2}{e^2}$. Den sista randen $y = b$ ger

$$f(x,b) = b^2xe^{-bx},$$

med stationära punkter

$$0 = \frac{df(x,b)}{dx} = b^2(1-bx)e^{-bx} \implies x = \frac{1}{b} \implies f\left(\frac{1}{b}, b\right) = \boxed{be^{-1}},$$

vilket växer obehindrat då $b \to \infty$. Största och minsta värde är $b/e, 0$.
Randpunkter

5.32

Lösning finns i övningsbok.

5.33

På ränderna $x \to \infty$ och $y \to \infty$ inses kanske att funktionen $\to \boxed{0}$. För $x = 0$ ges

$$f(0,y) = ye^{-y} \qquad , \max f(0,y) = \boxed{\frac{1}{e}} \text{ för } y = 1 \text{ eftersom } \frac{df(0,1)}{dy} = (1-y)e^{-y}\Big|_{y=1} = 0.$$

Liknande för $y = 0$ ges

$$f(x,0) = x^2e^{-x}.$$

Stationära punkter

$$f'_x(x,0) = (2x - x^2)e^{-x} = x(2-x) = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

$f(0,0) = \boxed{0}$ och $f(2,0) = \boxed{\dfrac{4}{e^2}}$. Stationära punkter ges för

$$\begin{cases} 0 = f'_x(x,y) = \left(2x - x^2 - y\right) e^{-x-y} \\ 0 = f'_y(x,y) = \left(1 - x^2 - y\right) e^{-x-y} \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - x^2 = 1 - x^2 \\ y = 1 - x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{4} \end{cases} \to f(1/2, 3/4) = \boxed{\frac{1}{e^{5/4}}}.$$

Alltså störst $4/e^2$ och minst 0.

5.34

Stationära punkter för funktionen måste uppfylla

$$\begin{cases} 0 = f'_x(x,y) = \frac{2x}{(2+x^2+y^2)^2} - 2(x^2-y^2)\frac{2x}{(2+x^2+y^2)^3} = \frac{2x(2+x^2+y^2)-4x^3+4xy^2}{(2+x^2+y^2)^3} = \frac{2x(2-x^2+3y^2)}{(2+x^2+y^2)^3} \\ 0 = f'_y(x,y) = \frac{-2y}{(2+x^2+y^2)^2} - 2(x^2-y^2)\frac{2y}{(2+x^2+y^2)^3} = \frac{-2y(2+x^2+y^2)-4x^2y+4y^3}{(2+x^2+y^2)^3} = -\frac{2y(2+3x^2-y^2)}{(2+x^2+y^2)^3} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 0 = 2x(2 - x^2 + 3y^2) \\ 0 = -2y(2 + 3x^2 - y^2). \end{cases}$$

För att lösa detta ekvationssystem låt först $x = 0$. Då ges

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = -2y(2-y^2) \end{cases} \iff y = 0, \pm\sqrt{2}.$$

Eftersom $\sqrt{2} > 1$ så tillhör inte de två punkterna $(0, \pm\sqrt{2})$ området. Den enda giltiga stationära punkten för $x = 0$ är $(0,0)$ där $f = \boxed{0}$.

Om istället $2 - x^2 + 3y^2 = 0 \implies x^2 = 2 + 3y^2$ ger den andra ekvationen

$$0 = -2y(2 + 3x^2 - y^2) = -2y(2 + 6 + 9y^2 - y^2) = -16y(1 + y^2),$$

vilket för reella y kräver $y = 0 \implies x = 2 + 3y^2 = 2$. Punkten $(2,0)$ har värdet $f(2,0) = \frac{2^2}{(2+2^2)^2} = \frac{4}{6^2} = \boxed{\dfrac{1}{9}}$.

Låt istället $y = 0$. Då ger den första ekvationen $2x(2 - x^2) = 0 \implies x = 0, \pm\sqrt{2}$. Origo har redan undersökts men för $x = \pm\sqrt{2}$ är funktionens värde

$$f(\pm\sqrt{2}, 0) = \frac{\sqrt{2}^2}{(2 + \sqrt{2}^2)^2} = \frac{2}{4^2} = \boxed{\frac{1}{8}}.$$

Vidare är det möjligt att låta $2 + 3x^2 - y^2 = 0 \implies y^2 = 2 + 3x^2$ och den första ekvationen ger

$$0 = 2x(2 - x^2 + 3y^2) = 2x(2 - x^2 + 3(2 + 3x^2)) = 16x(1 + x^2),$$

med den enda reella roten $x = 0$ som redan har diskuterats.

Diskussionen är nu mogen att beröra randvärden. Först och främst gäller för $y = \pm 1$ att

$$f(x, \pm 1) = \frac{x^2 - 1}{(3 + x^2)^2},$$

med stationära punkter

$$\begin{aligned} 0 = \frac{df(x, \pm 1)}{dx} &= \frac{2x}{(3 + x^2)^2} - 2\frac{(x^2 - 1)2x}{(3 + x^2)^3} = \frac{2x(3 + x^2) - 4x(x^2 - 1)}{(3 + x^2)^3} \\ &= \frac{6x + 2x^3 - 4x^3 + 4x}{(3 + x^2)^3} = \frac{10x - 2x^3}{(3 + x^2)^3} \\ &= \frac{2x(5 - x^2)}{(3 + x^2)^3}, \end{aligned}$$

vilket ger $x = 0, \pm\sqrt{5}$ vari $f = \boxed{0}, \boxed{\frac{1}{16}}$.

För $x = 0$ ges två randpunkter $(0, \pm 1)$ eftersom funktionen är symmetrisk i x (den måste vända i $x = 0$). Fuktionen är där

$$f(0, \pm 1) = \frac{-1^2}{(2 + 1^2)^2} = \boxed{-\frac{1}{9}}.$$

Det finns även en rand då $x \to \pm\infty$. Det inses strax att

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - y^2}{(2 + x^2 + y^2)^2} = \boxed{0}.$$

Därför gäller största värde $1/8$ och $-1/9$.

5.35

a) Om $y \to \infty$ kommer den dominerande termen vara $-y^3 \to -\infty$. Det är alltså möjligt att välja större och större värden på y så att värdet av funktionen blir mindre och mindre varav inget minsta värde går att återfinna.
b) För detta ändamål, undersöks alla potentiella sådana punkter. Först och främst ges stationära punkter av

$$\begin{cases} 0 = f'_x = 2xy(30 - x^2 - 3y^2) - 2x^3y = 60xy - 4x^3y - 6xy^3 = 2xy(30 - 2x^2 - 3y^2) \\ 0 = f'_y = x^2(30 - x^2 - 3y^2) - 6x^2y^2 = 30x^2 - x^4 - 9x^2y^2 = x^2(30 - x^2 - 9y^2) \end{cases}.$$

Det des från dessa uttryck att för $x = 0$, så är båda uttryck 0 och $x = 0$ är alltså en hel mängd stationära punkter där värdet av funktionen kan räknas ut till $\boxed{0}$. I den första ekvationen är det också möjligt att sätta $y = 0$ och från den andra $x = 0$ (vilket redan har undersökts) eller $30 - x^2 - 9y^2 = 30 - x^2 = 0$. I den stationära punkten $(\sqrt{30}, 0)$ (bara positiv rot eftersom $x \geq 0$ så är värdet av funktionen också $\boxed{0}$.

Om istället

$$30 - 2x^2 - 3y^2 = 0 \implies x^2 = \frac{30 - 3y^2}{2},$$

ger detta insatt i den andra ekvationen

$$0 = x^2(30 - x^2 - 9y^2) = \frac{30 - 3y^2}{2}\left(30 - \frac{30 - 3y^2}{2} - 9y^2\right) = \frac{30 - 3y^2}{2}\left(15 - \frac{15}{2}y^2\right),$$

där antingen $y^2 = 10$ eller $y^2 = 2$ löser ekvationen. För $y^2 = 10, y \geq 0 \implies y = \sqrt{10} \implies x^2 = \frac{1}{2}(30 - 3y^2) = 0$ och

$$f(0, \sqrt{10}) = \boxed{0},$$

medans $y^2 = 2 \implies y = \sqrt{2}, x^2 = \frac{1}{2}(30 - 3y^2) = 12$ och

$$f(\sqrt{12}, \sqrt{2}) = 12\sqrt{2}(30 - 12 - 3 \times 2) = 12\sqrt{2}(12) = \boxed{144\sqrt{2}}.$$

Undersökning av ränderna $x \to \infty, y \to \infty, x = 0$ och $y = 0$ har redan gjorts och största värdet är således $144\sqrt{2}$.

5.36

$$f(x, y) = (x^2 + xy + y^2)e^{-x-2y} = \left((x + \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2\right)e^{-x-2y} \geq 0,$$

eftersom kvadrater ≥ 0 och exponentialfunktionen är störe än noll. Funktionen saknar största värde eftersom det går att välja t.ex. $x \to -\infty$ så att $e^{-x} \to \infty$. Däremot är det minsta värdet på funktionen $\boxed{0}$ vilket uppfylls t.ex. för $x = y = 0$ eller $x, y \to +\infty$.

5.37

Lösning finns i övningsbok

5.38

Lösning finns i övningsbok

5.39

Avståndet från en punkt (x, y) till origo är $\sqrt{x^2+y^2}$ vilket antar maximum och minimum samtidigt som x^2+y^2 eftersom roten ur är en monoton funktion. Målet för uppgiften är alltså att maximera/minimera x^2+y^2 under bivillkor att $13x^2+13y^2+10xy=72$. I extrempunkter under bivillkoret är gradienterna parallella d.v.s.

$$\nabla\left(x^2+y^2\right) \parallel \nabla\left(13x^2+13y^2+10xy\right) \iff \begin{cases} 2x \parallel 26x+10y \\ 2y \parallel 26y+10x \end{cases}.$$

Detta går att lösa genom att finna nollställen till determinanten som spänns upp av gradienterna eftersom de är linjärt beroende. Ett annat sätt är att införa $\lambda \in \mathbb{R}$ så att

$$\begin{aligned}
\begin{cases} 2\lambda x = 26x+10y \\ 2\lambda y = 26y+10x \end{cases} &\iff \begin{cases} (\lambda-13)x = 5y \\ (\lambda-13)y = 5x \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y = \frac{\lambda-13}{5}x \\ \frac{(\lambda-13)^2}{5}x = 5x \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y = \frac{\lambda-13}{5}x \\ \frac{(\lambda-13)^2}{25} = 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y = \pm x \\ \lambda-13 = \pm 5 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Eftersom bivillkoret kräver för $y = \pm x$

$$13x^2+13y^2+10xy = 13x^2+13x^2 \pm 10x^2 = (26 \pm 10)x^2 = 72,$$

ges antingen $x^2 = \frac{72}{36} = 2 \implies y^2 = 2$ eller $x^2 = \frac{72}{16} = \frac{9}{2} \implies y^2 = \frac{9}{2}$. Avståndet i dessa fall blir

$$\sqrt{2+2} = \boxed{2},$$

respektive

$$\sqrt{\frac{9}{2}+\frac{9}{2}} = \boxed{3}.$$

Detta är minsta respektive största avstånd från origo i punkterna $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$ respektive $\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 3, \mp 3)$ där tecknen bestäms av $y = \pm x$.

5.40

Nej. Det går att visa att f är obegränsad genom att använda $x+y=1 \implies y = 1-x$ och således

$$f(x, 1-x) = x^2(1-x),$$

vilket växer obegränsat positivt då $x \to -\infty$ $(1-x > 0)$ och obegränsat negativt då $x \to \infty$ $(1-x < 0)$.

5.41

Största och minsta värden ges så gradienterna är parallella (linjärt beroende) och

$$\begin{aligned} 0 = \det\begin{pmatrix}\nabla f & \nabla(x^2+xy+y^2)\end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 2x+y \\ 1 & 2y+x \end{vmatrix} \\ &= (2y+x)-(2x+y) = y-x \\ &\implies x = y. \end{aligned}$$

Eftersom $x^2+xy+y^2=3$ gäller

$$y^2+y^2+y^2 = 3y^2 = 3 \implies y = {}^{+}_{(-)}1,$$

där den negativa roten räknas bort då $x=y\geq 0$. Den gemensamma stationära punkten är därför $(1,1)$ och värdet av funktionen är $1+1=\boxed{2}$.

Även randen av området $x=0$ måste undersökas där det ges att

$$x^2+xy+y^2 = y^2 = 3 \implies y = \pm\sqrt{3} \implies f(x,y) = \boxed{\sqrt{3}}.$$

Funktionen antar alltså värden mellan $-\sqrt{3}$ och 2 eftersom den är kontinuerlig och har största värde 2 och minsta värde $-\sqrt{3}$.

5.42

Lösning finns i övningsbok

5.43

Eftersom volymen av en parallellipiped uppspänd av vektorerna $\mathbf{u}=|\mathbf{u}|\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}=|\mathbf{v}|\hat{\mathbf{v}}$ och $\mathbf{w}=|\mathbf{w}|\hat{\mathbf{w}}$, ges av

$$V = \mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = |\mathbf{u}||\mathbf{v}||\mathbf{w}|\hat{\mathbf{u}}\cdot(\hat{\mathbf{v}}\times\hat{\mathbf{w}}),$$

ges volymen då vektorerna är ortogonala av $|\mathbf{u}||\mathbf{v}||\mathbf{w}|$ vilket för en parallellipiped med axlarna x, y och z ger just $V=(2x)(2y)(2z)=8xyz$ där 2:orna kommer ifrån att längden på en sida i parallellipipeden är dubbelt så lång som avståndet x, y eller z från origo (sträckan är lika lång åt båda hållen). Målet är alltså att maximera/minimera xyz under bivillkor

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1.$$

För detta måste gradienterna vara parallella och följaktligen för något $\lambda\in\mathbb{R}$ gäller

$$\begin{cases} \frac{2x}{a^2} = \lambda yz \\ \frac{2y}{b^2} = \lambda xz \\ \frac{2z}{c^2} = \lambda xy \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}\lambda a^2 yz \\ y = \frac{1}{2}\lambda b^2(\frac{1}{2}\lambda a^2 yz)z \\ z = \frac{1}{2}\lambda c^2(\frac{1}{2}\lambda a^2 yz)y \end{cases}$$

$$\{y, z \neq 0 \text{ eftersom då skulle } x = y = z = 0\}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}a^2\lambda yz \\ 1 = \frac{1}{4}\lambda^2 a^2 b^2 z^2 \\ 1 = \frac{1}{4}\lambda^2 a^2 c^2 y^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \pm\frac{2}{\lambda bc} \\ y = \pm\frac{2}{\lambda ac} \\ z = \pm\frac{2}{\lambda ab} \end{cases}$$

Med bivillkoret ges

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{4}{\lambda^2 a^2 b^2 c^2} + \frac{4}{\lambda^2 a^2 b^2 c^2} + \frac{4}{\lambda^2 a^2 b^2 c^2}$$

$$\implies \lambda = \pm\sqrt{\frac{12}{a^2 b^2 c^2}} = \pm\frac{2\sqrt{3}}{abc}$$

$$\implies \begin{cases} x = \pm\frac{a}{\sqrt{3}} \\ y = \pm\frac{b}{\sqrt{3}} \\ z = \pm\frac{c}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

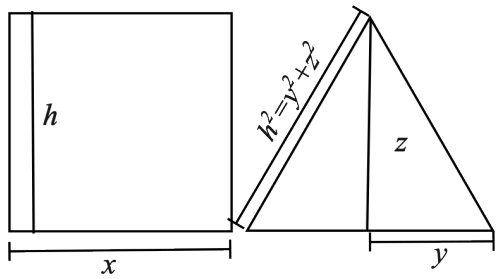
och alltså

$$\Big\{ V = 8xyz = \tfrac{8abc}{3\sqrt{3}}.$$

5.44

Med beteckningar enligt figur 5.8 ges den totala tygåtgången T (två rektanglar och två trianglar) av

$$T = 2xh + 2\frac{2yz}{2} = 2x\sqrt{y^2 + z^2} + 2yz.$$



Figur 5.6: Skiss för problem **5.44**.

Volymen av tältet ges istället av (basen×längden) $V = \frac{2yz}{2} \times x = xyz$. En underbar egenskap med denna typen av problem är att man kan välja sina enheter fritt och normalisera problemet så att $V = xyz = 1$. Problemet är alltså att minimera

$$2x\sqrt{y^2+z^2} + 2yz,$$

under bivillkor $xyz = 1$. Om gradienterna av båda uttryck är linjärt beroende gäller för något $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 2\sqrt{y^2+z^2} = \lambda yz \\ \frac{2xy}{\sqrt{y^2+z^2}} + 2z = \lambda xz \\ \frac{2xz}{\sqrt{y^2+z^2}} + 2y = \lambda xy \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{y^2+z^2} = \frac{1}{2}\lambda yz \\ \frac{2xy}{\frac{1}{2}\lambda yz} + 2z = \lambda xz \\ \frac{2xz}{\frac{1}{2}\lambda yz} + 2y = \lambda xy \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{y^2+z^2} = \frac{1}{2}\lambda yz \\ \frac{4x}{\lambda z} + 2z = \lambda xz \\ \frac{4x}{\lambda y} + 2y = \lambda xy \end{cases}.$$

De två sista ekvationerna ger efter multiplikation med λz respektive λy

$$\begin{cases} 4x + 2\lambda z^2 - \lambda^2 xz^2 = 0 \\ 4x + 2\lambda y^2 - \lambda^2 xy^2 = 0 \end{cases} \implies y^2 = z^2 \implies \{y, z \geq 0\} \implies y = z.$$

Den allra första ekvationen ger nu

$$\begin{cases} 2\sqrt{y^2+z^2} = \lambda yz \\ y = z \end{cases} \implies 2\sqrt{2}y = \lambda y^2 \implies \lambda = \frac{2\sqrt{2}}{y} = \frac{2\sqrt{2}}{z}.$$

Sammanfattnigsvis

$$\begin{cases} \lambda = \frac{2\sqrt{2}}{z} \\ y = z \\ 4x + 2\lambda z^2 - \lambda^2 xz^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \frac{2\sqrt{2}}{z} \\ y = z \\ 4x + 4\sqrt{2}z - 8x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \frac{2\sqrt{2}}{y} = \frac{2\sqrt{2}}{z} \\ y = z \\ x = \sqrt{2}z \end{cases}.$$

Bivillkoret $xyz = 1$ ger därför

$$xyz = \sqrt{2}z^3 = 1 \implies \Big\{z > 0\Big\} \implies z = \frac{1}{\sqrt{2}^{1/3}},$$

vilket också blir höjden av tältet för minimal tygåtgång. För att övertygas om att detta verkligen är ett minimum räcker det att konstatera att detta är en extrempunkt, men hur mycket tyg som kan användas för en given volym är inte övre begränsat så detta måste vara en undre begränsning.

5.45

Lösning finns i övningsbok

5.46

$$g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2, \qquad g_2(x,y,z) = x^2 + y^2 - z.$$

$$\nabla f \parallel \nabla g_1 \parallel \nabla g_2 \implies 0 = \det\left(\nabla f \quad \nabla g_1 \quad \nabla g_2\right)$$

$$\implies 0 = \begin{vmatrix} 1 & 2x & 2x \\ 1 & 2y & 2y \\ 1 & 2z & -1 \end{vmatrix} = 2x - 2y + 4xz - 4yz.$$

Tillsammans med bivillkoren

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ x^2 + y^2 - z = 0 \\ 2x - 2y + 4xz - 4yz = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 2 \\ z = x^2 + y^2 \\ 2x - 2y + 4(x^2 + y^2)(x - y) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 \\ (2+4)(x-y) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ z = 1 \\ y = x \end{cases}.$$

Detta ger två extrempunkter $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1)$ och $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 1)$ med värden

$$f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1) = \sqrt{2} + 1, \qquad f(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 1) = -\sqrt{2} + 1,$$

vilka är största respektive minsta värde för f på skärningen.

5.47

Lösning finns i övningsbok

5.48

Första steget som jag ämnar att göra kan för vissa kännas naturligt men för andra bara bidra till ökad förvirring. Därför gås det här igenom tydligt. Ellipsen är förskjuten från origo i z-led men volymen av den inskrivna pyramiden beror inte alls av denna förskjutning; en pyramid har samma volym oavset var i ett koordinatsytem den ritas. Därför introducerar jag $z' = z - 1$ som i fortsättningen bara beteckans z. Den väsentliga ändringen blir att ellipsoiden beskrivs av

$$x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1,$$

och pyramidens topp ligger istället i $(0, 0, 1)$.

Låt pyramidens botten ligga i planet $z = h$ där $-1 \leq h \leq 1$ till följd av begränsningen på z. Eftersom pyramiden tangerar ellipsoiden i punkterna $(x, y), (x, -y), (-x, -y)$ och $(-x, y)$ är rektangelns sidor $2x$ respektive $2y$ och höjden (kortaste avståndet mellan planet $z = h$ och $(0, 0, 1)$) är $1 - h = 1 - z$. Volymen av pyramiden $V = \frac{1}{3} \times \text{bas} \times \text{höjd}$ är därför

$$V = \frac{1}{3} \times 2x \times 2y \times (1 - z) = \frac{4}{3}xy(1 - z),$$

vilket ska maximeras under bivillkor $x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$. Parallella gradienter ger för något $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \frac{4}{3}y(1-z) = 2\lambda x \\ \frac{4}{3}x(1-z) = \frac{1}{2}\lambda y \\ -\frac{4}{3}xy = 2\lambda z \end{cases} \iff \begin{cases} 2y(1-z) = 3\lambda x \\ 8x(1-z) = 8\lambda y \\ -2xy = 3\lambda z \end{cases}$$

Dela de två första ekvationerna för att få

$$\frac{y}{4x} = \frac{x}{y} \implies y^2 = 4x^2.$$

Eftersom endast $x, y \geq 0$ är av intresse får $y = 2x$. Ekvationssystemet leder nu till

$$\begin{cases} y = 2x \\ 2y(1-z) = 3\lambda x \\ -4x^2 = 3\lambda z \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ \lambda = \frac{4}{3}(1-z) \\ -4x^2 = 4(1-z)z \end{cases}.$$

Från denna sista ekvation får $x^2 = z^2 - z$ och eftersom $y^2 = 4x^2 = 4z^2 - 4z$ ger bivillkoret

$$1 = x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 = z^2 - z + z^2 - z + z^2 = 3z^2 - 2z.$$

Denna ekvation löses enligt

$$3z^2 - 2z - 1 = 0 \implies z^2 - \frac{2}{3}z - \frac{1}{3} = 0 \implies z = \frac{1 \pm \sqrt{1+3}}{3} = 1, -\frac{1}{3}.$$

För $z = 1$ är volymen 0 vilket uppenbarligen är ett minimum. Maximum ges alltså för $z = -\frac{1}{3}$ vilket ger

$$x^2 = z^2 - z = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3} = \frac{4}{9} \implies x = \frac{2}{3},$$

och $y = 2x = \frac{4}{3}$. Volymen ges alltså maximalt av

$$V = \frac{4}{3}xy(1-z) = \frac{4}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{128}{81}.$$

5.49

Stationära punkter kräver

$$\begin{cases} f'_x = 2x + 2y + y^2 = 0 \\ f'_y = 2x + 2xy = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(x+y) + y^2 = 0 \\ 2x(1+y) = 0 \end{cases}.$$

Detta system har rötterna

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2y + y^2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = 0, -2 \end{cases},$$

och

$$\begin{cases} y = -1 \\ 2x - 2 + 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y = -1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Alltså punkterna $(0,0), (0,-2)$ och $(\frac{1}{2}, -1)$. För att avgöra om detta är extrempunkter, undersöks den kvadratiska formen

$$f''_{xx}x^2 + 2f''_{xy}xy + f''_{yy}y^2 = 2x^2 + 2(2 + 2y_0)xy + 2x_0y^2,$$

vilket ger

Punkt	Kvadratisk form	Typ av punkt
$(0,0)$	$2x^2 + 4xy$	Indefinit
$(0,-2)$	$2x^2 - 4xy$	Indefinit
$(\frac{1}{2}, -1)$	$2x^2 + y^2$	Positivt definit.

Alltså existerar endast ett lokalt minimum i $(\frac{1}{2}, -1)$.

5.50

Stationära punkter kräver

$$\begin{cases} f'_x = (1+2x(x+y+4))e^{x^2+y} = 0 \\ f'_y = (1+x+y+4)e^{x^2+y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^2+2xy+8x+1=0 \\ x+y+5=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^2-10x-2x^2+8x+1=0 \\ y=-5-x \end{cases},$$

vilket medför att $x = \frac{1}{2}$ och $y = -5 - \frac{1}{2} = -\frac{11}{2}$ är den enda stationära punkten. Men då $y < x$ i denna punkt, så tillhör den inte området.

Undersök randen. $y = x$ innebär

$$f(x,x) = (2x+4)e^{x^2+x} \implies \frac{df(x,x)}{dx} = (2+4x^2+8x+2x+4)e^{x^2+x},$$

vilket är noll for $2+4x^2+8x+2x+4 = 6+10x+4x^2 = 0 \implies x = -\frac{3}{2}, -1$. I dessa punkter har funktionen värdena $\boxed{e^{3/4}}$ respektive $\boxed{2}$.Det är viktigt att kontrollera att $x \leq 2 - x^2$ vilket gäller för båda dessa punkter.

Vidare för $y = 2 - x^2$ ges

$$f(x, 2-x^2) = (x+6-x^2)e^{x^2+2-x^2} \implies \frac{df(x,2-x^2)}{dx} = (1-2x)e^2,$$

som är noll för $x = \frac{1}{2}$ vilket ligger i området eftersom $\frac{1}{2} \leq 2 - \frac{1}{2^2}$. Värdet av funktionen här är $\boxed{\frac{25}{4}e^2}$.

En sista rand som måste undersökas är $x = y = 2 - x^2 \implies x = -2, 1$ med värden $\boxed{0}$ respektive $\boxed{6e^2}$. Största och minsta värde är således $\frac{25}{4}e^2$ respektive 0.

5.51

Stationära punkter är endast origo där värdet är $\boxed{0}$. Randen är dels origo eftersom $0 \leq x^2 + 4y^2$ och dels $x^2 + 4y^2 = 8$. I det senare fallet ges $x = \sqrt{8-4y^2}$ och

$$f(\sqrt{8-4y^2}, y) = y\sqrt{8-4y^2} \implies \frac{df(\sqrt{8-4y^2},y)}{dy} = \sqrt{8-4y^2} - \frac{4y^2}{\sqrt{8-4y^2}} = \frac{8(1-y^2)}{\sqrt{8-4y^2}},$$

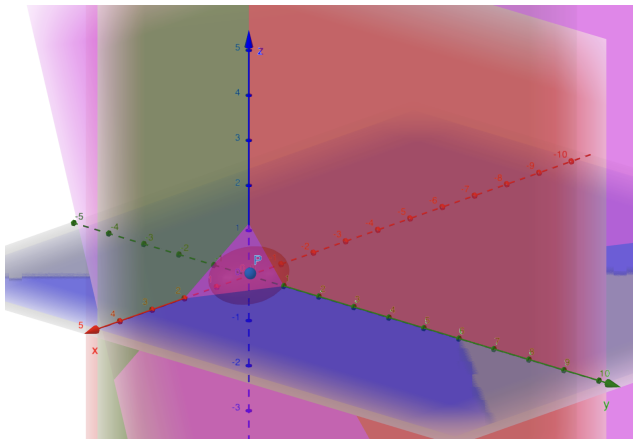
med nollställen $y = \pm 1$ där funktionens värde blir $y\sqrt{8-4y^2} = \pm\sqrt{4} = \boxed{\pm 2}$ vilket också ger största och minsta värde.

5.52

Tangentplanet till $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ i punkten $P = (x_0, y_0, z_0)$ ges av $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$ eller eftersom $\nabla f(x,y,z) = 2x + 4y + 6z$

$$2x_0(x - x_0) + 4y_0(y - y_0) + 6z_0(z - z_0) = 0.$$

Geometriskt ser tetraedern formad av koordinatplanen $x = 0, y = 0$ och $z = 0$ ut enligt figur 5.7.



Figur 5.7: Skiss över problem **5.52**. Tetraedern har basytor av koordinatplanen (grönt, rött och blått i figur) samt tangentplanet i punkten P (rosa i figur).

Notera att volymen inte har någon övre gräns eftersom om tangentpunkten är t.ex. $x = 1$ så går volymen mot ∞ då tangentplanet aldrig skär $x = 0$. Vad som efterlyses är alltså en undre begränsning.

Volymen av en tetraeder ges av basen$\times$höjden/3. Tetraedern har hörn i origo,och i skärningspunkter mellan tre av de fyra ingående planen (se figur 5.7). Detta ger de tre hörnen

$$\begin{cases} 2x_0(x - x_0) + 4y_0(y - y_0) + 6z_0(z - z_0) = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 6z_0 z = 6z_0^2 + 4y_0^2 + 2x_0^2 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 2x_0(x - x_0) + 4y_0(y - y_0) + 6z_0(z - z_0) = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 4y_0 y = 6z_0^2 + 4y_0^2 + 2x_0^2 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases},$$

och

$$\begin{cases} 2x_0(x - x_0) + 4y_0(y - y_0) + 6z_0(z - z_0) = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x_0 x = 6z_0^2 - 4y_0^2 + 2x_0^2 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Det underlättar nu att identifiera att eftersom

$$x_0^2 + 2y_0^2 + 3z_0^2 = 1,$$

tack vare bivillkoret, så är $2x_0^2 + 4y_0^2 + 6z_0^2 = 2(x_0^2 + 2y_0^2 + 3z_0^2) = 2$ och hörnen ges i punkterna $(0,0,0), (\frac{2}{2x_0}, 0, 0), (0, \frac{2}{4y_0}, 0)$ och $(0, 0, \frac{2}{6z_0})$. Arean av bastriangeln i xy-planet är $\frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}\frac{2}{2x_0}\frac{2}{4y_0} = \frac{1}{4x_0y_0}$. Höjden i sin tur är $\frac{2}{6z_0}$ varför volymen av tetraedern är

$$V = \frac{1}{3}\frac{1}{4x_0y_0} \times \frac{2}{6z_0} = \frac{1}{36x_0y_0z_0}.$$

Uppgiften är alltså att bestämma maximum/minimum av denna funktion med bivillkor

$$x_0^2 + 2y_0^2 + 3z_0^2 = 1.$$

Nu är allt förarbete klart och uppgiften fortsätter precis som liknande uppgiften tidigare i kapitlet. Framöver byts x_0, y_0 och z_0 ut mot x, y och z för att underlätta skrivande och läsande; hoppas att detta inte åsamkar förvirring. Eftersom

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} &= -\frac{1}{36x^2yz}\\ \frac{\partial V}{\partial y} &= -\frac{1}{36xy^2z}\\ \frac{\partial V}{\partial z} &= -\frac{1}{36xyz^2},\end{aligned}$$

ges $\nabla V = -\frac{1}{36xyz}(1/x, 1/y, 1/z)$. Ellipsoidens gradient är $(2x, 4y, 6z)$ och parallella gradienter innebär att för $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} -\frac{1}{36x^2yz} = 2\lambda x \\ -\frac{1}{36xy^2z} = 4\lambda y \\ -\frac{1}{36xyz^2} = 6\lambda z \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -72\lambda x^3yz = 1 \\ -144\lambda xy^3z = 1 \\ -216\lambda xyz^3 = 1 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -72\lambda x^2(xyz) = 1 \\ -144\lambda y^2(xyz) = 1 \\ -216\lambda z^2(xyz) = 1 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} -72x^2 = -144y^2 = -216z^2 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 = 2y^2 = 3z^2 \\ 3z^2 + 3z^2 + 3z^2 = 1 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} z^2 = \frac{1}{9} \\ y^2 = \frac{1}{6} \\ x^2 = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

För att nu beräkna volymen, ta t.ex. endast de positive rötterna $x, y, z > 0$ (problemet är symmeteriskt i de åtta kradranterna) vilket ger

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{6}} \\ z = \frac{1}{3} \end{cases} \implies V = \frac{1}{36xyz} = \frac{3\sqrt{3}\sqrt{6}}{36} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Volymsuttrycket är kontinuerligt och antar alltså alla värden $\geq \frac{\sqrt{2}}{4}$.

5.53

Börja med randen $x = 0$.

$$f(0, y) = \frac{y}{1 + y^2},$$

med stationära punkter då

$$0 = \frac{d}{dy}\frac{y}{1+y^2} = \frac{1}{1+y^2} - \frac{2y^2}{(1+y^2)^2} = \frac{1+y^2-2y^2}{(1+y^2)^2} = \frac{1-y^2}{(1+y^2)^2},$$

alltså då $y = {}_{(-)}^{+}1$ (negativ rot utesluts då $1 \leq x+y = 0+y = y$). Värdet i $y = 1$ är $\boxed{\frac{1}{2}}$. Randvärdena för y då $x = 0$ är $y = 1 \implies f(0,1) = \boxed{\frac{1}{2}}$ och $y = 2 \implies f(0,2) = \boxed{\frac{2}{5}}$. Funktionen är symmetrisk i x och y så analog undersökning för $y = 0$ ger samma värden.

Stationära punkter kräver

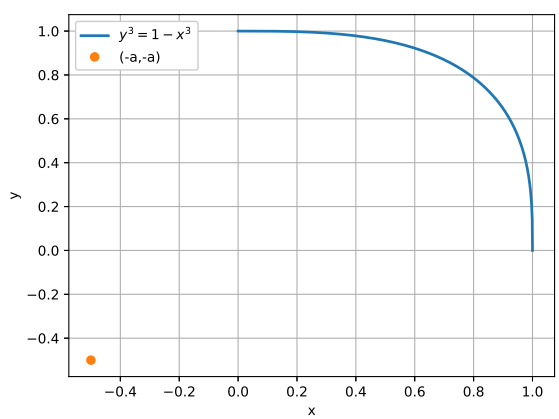
$$\begin{cases} 0 = f'_x(x,y) = \frac{1-x^2-2xy+y^2}{(x^2+y^2+1)^2} \\ 0 = f'_y(x,y) = \frac{1+x^2-2xy-y^2}{(x^2+y^2+1)^2} \end{cases} \iff \begin{cases} 1-x^2-2xy+y^2 = 0 \\ 1+x^2-2xy-y^2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} -2x^2+2y^2 = 0 \\ 2-4xy = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 = y^2 \\ xy = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Eftersom $x, y \geq 0$ så gäller att den första ekvationen implicerar $x = y$ från vilket den andra ekvationen ger $x^2 = \frac{1}{2} \implies x = \frac{1}{\sqrt{2}} = y$. Värdet i denna punkt är

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

Jämförelse av de markerade värdena ger största och minsta värde $1/\sqrt{2}$ och $2/5$.

5.54



Figur 5.8: Skiss av uppgift **5.44** för $a = \frac{1}{2}$.

Avståndet från en godtycklig punkt (x, y) på kurvan till $(-a, -a)$ ges av

$$|(x,y) - (-a,-a)| = |(x+a, y+a)| = \sqrt{(x+a)^2 + (y+a)^2},$$

vilket antar maximum och minimum precis när $(x+a)^2 + (y+a)^2$ gör det. Det senare uttrycket är dock lättare att hantera analytiskt. Uppgiften har då lett fram till att maximera/minimera

$$(x+a)^2 + (y+a)^2,$$

under bivillkor $x^3 + y^3 = 1$ och $x, y \geq 0$. På randen där antingen $(x, y) = (0, 1)$ eller $(x, y) = (1, 0)$ (se figur 5.7) ges avståndet

$$\sqrt{(1+a)^2+(0+a)^2} = \boxed{\sqrt{1+2a+2a^2}}.$$

Den vise läsaren inser kanske direkt att detta är kortaste avståndet och det längsta avståndet ges i punkten $x = y = \frac{1}{2^{1/3}}$ men eftersom detta är en matematikkurs så är det bäst att bevisa det. Parallella gradienter ger ekvationssystemet för $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \nabla((x+a)^2+(y+a)^2) = \lambda \nabla(x^3+y^3) \\ x^3+y^3 = 1 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 2(x+a) = 3\lambda x^2 \\ 2(y+a) = 3\lambda y^2 \\ x^3+y^3 = 1 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - \frac{2}{3\lambda}x - \frac{2a}{3\lambda} = 0 \\ y^2 - \frac{2}{3\lambda}y - \frac{2a}{3\lambda} = 0 \\ x^3+y^3 = 1 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{1+3\lambda a}}{3\lambda} \\ y = \frac{1+\sqrt{1+3\lambda a}}{3\lambda} \\ x^3+y^3 = 1 \\ xy, \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = y \\ x^3+x^3 = 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\implies x = y = \frac{1}{2^{1/3}}.$$

Avståndet i denna punkt ges av

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2^{1/3}}+a\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{1/3}}+a\right)^2} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2^{1/3}}+a\right) = \boxed{2^{1/6}+\sqrt{2}a},$$

och ja, detta är ekvivalent med vad som står i facit eftersom

$$\sqrt{2\left(\frac{1}{2^{1/3}}+a\right)^2} = \sqrt{2\left(2^{-2/3}+22^{-1/3}a+a^2\right)} = \sqrt{2^{1/3}+2^{5/3}a+2a^2},$$

men jag föredrar den förra formuleringen.

5.55

Gissa hur rätblocket kommer att se ut för maximal volym!

Ett rätblock med mått x, y, z har 6 sidor: två sidor med arean xy, två med arean xz och två med arean yz. Rätblocket har alltså begränsningen

$$2xy + 2xz + 2yz = 2 \text{ m}^2 \iff xy + xz + yz = 1 \text{ m}^2.$$

Målet är att maximera volymen $V = xyz$ under detta bivillkor (maximera då volymen har den undre gränsen $V = 0$ för x, y eller $z \to 0$).

Parallella gradienter ger för $\lambda \in \mathbb{R}$

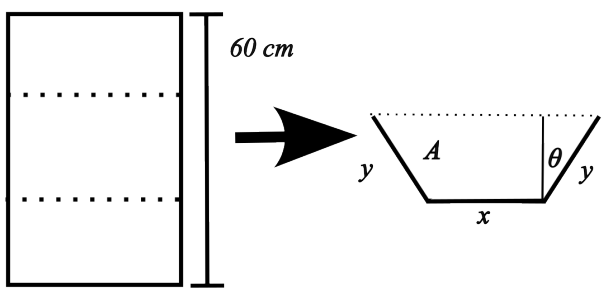
$$\nabla(xyz) = \lambda\nabla(xy + xz + yz) \implies \begin{cases} yz = \lambda(y+z) \\ xz = \lambda(x+z) \\ xy = \lambda(x+y) \\ xy + xz + yz = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda(y+z+x+z+x+y) = yz + xz + xy = 1 \\ \lambda = \frac{yz}{y+z} = \frac{xz}{x+z} = \frac{xy}{x+y} \\ xy + xz + yz = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2\frac{yz}{y+z}(x+y+z) = 1 \\ x = y = z \\ xy + xz + yz = 1 \end{cases} \implies x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

och volymen blir $\frac{1}{\sqrt{3}^3} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ m^3.

5.56

Låt mig inleda med att säga att det svåraste med denna uppgift är att tolka vad som faktiskt menas. Mitt ödmjuka försök till tolkning finns återskapat i figur 5.9.



Figur 5.9: Skiss för problem **5.56**. $x_1 + 2y = 60$ cm.

Parallelltrapetsen har sidorna $x, y, x + 2y\sin\theta$ och y samt höjden $y\sin\theta$ för $0 < \theta < \pi/2$ varför arean A ges av

$$A(x, y, \theta) = \frac{x + x + 2y\sin\theta}{2} \times y\cos\theta = (x + y\sin\theta)y\cos\theta = xy\cos\theta + \frac{y^2}{2}\sin 2\theta,$$

vilket skall maximeras under bivillkor $x + 2y = 60$ cm. De partiella derivatorna av $A(x, y, \theta)$ ges av

$$\frac{\partial A}{\partial x} = y\cos\theta, \quad \frac{\partial A}{\partial y} = x\cos\theta + y\sin 2\theta, \quad \frac{\partial A}{\partial \theta} = -xy\sin\theta + y^2\cos 2\theta.$$

Parallella gradienter ger eftersom $\nabla(x + 2y) = (1, 2, 0)$ (endast $x, y \neq 0$ är av intresse och ekvationerna kan delas med x respektive y utan vidare)

$$\begin{cases} y\cos\theta = \lambda \\ x\cos\theta + y\sin 2\theta = 2\lambda \\ -xy\sin\theta + y^2\cos 2\theta = 0 \\ x + 2y = 60 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda = y\cos\theta \\ (60-2y)\cos\theta + y\sin 2\theta = 2y\cos\theta \\ y^2\cos 2\theta = (60-2y)y\sin\theta \\ x = 60-2y \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} (60-4y)\cos\theta + y\sin 2\theta = 0 \\ y\cos 2\theta = (60-2y)\sin\theta \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} y(4\cos\theta - \sin 2\theta) = 60\cos\theta \\ y(\cos 2\theta + 2\sin\theta) = 60\sin\theta \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} y = \frac{60\cos\theta}{4\cos\theta - \sin 2\theta} \\ \frac{60\cos\theta}{4\cos\theta-\sin\theta}(\cos 2\theta + 2\sin\theta) = 60\sin\theta \end{cases}$$

$$\implies 60\cos\theta\cos 2\theta + 120\cos\theta\sin\theta = 240\cos\theta\sin\theta - 60\sin\theta\sin 2\theta$$

$$\iff \cos\theta\cos 2\theta + \sin\theta\sin 2\theta = \sin 2\theta.$$

Detta vänsterled kan skrivas om med Eulers formel enligt

$$\begin{aligned} \cos\theta\cos 2\theta + \sin\theta\sin 2\theta &= \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\frac{e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}}{2} + \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\frac{e^{i2\theta}-e^{-i2\theta}}{2i} \\ &= \frac{e^{i3\theta}+e^{-i\theta}+e^{i\theta}+e^{i3\theta}}{4} - \frac{e^{i3\theta}-e^{-i\theta}-e^{i\theta}+e^{i3\theta}}{4} \\ &= \frac{2e^{i\theta}+2e^{-i\theta}}{4} = \cos\theta, \end{aligned}$$

alltså blir ekvationen

$$\cos\theta = \sin 2\theta. \implies \cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \implies 3\theta = \frac{\pi}{2} \implies \theta = \frac{\pi}{6}.$$

En tidigare ekvation var

$$(60-2y)\cos\theta + y\sin 2\theta = 2y\cos\theta \implies (60-4y)\cos\theta + y\sin 2\theta = 0 \implies (60-3y)\cos\theta = 0.$$

Antingen är $\cos\theta = 0 \implies A = 0$ vilket uppenbarligen är ett minimum, eller så är $60-3y = 0 \implies y = 20$ cm. Det följer att $x = 60-2y = 20$ cm. Maximal area ges alltså av

$$A(20, 20, \pi/6) = 20^2\cos\frac{\pi}{6} + \frac{20^2}{2}\sin\frac{2\pi}{6} = 300\sqrt{3}\ \text{cm}^2.$$

5.57

$$f(x,y) = x^2 - 3x + y^2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + y^2.$$

Nivåkurvorna $f(x,y) = K$ är cirklar med centrum i $(3/2, 0)$ och radie $\sqrt{K + \frac{9}{4}}$. Detta kräver också att $K \geq \frac{9}{4}$.

Stationära punkter ges då

$$\begin{cases} f'_x = 2x - 3 = 0 \\ f'_y = 2y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 0 \end{cases} \implies |x| + |y| = \frac{3}{2} > 1.$$

Alltså finns inga stationära punkter i området. På randen $|x| = 1 \implies x = \pm 1, y = 0$ ges värdena $f(1,0) = 1 - 3 = \boxed{-2}$ och $f(-1,0) = 1 + 3 = \boxed{4}$, medans för $|y| = 1 \implies x = 0, y = \pm 1$ med värdena $f(0, \pm 1) = \boxed{1}$. Alltså är största och minsta värde 4 och 2.

5.58

Låt radien vara r och höjden vara h. Volymen V ges av bottenarean πr^2 gånger höjden h, alltså

$$1 = V = \pi r^2 h.$$

Den totala arean är de två cirulära areorna $2 \times \pi r^2$ plus mantelarean som är en rektangel med ena sidan h och andra sidan $2\pi r$ alltså är den totala arean

$$A(r,h) = 2\pi r(r + h).$$

För att minimera arean med bivillkor $V = \pi r^2 h = 1$ gäller

$$\nabla A \parallel \nabla V \implies \begin{cases} 2\pi(2r + h) = \lambda 2\pi r h \\ 2\pi r = \lambda \pi r^2 \\ \pi r^2 h = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 4r + 2h = 4h \\ \lambda = \frac{2}{r} \\ \pi r^2 h = 1 \end{cases}$$
$$\iff h = 2r$$

Eftersom arean inte har en övre begränsning måste detta motsvara minimum och då diametern $d = 2r$ så är diametern densamma som höjden vid minimal area; alltså kvoten 1.

5.59

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x(x^2-4) + 2(2xy-1)(x^2y-x-2),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2(x^2y-x-2).$$

Stationära punkter då

$$\begin{cases} 4x(x^2-4) + 2(2xy-1)(x^2y-x-2) = 0 \\ 2x^2(x^2y-x-2) = 0 \end{cases}.$$

Om t.ex. i den andra ekvationen $x = 0$, blir den första ekvationen $4 = 0$ så $x \neq 0$. Om istället $(x^2y - x - 2) = 0$, gäller

$$0 = 4x(x^2-4) + 2(2xy-1)(x^2y-x-2) = 4x(x^2-4) \implies \{x \neq 0\} \implies x = \pm 2,$$

och eftersom

$$(x^2y-x-2) = \begin{cases} 4y = 0 \text{ om } x = -2 \\ 4y - 4 = 0 \text{ om } x = 2 \end{cases},$$

alltså ges de stationära punkterna av $(-2, 0)$ och $(2, 1)$. För att avgöra deras karaktär så bestäms

$$f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} 4x(x^2-4) + 2(2xy-1)(x^2y-x-2) = 12x^2 - 16 + 2(2y-1)(x^2y-x-2) + 2(2xy-1)^2$$

vilket i $(-2, 0)$ är 82 och i $(2, 1)$ är 50.

$$f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} 4x(x^2-4) + 2(2xy-1)(x^2y-x-2) = 2\left(2x(x^2y-x-2) + (2xy-1)x^2\right)$$

vilket i $(-2, 0)$ är -8 och i $(2, 1)$ är 24.

$$f''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} 2x^2(x^2y-x-2) = 4x^2,$$

vilket är 16 i båda punkterna. Alltså i $(-2, 0)$ är den kvadratiska formen

$$82x^2 - 8xy + 16y^2 = (x-4y)^2 + 81x^2 \geq 0,$$

och i $(2, 1)$

$$50x^2 + 24xy + 16y^2 = (3x+4y)^2 + 41x^2 \geq 0.$$

Alltså är båda punkter lokala minimum.

5.60

$g(x,y,z) = x+y+z$ är kontinuerlig och antar således alla värden mellan största och minsta värdet på en kompakt mängd. Uppgiften handlar därför om att bestämma största och minsta värde. Det följer

$$x+y+z = x+y+\sqrt{x^2+y^2-1}, \quad 1 \le x^2+y^2 \le 3.$$

För stationära punkter i området gäller för $x^2+y^2 \neq 1$

$$\begin{cases} 0 = g'_x = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-1}} \\ 0 = g'_y = 1 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-1}} \end{cases} \iff \begin{cases} -x = \sqrt{x^2+y^2-1} \\ -y = \sqrt{x^2+y^2-1} \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = x^2+y^2-1 \\ y^2 = x^2+y^2-1 \end{cases} \iff \begin{cases} y^2 = 1 \\ x^2 = 1 \end{cases},$$

vilket ger punkterna $(-1,-1), (-1,1), (1,1)$ och $(1,-1)$ med värdena $\boxed{-1}$, $\boxed{0}$, $\boxed{3}$ och $\boxed{0}$.

För att undersöka randen av området $x^2+y^2=1$ respektive $x^2+y^2=3$ tillämpas optimering med bivillkor. För $x^2+y^2=1$ gäller

$$g(x,y) = x+y+\sqrt{x^2+y^2-1} = x+y \implies \nabla g = (1,1).$$

Vidare är $\nabla(x^2+y^2) = 2(x,y)$ och extrempunkter uppträder då

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ 2x^2 = 1 \end{cases} \implies x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}},$$

med värdena $\pm(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}) = \boxed{\pm\sqrt{2}}$. Om istället $x^2+y^2=3$ gäller

$$g(x,y) = x+y+\sqrt{x^2+y^2-1} = x+y+\sqrt{2},$$

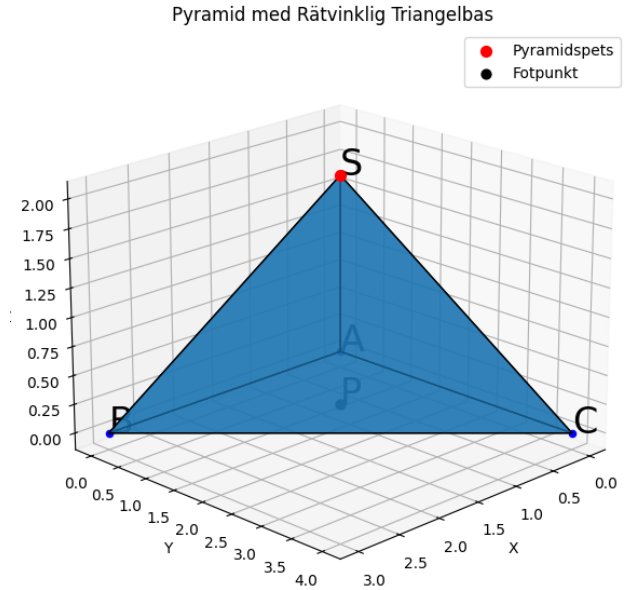
med samma gradient varför

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ 2x^2 = 3 \end{cases} \implies x = y = \pm\sqrt{\frac{3}{2}},$$

Med värden $\pm\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}\right) + \sqrt{2} = \pm\sqrt{2}\sqrt{3} + \sqrt{2} = \pm\boxed{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$.

Alltså största och minsta värde $\sqrt{6}+\sqrt{2}$ och $-\sqrt{2}$.

5.61



Figur 5.10: Skiss för problem **5.61**.

Studera figur 5.10. Sätt hörnen av triangeln i $A = (0,0,0), B = (3,0,0)$ och $C = (0,4,0)$. Toppen av pyramiden $S = (x_0, y_0, 2)$ för några värden på x_0 och y_0 som skall bestämmas. Uppgiften avser att minimera kvadraten på de tre sidorna som utgörs av trianglarna ABS, ACS och BCS. För att bestämma sidytorna ($\frac{1}{2}\times$basen$\times$höjden), bestäms först avstånden från linjerna AB, AC och BC till fotpunkten $P = (x_0, y_0, 0)$ för att senare använda Pythagoras för höjden av trianglarna.

AB ligger på $y = 0$ så avståndet till $(x_0, y_0, 0)$ är endast y_0. Basen av denna triangeln är alltså 3 och höjden $\sqrt{y_0^2 + 2^2}$ och kvadraten av sidan är

$$\left(\frac{3\sqrt{y_0^2+2^2}}{2}\right)^2 = \boxed{\frac{9}{4}y_0^2 + 9}.$$

På liknande sätt är kortase avståndet $\min|P - AC| = x_0$. och då AC har längden 4 blir bidraget till kvadraten

$$\left(\frac{4\sqrt{x_0^2+2^2}}{2}\right)^2 = \boxed{4x_0^2 + 4}.$$

Linjen BC är lite klurigare. Men riktningsvektorn ges av $BC = C - B = (0,4,0) - (3,0,0) = (-3,4,0)$ och en punkt på linjen är $B = (3,0,0)$ så linjen ges av

$$(3,0,0) + t(-3,4,0) = (3-3t, 4t, 0), \text{ eller } y + \frac{4}{3}x - 4 = 0 \iff 4x + 3y - 12 = 0,$$

vilket också kan ses om linjen ritas i xy-planet. För att bestämma kortaste avståndet, ta en gotycklig punkt $Q = (x_1, x_2)$ på linjen så att $4x_1 + 3y_1 = 12$. Vektorn från Q till P ges av $P - Q = (x_0 - x_1, y_0 - y_1)$. Normalen till linjen $\hat{\mathbf{n}} = \frac{(4,3)}{|(4,3)|} = \frac{1}{5}(4,3)$ eftersom koefficienterna för linjen är 4 respektive 3. Kortaste avståndet är alltså projektionen av QP på normalen ges av

$$\left|(x_0 - x_1, y_0 - y_1)\cdot\frac{1}{5}(4,3)\right| = \frac{|4x_0 - 4x_1 + 3x_0 - 3x_1|}{5} = \frac{|4x_0 + 3x_0 - (4x_1 + 3x_1)|}{5} = \frac{|4x_0 + 3x_0 - 12|}{5},$$

där absolutbeloppet kommer från att endast avståndet—inte riktning—är av intresse. Triangeln som utgör sidytan har alltså basen 5 och höjden ges av $\sqrt{2^2 + \left(\frac{|4x_0+3x_0-12|}{5}\right)^2}$. Kvadraten av sidytans area är därför

$$\left(\frac{5\sqrt{2^2 + \left(\frac{|4x_0+3x_0-12|}{5}\right)^2}}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}\left(4 + \frac{1}{25}(4x_0 + 3y_0 - 12)^2\right) = \boxed{25 + \frac{1}{4}(4x_0 + 3y_0 - 12)^2}.$$

Summan av kvadraterna av sidytorna blir således

$$\frac{9}{4}y_0^2 + 9 + 4x_0^2 + 4 + 25 + \frac{1}{4}(4x_0 + 3y_0 - 12)^2 = 4x_0^2 + \frac{9}{4}y_0^2 + \frac{1}{4}(4x_0 + 3y_0 - 12)^2 + 38.$$

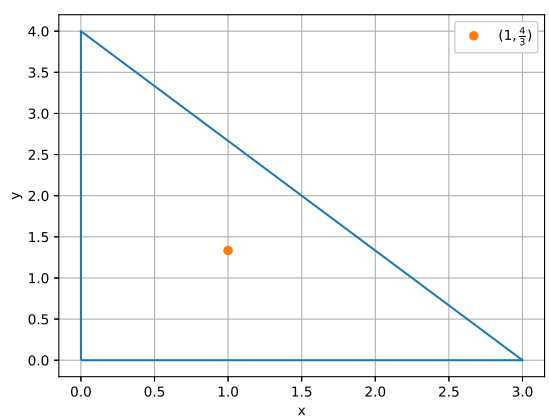
Stationära punkter för detta uttryck ges då

$$\begin{cases} 0 = \frac{d}{dx_0}\left(4x_0^2 + \frac{9}{4}y_0^2 + \frac{1}{4}(4x_0 + 3y_0 - 12)^2 + 38\right) = 8x_0 + 2(4x_0 + 3y_0 - 12) \\ 0 = \frac{d}{dy_0}\left(4x_0^2 + \frac{9}{4}y_0^2 + \frac{1}{4}(4x_0 + 3y_0 - 12)^2 + 38\right) = \frac{9}{2}y_0 + \frac{3}{2}(4x_0 + 3y_0 - 12) \end{cases},$$

eller

$$\begin{cases} 16x_0 + 6y_0 = 24 \\ 6x_0 + 9y_0 = 18 \end{cases} \iff \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = \frac{4}{3} \end{cases}.$$

Den ambitiösa läsaren kan verifiera att detta är ett minimum genom att studera den kvadratiska formen och den ännu mer ambitiösa läsaren kan undersöka randen d.v.s. punkter längs de tre sidorna av trianglarna. Logiskt, duger det dock fullständigt att konstatera att en och endast en stationär punkt hittades. Om punkten flyttas långt ifrån triangeln bör summan av sidytornas area i kvadrat gå mot ∞ varför denna stationära punkten måste vara ett minimum. Punkten är illustrerad i figur 5.11.



Figur 5.11: Optimal punkt i uppgift **5.61**

5.62

a)
$$z - 3 = \nabla f(2,1) \cdot (x-2, y-1) = 4x - 8 - 2y + 2 \Longleftrightarrow z = 4x - 2y - 3.$$
(se t.ex. uppgift **4.5**)

b) $\nabla f(x,y) = (2x, -2y) \implies \nabla f(2,1) = (4,-2)$. Taylorpolynomet ges av
$$f(2,1) + \nabla f(2,1) \cdot (x-2, y-1) = 3 + 4x - 8 - 2y + 2 = 4x - 2y - 3.$$
Vilket visar att tangentplanet är första ordningens Taylorpolynom som sig bör (linjär approximation).

c) Tangentplanet är $4x - 2y - 3$ med normal $(4,-2)$ vilket också (efter evenuell normering) blir normalvektorn i punkten för f.

5.63

Största och minsta värde kan antas i stationära punkter eller på randen. För stationära punkter gäller
$$\begin{cases} 0 = f'_x = (2x + x^2 + y)e^{x-y} \\ 0 = f'_y = (1 - x^2 - y)e^{x-y} \end{cases} \implies \begin{cases} y = -x^2 - 2x \\ 1 - x^2 + x^2 + 2x = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{4} \end{cases},$$
vilket inte tillhör området.

För ränderna gäller antingen $y = 2 \implies f(x,2) = (x^2+2)e^{x-2}$ med statinära punkter
$$0 = \frac{df(x,2)}{dx} = (2x + x^2 + 2)e^{x-2} \implies x^2 + 2x + 2 = 0 \implies x = -1 \pm i \notin \mathbb{R}.$$
Om istället $y = 3$ ges $f(x,3) = (x^2+3)e^{x-3}$ och
$$0 = \frac{df(x,3)}{dx} = (2x + x^2 + 3)e^{x-3} \implies x^2 + 2x + 3 = 0 \implies x = -1 \pm i\sqrt{2} \notin \mathbb{R}.$$
Däremot gäller för ränderna $y = 2, 3$ att om $x \to \pm\infty \implies \lim_{x\to\pm\infty} f(x,y) = \infty, 0$ eftersom $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ och $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$. Men $0 \le 1/e \le \infty$ och $1/e$ ligger mellan största och minsta värde av funktionen varför funktionen måste anta värdet $1/e$. **Svar ja!**

5.64

Lutningen ges av

$$|\nabla z| = |(2x+y, x)| = \sqrt{(2x+y)^2 + x^2} = \sqrt{5x^2 + 4xy + y^2}.$$

Denna funktion har minimum och maximum samtidigt som dess kvadrat eftersom den är ≥ 0 och det är lättare att analytisk hantera funktionen

$$f(x,y) = 5x^2 + 4xy + y^2,$$

som skall maximeras under villkoret att $x^2 + \frac{y^2}{5} \leq 1$. I den undre gränsen $x^2 + \frac{y^2}{5} = 0 \implies x = y = 0$ och $f = \boxed{0}$. I den övre gränsen $x^2 + \frac{y^2}{5} = 1$ tillämpas optimering med bivillkor. Det gäller att

$$\nabla f \parallel \nabla(x^2 + \frac{y^2}{5}) \implies \begin{cases} 10x + 4y = 2\lambda x \\ 4x + 2y = \frac{2}{5}\lambda y \\ x^2 + \frac{y^2}{5} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} (5-\lambda)x + 2y = 0 \\ 10x + (5-\lambda)y = 0 \\ 5x^2 + y^2 = 5 \end{cases},$$

för nollskilda lösningar x, y måste

$$0 = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 10 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 5 = 0 \implies \lambda = 5 \pm \sqrt{20} = 5 \pm 2\sqrt{5}.$$

Systemet löses nu av

$$\begin{cases} -2\sqrt{5}x + 2y = 0 \\ 10x - 2\sqrt{5}y = 0 \\ 5x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{y}{\sqrt{5}} \\ 5\frac{y^2}{5} + y^2 = 5 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \pm\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases},$$

respektive

$$\begin{cases} 2\sqrt{5}x + 2y = 0 \\ 10x + 2\sqrt{5}y = 0 \\ 5x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{y}{\sqrt{5}} \\ 5\frac{y^2}{5} + y^2 = 5 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \mp\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \pm\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}.$$

Värdena av f i dessa punkter är

$$f(\pm 1/\sqrt{2}, \pm\sqrt{5/2}) = \frac{5}{2} + 2\sqrt{5} + \frac{5}{2} = \boxed{5 + 2\sqrt{5}},$$

och

$$f(\mp 1\sqrt{2}, \pm\sqrt{5/2}) = \boxed{5 - 2\sqrt{2}}.$$

Det återstår att undersöka stationära punkter.

$$\begin{cases} 0 = f'_x = 10x + 4y \\ 0 = f'_y = 4x + 2y \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases},$$

med värde $f = \boxed{0}$. Största värde är alltså

$$|\nabla z| = \sqrt{f} = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}.$$

Rikting och koordinater framgår av räkningarna.

5.65

Målet är att optimera funktionen $f(x,y,z) = z$ under bivillkor

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ x+2y+2z = 0 \end{cases}.$$

Gradienterna $\nabla f = (0,0,1)$, $\nabla(x^2+y^2+z^2) = 2(x,y,z)$ och $\nabla(x+2y+2z) = (1,2,2)$. Parallella gradienter kräver

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 1 \\ 0 & 2y & 2 \\ 1 & 2z & 2 \end{vmatrix} = 4x - 2y \implies y = 2x.$$

Bivillkoren ger därför

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ x+2y+2z = 0 \\ y = 2x \end{cases} \implies \begin{cases} 5x^2+z^2 = 1 \\ 5x+2z = 0 \\ y = 2x \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{9}{5}z^2 = 1 \\ x = -\frac{2}{5}z \\ y = -\frac{4}{5}z \end{cases} \implies \begin{cases} x = \mp\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ y = \mp\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ z = \pm\frac{\sqrt{5}}{3} \end{cases}.$$

Alltså är punkterna med störst och minst z-koordinat

$$\pm\left(-\frac{2}{3\sqrt{5}}, -\frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right).$$

5.66

Avstånd till origo $\sqrt{x^2+y^2}$ har maximum och minimum samtidigt som x^2+y^2. Denna funktion skall optimeras med bivillkor $x^4+x^2y^2+2y^4 = 1$. Alltså

$$\lambda\nabla(x^2+y^2) = \nabla(x^4+x^2y^2+2y^4 = 1) \implies \begin{cases} 2\lambda x = 4x^3+2xy^2 \\ 2\lambda y = 8y^3+2x^2y \\ x^4+x^2y^2+2y^4 = 1 \end{cases}.$$

Om $x = 0$ eller $y = 0$ ges $y = \boxed{\frac{1}{2^{1/4}}}$ respektive $x = \boxed{1}$ vilket också sammanfaller med avstånden. För $x, y \neq 0$ ges i polära koordinater

$$\begin{cases} 2\lambda r\cos\phi = 4r^3\cos^3\phi + 2r^3\cos\phi\sin^2\phi \\ 2\lambda r\sin\phi = 8r^3\sin^3\phi + 2r^3\cos^2\phi\sin\phi \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 2r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi \\ \lambda = 4r^2\sin^2\phi + r^2\cos^2\phi \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = r^2(1+\cos^2\phi) \\ \lambda = r^2(1+3\sin^2\phi) \end{cases},$$

Alltså är

$$\cos^2\phi = 3\sin^2\phi \implies 1-\sin^2\phi = 3\sin^2\phi \implies \sin\phi = \pm\frac{1}{2},$$

vilket medför från bivillkoret

$$x^4+x^2y^2+2y^4 = r^4(1-\sin^2\phi)^2 + r^4(1-\sin^2\phi)\sin^2\phi + 2r^4\sin^4\phi = r^4\left(\frac{9}{16}+\frac{3}{16}+\frac{2}{16}\right) = \frac{14}{16}r^4 = 1,$$

och $r = (16/14)^{1/4} = \boxed{\dfrac{2}{14^{1/4}}}$. Det är finurligt att r också motsvarar avståndet till origo och det kan konstateras att största och minsta avstånd är 2^{-4} och $2/14^{1/4}$.

5.67

$$z = 2 - \frac{1}{25}(x^2 + xy + y^2).$$

1000 m över havet ges av nivåkurvan $z = 1$ km. Lutningen ges av

$$|\nabla z(x,y)| = \left| -\frac{1}{25}(2x+y, x+2y) \right| = \frac{1}{25}\sqrt{(2x+y)^2 + (x+2y)^2}.$$

För att undersöka om lutningen $|\nabla z|$ överskrider $\frac{1}{\sqrt{3}}$ studeras största och minsta värde under bivillkor $z = 1$ km. Funktionen $f(x,y) = |\nabla z(x,y)|^2$ är lättare att hantera och optimering med bivillkor kräver

$$\begin{aligned} f(x,y) = \frac{(2x+y)^2 + (x+2y)^2}{25^2} \implies \nabla f(x,y) &= \left(\frac{4(2x+y) + 2(x+2y)}{25^2}, \frac{2(2x+y) + 4(x+2y)}{25^2} \right) \\ &= \frac{1}{25^2}\left(10x + 8y, 8x + 10y\right), \end{aligned}$$

medans

$$2 - \frac{1}{25}(x^2 + xy + y^2) = 1 \implies \nabla\left(2 - \frac{1}{25}(x^2 + xy + y^2)\right) = \frac{1}{25}(2x+y, x+2y).$$

Om dessa gradienter är parallella

$$\begin{cases} \frac{1}{25^2}(10x + 8y) = \frac{\lambda}{25}(2x+y) \\ \frac{1}{25^2}(8x + 10y) = \frac{\lambda}{25}(x+2y) \end{cases} \iff \begin{cases} 10x + 8y = 50\lambda x + 25\lambda y \\ 8x + 10y = 25\lambda x + 50\lambda y \end{cases} \iff \begin{cases} (10 - 50\lambda)x + (8 - 25\lambda)y = 0 \\ (8 - 25\lambda)x + (10 - 50\lambda)y = 0 \end{cases}.$$

För icke-triviala lösningar måste determinanten

$$0 = \begin{vmatrix} 10 - 50\lambda & 8 - 25\lambda \\ 8 - 25\lambda & 10 - 50\lambda \end{vmatrix} = (10 - 50\lambda)^2 - (8 - 25\lambda)^2 = 1875\lambda^2 - 600\lambda + 36 \implies \begin{cases} \lambda = \frac{2}{25} \\ \lambda = \frac{6}{25} \end{cases}.$$

För dessa värdena

$$\lambda = \frac{2}{25} \implies \begin{cases} (10 - 50\lambda)x + (8 - 25\lambda)y = 0 \\ (8 - 25\lambda)x + (10 - 50\lambda)y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 6x + 6y = 0 \\ 6x + 6y = 0 \end{cases} \implies x = -y,$$

och

$$\lambda = \frac{6}{25} \implies \begin{cases} (10 - 50\lambda)x + (8 - 25\lambda)y = 0 \\ (8 - 25\lambda)x + (10 - 50\lambda)y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \implies x = y.$$

Bivillkoret $1 = 2 - \frac{1}{25}(x^2 + xy + y^2)$ ger i fallet $x = -y$

$$1 = 2 - \frac{x^2}{25} \implies \begin{cases} x = \pm 5 \\ y = \mp 5 \end{cases},$$

med lutningar $|\nabla z(\pm 5, \mp 5)| = \frac{1}{25}\sqrt{(\pm 5)^2 + (\mp 5)^2} = \frac{\sqrt{2}}{5} < \frac{1}{\sqrt{3}}$. Vidare, $x = y$ ger

$$1 = 2 - \frac{3x^2}{25} \implies x^2 = \frac{25}{3} \implies \begin{cases} x = \pm\frac{5}{\sqrt{3}} \\ y = \pm\frac{5}{\sqrt{3}} \end{cases},$$

med lutningar

$$|\nabla z(\pm\frac{5}{\sqrt{3}}, \pm\frac{5}{\sqrt{3}})| = \frac{1}{25}\sqrt{(\pm 3\frac{5}{\sqrt{3}})^2 + (\pm 3\frac{5}{\sqrt{3}})^2} = \frac{1}{25}\sqrt{30} = \frac{\sqrt{30}}{5} < \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Alltså överstiger inte största värdet på lutningen $30°$.