Flerdimensionell Analys

Lösningsförslag

Baserat på

Övningar i Flerdimensionell analys

3 Funktioner

Även i detta kapitel finns det en del uppgifter som handlar om att rita där jag har svårt att se att det skulle vara någon till hjälp att ta med bilder eftersom de redan finns i facit. Då det är möjligt, görs istället ett försök att ge tips på omskrivningar.

3.1

Tips:

a) Den reellvärda funktionen $\sqrt{}$ är endast definierad för argument större än eller lika med 0. Alltså måste det uppfyllas

$$4 - x^2 - 2xy - y^2 \geq 0.$$

I uttrycket kan $x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$ identifieras vilket möjliggör omsrkivningen

$$4 - x^2 - 2xy - y^2 = 4 - (x+y)^2 \geq 0 \implies (x+y)^2 \leq 4 \implies -2 \leq x + y \leq 2,$$

eller

$$-x - 2 \leq y \leq -x + 2,$$

eftersom både $(-2)^2 = 2^2 = 4$. Alltså begränsas området av de två linjerna $y = -x + 2$ och $y = -x - 2$.

b) arcsin är definierat för argument mellan -1 och 1 (eftersom $-1 \leq \sin\theta \leq 1, \forall\theta \in \mathbb{R}$)[1] Liknande i föregående uppgift ges således

$$-1 \leq x + y \leq 1 \implies -x - 1 \leq y \leq -x + 1.$$

c) Enligt logaritmlagarna

$$f(x,y) = \ln\frac{x+y}{x-y} = \ln(x+y) - \ln(x-y).$$

Eftersom $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ så existerar endast $\ln x$ för $x > 0$. Den första termen kräver därför

$$x + y > 0 \implies y > -x.$$

Den andra termen kräver i sin tur

$$x - y > 0 \implies y < x.$$

Rita därför kurvorna $y = -x$ och $y = x$ och definitionsmängden blir den **öppna** (varför?) mängden mellan kurvorna.

3.2

Tips:
c) Låt $x = r\cos\theta$ och $y = r\sin\theta$ så att $r = \sqrt{x^2+y^2}$ och $\theta = \arctan(y/x)$. Då ges $f(x,y) = f(r(x,y), \theta(x,y) = e^{-r}$ för $0 \leq r \leq 2$. Detta gäller för alla $\theta \in [0, 2\pi]$ och därför måste kurvan från **a)** roteras runt y axeln ett helt varv.

[1] Tecknet $\forall$ betyder "*för alla*".

3.3

Tips: Låt $x = r\cos\theta$ och $y = r\sin\theta$ så att $r^2 = x^2 + y^2$. Alltså ska kurvan $\ln(r^2) = 2\ln r$ roteras runt $y-$axeln.

3.4

Tips: För **a)** och **b)** kan det vara en god idé att övergå till polära koordinater $x = r\cos\phi$ och $y = r\sin\phi$ för $0 \leq r \leq 4$ och $0 \leq \phi < 2\pi$,.
c) Jag beklagar men mitt bästa tips för denna uppgift, om man inte kan föreställa sig den sadelformade ytan, är att rita funktionen $f(x, y) = x_0^2 - y^2$ för konstant $x_0 = -2, -1, 0, 1, 2$ vilket ger hur funktionen ser ut i $yz-$planet för olika x. Detta ger olika bågarsom kan placeras ut längs med $x-$axeln.
Vidare kan samma sak göras för $f(x, y) = x^2 - y_0^2$ där $y_0 = -2 - 1, 0, 1, 2$ vilket nu ger vända bågar"i xz-planet. Med lite ytan är kontinuerlig och därför kan ytan kompleteras med ytor mellan dessa bågar.

3.5

Tips:
a) För

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases} \implies f(r, \phi) = \sqrt{r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi} = \sqrt{r^2} = r.$$

Nivåkurvorna som skall ritas är alltså $r = k$ för alla $\phi \in [0, 2\pi)$ vilket ger cirklar med radie k.
b) För den rutinerade känns högerledet igen som en ellips. Gör det inte det, så kan omskrivningen

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ 2y = r\sin\phi \end{cases} \implies f(r, \phi) = r^2 \quad \text{eller} \quad x^2 + (2y)^2 = r^2,$$

där nu y axeln måste krympas ihop med en faktor $1/2$ tack vare valet av $2y = r\sin\phi \implies y = \frac{1}{2}r\sin\phi$ istället för det konventionella $y = r\sin\phi$.
Oavsett vilket tillvägagångssätt som väljs, måste—eftersom högerledet är allipser—nivåkurvorna vara ellipser mer radie $\sqrt{k}$ (roten ur eftersom ellipser beskrivs av $ax^2 + by^2 = c^2$).
c). Känns strukturen för hyperbler igen från kapitel 2 kanske?

3.6

Lösning: Först och främst är kvadrater alltid positiva och därför också summan av kvadrater också positiva; alltså $T(x, y) \geq 0$.
Använd omskrivningen

$$\begin{cases} 2x = r\cos\phi \\ \sqrt{y} = r\sin\phi \end{cases} \implies T(r, \phi) = (2x)^2 + (\sqrt{2}y)^2 = r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi = r^2.$$

Vi har alltså ellipser

$$(2x)^2 + (\sqrt{2}y)^2 = r^2,$$

där $r^2 = K = 0, 4, 8, 12$.

3.7

3.8

Lösning: Månsson och Nordbeck verkar vara lite småförtjusta i kvadratkomplettering. Skriv om

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y = (x^2 + 2x + 1 - 1) + (y^2 - 2y + 1 - 1) + z^2 \\ &= (x+1)^2 - 1 + (y-1)^2 - 1 + z^2, \end{aligned}$$

Alttså

$$T(x,y,z) + 2 = (x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2,$$

vilket ger att vi har sfärer med radier $\sqrt{0+2}, \sqrt{1+2}, \sqrt{2+2}$ och $\sqrt{3+2}$ med mittpunkt i $(-1, 1, 0)$.

3.9

Lösning:

Kvadratkomplettering igen! Skriv om enligt

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x^2 + y^2 + 2y + z^2 - 2z + 3 = x^2 + (y^2 + 2y + 1 - 1) + (z^2 - 2z + 1 - 1) + 3 \\ &= x^2 + (y+1)^2 - 1 + (z-1)^2 - 1 + 3 \\ &= x^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 + 1, \end{aligned}$$

eller

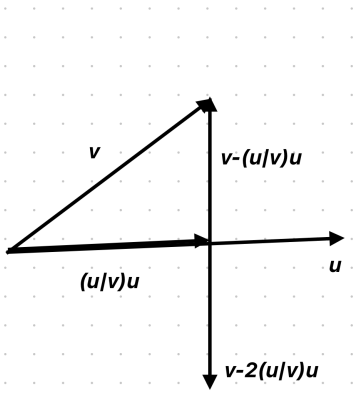
$$f(x,y,z) - 1 = x^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2.$$

vilket ger sfärer för fixa värden på f.

3.10

Tips: Skriv om med polära koordinater för x och y.

3.14



Figur 3.1: Illustration av projektion och spegling av vektorn $\mathbf{v}$ i en linje $\mathbf{u}$. Här används notationen $(\mathbf{u}|\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ för den inre produkten av två vektorer.

a) Med referens till figur 3.1 så eftersökes projektionen P av en vecktor $\mathbf{v} = (x, y)$ på linjen $\mathbf{u} = (x_0, y_0) + t\hat{\mathbf{u}}$ där (x_0, y_0) kan väljas som $(0, 0)$ (origo tillhör linjen), $t \in \mathbb{R}$ och $\hat{\mathbf{u}}$ är den normerade riktingsvektorn till linjen. Denna projektion ges av

$$P(x, y) = ((x, y) \cdot \hat{\mathbf{u}})\hat{\mathbf{u}}.$$

Vi har att linjen ges av $x + y = 0 \implies y = -x$ vilket innebär att linjen kan parametriseras av $t = x \implies y = -x = -t$ eller $\mathbf{u} = (t, -t) = t(1, -1)$. För att normera $\mathbf{u}$ delar vi med normen enligt

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}} = \frac{t(1,-1)}{\sqrt{t(1,-1)\cdot(1,-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1).$$

Projektionen ges nu av

$$\begin{aligned} P(x, y) &= ((x, y) \cdot \hat{\mathbf{u}})\hat{\mathbf{u}} = ((x, y) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1))\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1) \\ &= \frac{x - y}{2}(1, -1), \end{aligned}$$

vilket är det slutgiltiga uttrycket för projektionen $P : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$. Notera i facit skriver de projektionen för x och y var för sig alltså $P(x\hat{\mathbf{e}}_x) = \frac{x-y}{2}\hat{\mathbf{e}}_x$ och $P(x\hat{\mathbf{e}}_y) = -\frac{x-y}{2}\hat{\mathbf{e}}_y$ men den informationen är detsamma som

$$P(x, y) = \frac{x - y}{2}(1, -1).$$

b) Studera återigen figur 3.1. Speglingen i linjen $S(\mathbf{v}) = S(x, y)$ ges av

$$\begin{aligned} S(x,y) &= \mathbf{v} - 2\left[\mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{u}})\hat{\mathbf{u}}\right] = \mathbf{v} - 2\left[\mathbf{v} - P(\mathbf{v})\right] \\ &= (x,y) - 2\left((x,y) - P(x,y)\right) \\ &= 2P(x,y) - (x,y). \end{aligned}$$

$P(x, y)$ bestämdes i förra uppgiften och används det uttryck ges

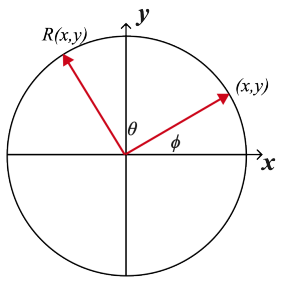
$$S(x,y) = 2P(x,y) - (x,y) = 2\frac{x-y}{2}(1,-1) - (x,y) = (x-y-x, y-x-y) = (-y,-x),$$

alltså $S(x, y) = (-y, -x)$.

c) För den läsaren som är bekväm med rotationsmatriser kan matrisen för rotation med vinkel $\pi/3$ användas direkt och rotationen $R(x, y)$ ges av

$$\begin{aligned} R(x,y) &= \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x - \sqrt{3}y \\ \sqrt{3}x + y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Om däremot inte rotationsmatriser ligger färskt i minnet kommer här en liten intuitiv härledning av ovanstående resonemang. Alla vektorer i $\mathbb{R}^2$ kan bekrivas som en vektor $\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\hat{\mathbf{v}}$ där den normerade vektorn $\hat{\mathbf{v}}$ ligger på enhetscirkeln (jämför med hur alla komplexa tal $a + ib = re^{i\theta}$). Längden $|\mathbf{v}|$ behålls under rotation och endast rotation av $\hat{\mathbf{v}}$ behövs.
Studera figur 3.2



Figur 3.2: Rotation med vinkel θ. Den ursprungliga vektorn $(x, y) = (\cos\phi, \sin\phi)$ roteras och blir $R(x, y) = (\cos(\phi + \theta), \sin(\phi + \theta)$.

Rotationen avbildar $(x, y) = (\cos\phi, \sin\phi)$ på $R(x, y) = (\cos(\phi + \theta), \sin(\phi + \theta)$ eller med hjälp av additionsformlerna för de trigonometriska funktionerna

$$\begin{pmatrix} \cos(\phi+\theta) \\ \sin(\phi+\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta \\ \cos\phi\sin\theta + \sin\phi\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix},$$

varifrån rotationsmatrisen kommer. Därifrån fortsätter uppgiften som ovan.

d) Ovan konstaterades att alla vektorer i $\mathbb{R}^2$ kan skrivas $\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\hat{\mathbf{v}}$ där $\hat{\mathbf{v}}$ ligger på enhetscirkel. Projektionen är alltså division med längden d.v.s.

$$P(x,y) = \frac{1}{|(x,y)|}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y).$$

3.15

Lösning: En linjär avbildning $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ uppfyller två krav

$$\begin{cases} f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) \\ f(\alpha\mathbf{u}) = \alpha f(\mathbf{u}) \end{cases},$$

för konstant $\alpha \in \mathbb{R}$. Dessa krav behövs alltså kontrolleras för alla avbildningar.

a)

$$\begin{aligned} P(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = P(x_1+x_2, y_1+y_2) &= \frac{1}{2}(x_1+x_2-y_1-y_2)(1,-1) \\ &= \frac{1}{2}(x_1-y_1)(1,-1) + \frac{1}{2}(x_2-y_2)(1,-1) = P(x_1,y_2) + P(x_2,y_2) = P(\mathbf{u}) + P(\mathbf{v}), \end{aligned}$$

och

$$P(\alpha(x,y) = \frac{1}{2}(\alpha x - \alpha y)(1,-1) = \frac{\alpha}{2}(x-y)(1,-1) = \alpha P(x,y).$$

Alltså är avbildningen linjär.

b)

$$\begin{aligned} S(x,y) = (-y,-x) \implies S((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) &= S(x_1+x_2, y_1+y_2) = (-y_1-y_2, -x_1-x_2) \\ &= (-y_1,-x_1) + (-y_2,-x_2) = S(x_1,y_1) + S(x_2,y_2), \end{aligned}$$

och

$$S(\alpha(x,y)) = (-\alpha y, -\alpha x) = \alpha(-y,-x) = \alpha S(x,y),$$

varför även denna avbildning är linjär.

c) Använd notationen $\mathbf{R}$ för rotationsmatrisen. Detta ger

$$\begin{aligned} R((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) = R(x_1+x_2, y_1+y_2) &= \mathbf{R}\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{R}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \mathbf{R}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = R(x_1,y_1) + R(x_2,y_2). \end{aligned}$$

Vidare ges $R(\alpha(x,y)) = \alpha\mathbf{R}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha R(x,y)$ och avbildningen är linjär.

Annars kan konstatera att alla avbildningar som kan uttryckas med matriser är linjära.

d)

$$P(x_1+x_2, y_1+y_2) = \frac{(x_1+x_2, y_1+y_2)}{\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}} \neq \frac{(x_1,y_1)}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}} + \frac{(x_2,y_2)}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}} = P(x_1,y_1)+P(x_2,y_2),$$

och avbildningen är inte linjär.

3.16

Lösning: Sätt in den först kurvans parametrisering $(x, y) = (t^2, t+1)$ i uttrycket för den andra; skärningspunkter ges av $t \in \mathbb{R}$ som uppfyller det senare uttrycket d.v.s.

$$\begin{aligned}
0 &= \Big[5x^2+5xy+3y^2-8x-6y+3\Big]_{x=t^2,y=t+1} = 5(t^2)+5(t^2\times(t+1))+3(t+1)^2-8(t^2)-6(t+1)+3 \\
&= 5t^2+5t^3+5t^2+3t^2+6t+3-8t^2-6t-6+3 \\
&= 5t^3+5t^2 \\
&= 5t^2(t+1).
\end{aligned}$$

Nollställen till det sista polynomet är $t = 0$ och $t = -1$ enligt faktorsatsen. Det lättaste för att hitta dessa båda skärningspunkter är att använda parametriseringen. Alltså ges skärning i

$$\begin{cases} (t^2,t+1)\Big|_{t=0} = (0,1) \\ (t^2,t+1)\Big|_{t=-1} = (1,0) \end{cases}.$$

3.17

a) Det är möjligt att se att gränsvärdet är olika beroende av hur punkten $(1,1)$ närmas. T.ex. längs kurvan $y = 1$ ges

$$\lim_{(x,1)\to(1,1)} \frac{xy-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x-1} = 1.$$

Om vägen till $(1,1)$ istället följer $y = x$ ges

$$\lim_{(x,y=x)\to(1,1)} \frac{xy-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} x+1 = 2.$$

Eftersom gränsvärdet inte är entydigt, existerar det ej.

b) Kordinatbyte till polära koordinater

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases} \implies (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) = r^2\ln r^2.$$

Om $(x, y) \to (0, 0) \implies r \to 0$ och gränsvärdet är

$$\lim_{r\to 0} r^2 \ln r = 0,$$

eftersom polynomet r^2 går snabbare mot 0 än vad $\ln r^2 = 2\ln r$ går mot $-\infty$.

c) Liknande i **a)**, om $y = 1$ så är gränsvärdet

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x-1} = 1,$$

medans om $y = x$ är uttrycket 0 ($x - x = 0$). Gränsvärdet är alltså inte entydigt och existerar således inte.

d) Om $y = 0$ så ges gränsvärdet av

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+0}{2x^2+0} = \frac{1}{2},$$

medans längs kurvan $x = 0$ så ges

$$\lim_{y\to 0} \frac{0+2y^2}{0+y^2} = 2.$$

Tvetydigheten innebär att gränsvärdet inte existerar.

e) Ännu en gång är det värdefullt att räkna med polära koordinater; i regel är detta en bra strategi när uttryck som $x^2 + y^2$ återfinns. Låt

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases} \implies \frac{x^3 - x^2y}{x^2+y^2+xy} = \frac{r^3\cos^3\phi - r^2\cos^2\phi r\sin\phi}{r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi + r\cos\phi r\sin\phi} = \frac{r\cos^2\phi(\cos\phi - \sin\phi)}{(1+\frac{1}{2}\sin 2\phi)},$$

där r^2 har förkortats bort i både täljare och nämnare och det används att $2\cos\phi\sin\phi = \sin 2\phi$ i sista steget. Gränsvärdet $(x, y) \to 0 \implies r \to 0$ oberoende av ϕ. Vad som krävs för att gränsvärdet skall existera är följaktligen att uttrycket går mot ett bestämt värde oavsett ϕ.
Eftersom

$$\frac{r\cos^2\phi(\cos\phi - \sin\phi)}{(1+\frac{1}{2}\sin 2\phi)} \propto r,$$

(tecknet $\propto$ betyder "*är proportioneligt mot*") så borde uttrycket gå mot noll då $r \to 0$. För att verifiera att så är fallet, måste det visas att proportionalitetsfaktorn $\frac{\cos^2\phi(\cos\phi-\sin\phi)}{(1+\cos\phi\sin\phi)}$ inte växer obehindrat för något värde på ϕ.
Eftersom det största värde $\cos\phi$ och $\sin\phi$ kan anta är 1 (ej samtidigt, t.ex. då $\cos\phi = 1 \implies \sin\phi = 0$ eftersom $\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$) så kan vi sätta en övre gräns för uttrycket enligt

$$\left|\frac{\cos^2\phi(\cos\phi - \sin\phi)}{(1+\frac{1}{2}\sin 2\phi)}\right| \le \left|\frac{1^2(1-0)}{1}\right| = 1 < \infty, \quad \forall\phi.$$

Detta innebär att

$$\lim_{r\to 0} \frac{r\cos^2\phi(\cos\phi - \sin\phi)}{(1+\frac{1}{2}\sin 2\phi)} = \lim_{r\to 0} r = 0,$$

oavsett ϕ och gränsvärdet existerar och är 0. Vill läsaren vara riktigt nogrann, så kan maximivärdet för $\frac{\cos^2\phi(\cos\phi-\sin\phi)}{(1+\cos\phi\sin\phi)}$ bestämmas genom att derivera och sätta derivatan till noll, men det viktiga är att inse att uttrycket är begränsat; inte att bestämma begränsningens värde.

f) Idén med denna uppgift är att man ska känna igen gränsvärdesdefinitionen av talet e som ges av

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Efter övergång till polära koordinater ges $x^2+y^2=r^2$ (som bör läggas på minnet) och $xy^2 = r\cos\phi r^2\sin\phi = r^2\cos\phi\sin\phi$ ges gränsvärdet av

$$\lim_{r\to 0}\left(1+r^2\right)^{\frac{1}{r^2+r^3\cos\phi\sin\phi}}.$$

Nyckeln nu är att inse att för små r, så är $r^3\cos\phi\sin\phi \ll r^2$ och exponenten

$$\frac{1}{r^2+r^3\cos\phi\sin\phi} = \frac{1}{r^2(1+r\cos\phi\sin\phi)} \xrightarrow{r\to 0} \frac{1}{r^2}.$$

Därför ges

$$\begin{aligned}&\lim_{r\to 0}\left(1+r^2\right)^{\frac{1}{r^2+r^3\cos\phi\sin\phi}} = \lim_{r\to 0}\left(1+r^2\right)^{\frac{1}{r^2}}\\ &= \left[\begin{cases} n=\frac{1}{r^2} \iff r^2=\frac{1}{n} \\ r\to 0 \implies n\to\infty \end{cases}\right] = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.\end{aligned}$$

g) Övergång till polära koordinater ger

$$\lim_{r\to 0}\frac{\sin\sqrt{r^2}}{\sqrt{r^2}} = \lim_{r\to 0}\frac{\sin r}{r} = 1,$$

eftersom $\sin r = r+\mathcal{O}(r^3)$ för små r. Detta är ett standardgränsvärde.

h) Division med y^2 ger

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{y^2\ln x}{(x-1)^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{\ln x}{\frac{(x-1)^2}{y^2}+1}.$$

De båda polynomen $(x-1)^2$ och y^2 är av samma ordning och går således mot noll likvärdigt när $(x,y)\to(1,0)$ varför nämnaren uppfyller

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{(x-1)^2}{y^2}+1 = 1+1 = 2 \implies \lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{\ln x}{\frac{(x-1)^2}{y^2}+1} = \lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{\ln x}{2} = \ln 1 = 0.$$

i) Övergång till polära koordinater ger

$$\begin{aligned}&\lim_{r\to 0}\frac{r^2\cos^2\phi+r^2\sin^2\phi}{r^2\cos^2\phi+r\cos\phi r\sin\phi+r^2\sin^2\phi} = \lim_{r\to 0}\frac{r^2}{r^2+r^2\cos\phi\sin\phi}\\ &= \lim_{r\to 0}\frac{1}{1+\cos\phi\sin\phi},\end{aligned}$$

vars värde beror av ϕ och är således inte entydigt $\implies$ gränsvärdet existerar inte.

3.18

a)

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{\sin|\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x}|^2 + x_1x_2x_3}.$$

Det går att utläsa att eftersom $|\mathbf{x}|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ är ett polynom av andra ordningen och $x_1x_2x_3$ är av tredje ordningen, så är det senare försumbart då $\mathbf{x}$ är nära $\mathbf{0}$; tredje ordningens termer går mycket snabbare mot 0. Alltså

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{\sin|\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x}|^2 + x_1x_2x_3} = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{\sin|\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x}|^2} = \left[\text{Variabelbyte } t = |\mathbf{x}|^2 \implies |\mathbf{x}| \to 0 \Leftrightarrow t \to 0\right] = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

b) Precis som i förra uppgiften noteras i nämnaren att det finns en andra ordningens term $|\mathbf{x}|^2$ och tre tredje ordningens termer $x_1^2x_2, x_2^2x_3$ och $x_3^2x_1$ som är försumbara nära $\mathbf{0}$. Alltså

$$\lim_{|\mathbf{x}|\to 0} \frac{e^{|\mathbf{x}|^2} - 1}{|\mathbf{x}|^2 + x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1} = \lim_{|\mathbf{x}|\to 0} \frac{e^{|\mathbf{x}|^2} - 1}{|\mathbf{x}|^2}$$
$$\left[\text{Variabelbyte } t = |\mathbf{x}|^2 \implies |\mathbf{x}| \to 0 \Leftrightarrow t \to 0\right] = \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1.$$

c) För små x gäller $\sin x \approx x$ enligt analytisk utveckling (MacLaurin-/Taylorutveckling) av sinus funktionen. Därför gäller

$$\lim_{|\mathbf{x}|\to 0} \frac{\ln\left(1 + |\mathbf{x}|^2\right)}{|\mathbf{x}|^2 + \sin(x_1x_2x_3)} = \lim_{|\mathbf{x}|\to 0} \frac{\ln\left(1 + |\mathbf{x}|^2\right)}{|\mathbf{x}|^2 + x_1x_2x_3}.$$

Precis som i förra uppgiften så försummas tredje ordningens termer då $\mathbf{x} \to \mathbf{0}$ och kvar blir återigen ett standardgränsvärde

$$\lim_{|\mathbf{x}|\to 0} \frac{\ln\left(1 + |\mathbf{x}|^2\right)}{|\mathbf{x}|^2 + x_1x_2x_3} = \lim_{|\mathbf{x}|\to 0} \frac{\ln\left(1 + |\mathbf{x}|^2\right)}{|\mathbf{x}|^2} = \left[\text{Variabelbyte } t = |\mathbf{x}|^2 \implies |\mathbf{x}| \to 0 \Leftrightarrow t \to 0\right] = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

3.19

b) För ingengören räcker det kanske att konstatera att täljaren är av grad 5 och nämnaren av grad 2 så därför går täljaren mot 0 mycket snabbare än nämnaren oavset väg och gränsvärdet är noll.

För matematikern kanske polära koordinater $x = r\cos\phi$ och $y = r\sin\phi$ kan vara till nytta för att övertyga att så är fallet. Gränsvärdet blir

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y}{x^2 + (x+y)^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^4\cos^4\phi r\sin\phi}{r^2\cos^2\phi + (r\cos\phi + r\sin\phi)^2}$$
$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^5\cos^4\phi\sin\phi}{r^2\cos^2\phi + r^2\cos^2\phi + 2r\cos\phi\sin\phi + r^2\sin^2\phi}$$
$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^4\phi\sin\phi}{\cos^2\phi + \sin\phi\cos\phi + 1} \propto r^3.$$

Det återstår att visa att proportionalitesfaktorn är begränsad, alltså

$$\left| \frac{\cos^4\phi \sin\phi}{\cos^2\phi + \sin\phi\cos\phi + 1} \right| < \infty.$$

Men detta är onekligen uppfyllt eftersom den den enda potentiella singulariteten (division med 0) skulle vara om nämnaren

$$\cos^2\phi + \sin\phi\cos\phi + 1 = 0,$$

men $0 < \cos^2\phi < 1$ och $\sin\phi\cos\phi = \frac{1}{2}\sin 2\phi$ vilket ligger mellan $-1/2$ och $1/2$. Alltså finns inga nollställen till nämnaren och uttrycket är begränsat.
Gränsvärdet går som r^3 mot 0.

3.20

För samtliga gränsvärden i denna uppgift kan det vara värdefullt att använda polära koordinater så att

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases} \implies x^2 + y^2 = r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi = r^2(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = r^2.$$

Gränsen $x^2 + y^2 \to \infty \iff r^2 \to \infty \iff r \to \infty$ eftersom $0 < r$.

a)

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty} \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2+xy} = \lim_{r^2\to\infty} \frac{\ln(r^2)}{r^2 + r^2\cos\phi\sin\phi}$$
$$= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r^2} \frac{\ln(r^2)}{1 + \frac{1}{2}\sin 2\phi} = 0,$$

eftersom $\ln x/x \to 0$ och nämnaren $1 + \frac{1}{2}\sin 2\phi \neq 0, \forall\phi$.

b)

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{r^2\to\infty} \frac{\sin r^2}{r^2}$$
$$= \lim_{t\to\infty} \frac{\sin t}{t} = 0,$$

eftersom $\sin t$ är begränsad.

c)

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty} \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^2 + x^2y^2} = \lim_{r^2\to\infty} \frac{r^3\cos^2\phi\sin\phi}{(r^2)^2 + r^2\cos^2\phi r^2\sin^2\phi}$$
$$= \lim_{r\to\infty} \frac{\cos^2\phi\sin\phi}{r(1+\cos^2\phi\sin^2\phi)} = 0,$$

eftersom $1 + \cos^2\phi\sin^2\phi \geq 1 \neq 0, \forall\phi$ och uttrycket går som $1/r$.

d)

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty} xye^{-x^2+y^2} = \lim_{r^2\to\infty} r^2\cos\phi\sin\phi e^{-r^2}$$
$$= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2}r^2\sin 2\phi e^{-r^2} = 0,$$

eftersom $te^{-t} \to 0$ då $t \to \infty$ och $\frac{1}{2}\sin 2\phi$ är begränsad.

e) Efter omskrivning

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty} xye^{-(x+y)^2} = \lim_{x^2+y^2\to\infty} xye^{-x^2-y^2-2xy}$$
$$= \lim_{r^2\to\infty} r^2\cos\phi\sin\phi e^{-r^2-2r^2\cos\phi\sin\phi}$$
$$= \lim_{r^2\to\infty} \frac{1}{2}r^2\sin 2\phi e^{-r^2}e^{-r^2\sin 2\phi}.$$

Nu ses att gränsvärdet—till skillnad från föregående uppgift—beror av ϕ. Om t.ex. $\sin 2\phi = 1$ så ges

$$\lim_{r^2\to\infty} \frac{1}{2}r^2\sin 2\phi e^{-r^2}e^{-r^2\sin 2\phi} = \lim_{r^2\to\infty} \frac{1}{2}r^2e^{-r^2}e^{-r^2} = \lim_{r^2\to\infty} \frac{1}{2}r^2e^{-2r^2} = 0,$$

medans om $\sin 2\phi = -1$ ges istället

$$\lim_{r^2\to\infty} \frac{1}{2}r^2\sin 2\phi e^{-r^2}e^{-r^2\sin 2\phi} = \lim_{r^2\to\infty} -\frac{1}{2}r^2e^{-r^2}e^{r^2} = \lim_{r^2\to\infty} -\frac{1}{2}r^2 = -\infty.$$

Alltså existerar inget entydigt gränsvärde.

3.21

a) 'En rät linje genom origo' ges av $y = kx$ för någon konstant k. Med denna omskrivning ges

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty} xye^{-x^2y^2} = \lim_{x^2+(kx)^2\to\infty} x(kx)e^{-x^2(kx)^2}$$
$$\lim_{x^2\to\infty} kx^2e^{-k^2x^4} = 0,$$

eftersom $te^{-t^2} \to 0$, då $t \to \infty$.

b) Hittils har konstaterat att längs en rät linje så ges gränsvärdet av 0. Om då gränsvärdet existerar, så skall det vara 0 för alla vägar så att $x^2 + y^2 \to \infty$. Men genom att studera uttrycket, ses att om $y = 1/x$, så är

$$xye^{-x^2y^2} = x\left(\frac{1}{x}\right)e^{-x^2(1/x)^2} = 1 \times e^{-1} = \frac{1}{e}, \quad \forall(x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Däremot gäller fortfarande att

$$x^2 + y^2 \to \infty,$$

om $x^2 \to \infty$ eftersom

$$x^2 + \frac{1}{x^2} \to \infty + 0 \to \infty.$$

och gränsvärdet existerar således inte.

3.22

Om funktionerna skall kunna utvidgas till hela $\mathbb{R}^2$ krävs att alla odefinierade har ett bestämt gränsvärde. Då kan detta gränsvärde sättas som värdet av funktionen i de odefinierade punkterna. Se nedan för förklaring.

a) Den oidentifierade punkten är $(x, y) = (0, 0)$. Vad som skall kollas är alltså om det existerar ett gränsvärde då $(x, y) \to 0$. Övergång till polära koordinater

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{\sin r^2}{r^2}$$
$$\left[\begin{cases} t = r^2 \\ r \to 0 \Leftrightarrow t \to 0 \end{cases} \right] = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

Gränsvärdet existerar således och funktionen $f(x, y)$ kan utvidgas till $f_u(x, y)$ (brist på fantasi för notation) som ges av

$$f_u(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

b) För att avgöra am gränsvärdet existerar då $xy \to 0$, sätt $t = xy$. Följaktligen

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t+t^3} = \left[t^3 << t \text{ för } t \to 0 \right] = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

Gränsvärdet existerar och utvidgning är möjlig. Utvidgningen blir precis som i **a)**

$$f_u(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

c) Detta gränsvärde existerar inte. För att övertyga sig själv om detta, studeras uttrycket i polära koordinater. Trigonometriska ettan $\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$ ger

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} = \left[\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases}, \quad (x,y) \to 0 \Leftrightarrow r \to 0 \right] = \lim_{r\to 0} \frac{(r\cos\phi + r\sin\phi)^2}{r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi}$$
$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\phi + 2r^2\cos\phi\sin\phi + r^2\sin^2\phi}{r^2(\cos^2\phi + \sin^2\phi)} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2(1+\frac{1}{2}\sin 2\phi)}{r^2} = 1 + \frac{1}{2}\sin 2\phi,$$

vilket inte är ett entydigt gränsvärde. Utvidgning är därav ej möjlig.

d) Med inspiration från föregående uppgift kan uttrycket skrivas om enligt nedan. Notera att expansionen för $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ är möjlig, men det underlättar att utnyttja att $(a+b)^4 = \big((a+b)^2\big)^2 = (a^2+2ab+b^2)^2$ av skäl som framgår i räkningarna.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^4}{x^2+y^2} = \left[\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases} \quad , \quad (x,y)\to 0 \Leftrightarrow r \to 0 \right] = \lim_{r\to 0} \frac{\big((r\cos\phi + r\sin\phi)^2\big)^2}{r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi}$$
$$= \lim_{r\to 0} \frac{\big(r^2\cos^2\phi + 2r^2\cos\phi\sin\phi + r^2\sin^2\phi\big)^2}{r^2(\cos^2\phi+\sin^2\phi)} = \lim_{r\to 0} \frac{r^4(1+\frac{1}{2}\sin 2\phi)^2}{r^2} = \lim_{r\to 0} r^2(1+\frac{1}{2}\sin 2\phi)^2 = 0.$$

Utvigningen $f_u(x,y)$ ges av

$$f_u(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

e) Gränsvärdet för $(x,y)\to(0,0)$ ges av

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} = \lim_{r\to 0} r\cos(\phi) e^{-1/\sqrt{r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi}} = \lim_{r\to 0} r\cos(\phi) e^{-1/\sqrt{r^2}}$$
$$= \lim_{r\to 0} r\cos(\phi) e^{-1/r} = 0,$$

eftersom $\lim_{t\to 0} e^{-1/t} = \lim_{1/t\to\infty} e^{-1/t} = 0$. Utvidgninen är möjlig enligt

$$f_u(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$