Lineär algebra

Markus Bolinder

Juli 2023

Förord

Dessa lösningar hör till Karl Gustav Anderssons bok i linjär algebra, vilket är kurslitteraturen för den kurs som F och Pi läser. Om man går ett annat program, som använder annan kurslitteratur för sina ändamål i linjär algebra, kommer alltså detta dokument vara någorlunda förvirrande. Anledningen till att PDF:en har titeln *Lineär algebra*, men att jag annars aldrig stavar med ”e”, är för att för att herr Karl Gustav Andersson valde att titulera sin bok på detta sätt - personligen orsakar stavningen mig fysisk smärta (hyperbol). Som vanligt med denna typ av grejer, kan fel givetvis förekomma, så man får ha det i åtanke. Upplägget är också sådant att kunskap, som man förväntas ta in i tidigare kapitel, är underförstådd i senare kapitel. I kapitel 2 skriver jag uttryckligen Gausseliminationen, men i senare kapitel bara gör jag den, utan att dra större uppmärksamhet till multipler av vilka rader som subtraheras från andra, men, om man gör Gausseliminationen systematisk, bör denna information vara uppenbar.

Innehåll

Kapitel 1

1.1

a)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - \ \ x_3 = 6 \\ 2x_1 - \ \ x_2 + \ \ x_3 = 1 \\ -x_1 + \ \ x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} (2) - 2(1) \\ (3) + (1) \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 - \ \ x_3 = 6 \\ \quad - 5x_2 + 3x_3 = -11 \\ \quad\ \ 3x_2 - 3x_3 = 9 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{bmatrix} 5(3) + 3(2) \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 - \ \ x_3 = 6 \\ \quad - 5x_2 + 3x_3 = -11 \\ \qquad\quad - 6x_3 = 12 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 6 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 = (11 + 3x_3)/5 = 1 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 - \ \ x_2 + 8x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + \ \ x_3 = 8 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} (2) - (1) \\ (3) - 2(1) \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 = 3 \\ \quad - 2x_2 + 6x_3 = -4 \\ \quad\ \ x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{bmatrix} 2(3) + (2) \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 \quad = 3 \\ \quad - 2x_2 + 6x_3 \quad = -4 \\ \qquad\qquad\qquad 0 = 0 \end{cases}$$

Eftersom vi får att $0 = 0$ kan en av variablerna väljas godtyckligt. Låt $x_3 = t$, vi får då

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_2 - 2x_3 = 3 - 2 - 3t - 2t = 1 - 5t \\ x_2 = 2 + 3x_3 = 2 + 3t \\ x_3 = t \end{cases}$$

1.2

a)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - \ \ x_3 = 3 \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} (2) - (1) \\ (3) + 3(1) \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x_1 + \ \ x_2 - 2x_3 = 2 \\ \quad - 2x_2 + \ \ x_3 = 1 \\ \quad\ \ 4x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{bmatrix} (3) + 2(2) \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x_1 + \ \ x_2 - 2x_3 \quad = 2 \\ \quad - 2x_2 + \ \ x_3 \quad = 1 \\ \qquad\qquad\qquad 0 = 6 \end{cases}$$

Detta är en motsägelse, och alltså saknar ekvationssystemet lösning.

b)

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - \ \ x_3 - 3x_4 = 1 \\ 4x_1 - \ \ x_2 + 5x_3 + \ \ x_4 = 9 \\ 3x_1 + 8x_2 - 5x_3 - 8x_4 = -2 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} (2) - 2(1) \\ (3) - 4(1) \\ (4) - 3(1) \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 7x_2 - 7x_3 - 7x_4 = -7 \\ 7x_2 - 7x_3 - 7x_4 = -7 \\ 14x_2 - 14x_3 - 14x_4 = -14 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_2 - x_3 - x_4 = -1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{bmatrix} (3) - (2) \\ (4) - (2) \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Här är vårt ekvationssystem oberoende av två variabler, och vi inför därför två parametrar: $x_3 = s$, $x_4 = t$. Detta ger oss lösningen

$$\begin{cases} x_1 = 4 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 4 - 2 + 2s + 2t - 3s - 2t = 2 - s \\ x_2 = -1 + x_3 + x_4 = -1 + s + t \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases}$$

1.3

a)

$$\begin{cases} ax_1 + (a-1)x_2 + (a-2)x_3 = 0 \\ (a-3)x_2 + (a-4)x_3 = 1 \\ (a-5)x_3 = 0 \end{cases}$$

Ekvationssystemet är redan Gausseliminerat, så vi behöver i stort sett bara tänka lite för att komma fram till svaret. Om vi får $0 = 0$ någonstans kommer vi att ha oändligt med lösningar, men om vi skulle ha $0 = 1$ (eller något annat tal i högerledet) saknar ekvationssystemet lösningar. Man ser direkt att om $a \neq 0, 1, 2, 3, 4, 5$, så kommer det att finnas en entydig lösning till ekvationssystemet. Vidare märker man att om $a = 5$ kommer vi att få $0 = 0$ i den tredje ekvationen, och alltså finns det då oändligt med lösningar. Eftersom vi har ett inhomogent högerled i den andra ekvationen, men ett homogent i den tredje, kan vi eliminera x_2-termen från den andra ekvationen och få fram att x_3 båda ska, och inte ska, vara skilt från 0. Alltså om $a = 3$ får vi

$$\begin{cases} -x_3 = 1 \\ -2x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_3 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

vilket uppenbarligen inte går. Man ser också att för $a = 2$, eller $a = 4$, kommer man att få en entydig lösning eftersom x_3 fortfarande kan bestämmas ur den sista ekvationen, så vi förlorar ingen information. På samma sätt kan $a = 2$, eftersom vi kan ta reda på x_2:s värde ur den andra ekvationen. Detta lämnar bara $a = 0$, och man kanske tycker att det inte är särskilt uppenbart om ekvationssystemet kommer att sakna lösning, eller ha oändligt med lösningar, (dock bör man tycka det mot slutet av kursen) så vi sätter in $a = 0$ och undersöker systemet som uppstår.

$$\begin{cases} -x_2 - 2x_3 = 0 \\ -3x_2 - 4x_3 = 1 \\ -5x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_2 = 1/3 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Vi märker nu att lösning saknas.

b)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + 2x_3 = -1 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} (2) - (1) \\ (3) - (1) \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + \qquad x_2 + \qquad x_3 = 0 \\ \qquad\qquad x_2 + (a-1)x_3 = 1 \\ \qquad (a-1)x_2 + \qquad x_3 = -1 \end{cases} \iff \big[(3) - (a-1)(2)\big] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + x_2 + \qquad\qquad x_3 = 0 \\ \qquad x_2 + \qquad (a-1)x_3 = 1 \\ \qquad\qquad (1-(a-1)^2)x_3 = -1-(a-1) \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + x_2 + \qquad\qquad x_3 = 0 \\ \qquad x_2 + \qquad (a-1)x_3 = 1 \\ \qquad\qquad (1-(a^2-2a+1))x_3 = -a \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + x_2 + \qquad x_3 = 0 \\ \qquad x_2 + \quad (a-1)x_3 = 1 \\ \qquad\qquad (2a-a^2)x_3 = -a \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + \qquad x_3 = 0 \\ \qquad x_2 + \quad (a-1)x_3 = 1 \\ \qquad\qquad a(a-2)x_3 = a \end{cases}$$

Vi ser nu att det finns en entydig lösning för alla $a \neq 0, 1, 2$, och efter en liten fundering inser man att $a = 1$ också ger en entydig lösning (jämför med resonemang i föregående deluppgift). Detta lämnar $a = 0$ och $a = 2$.

$$\underline{a = 0}: \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 0 \\ \qquad x_2 - x_3 \qquad = 1 \\ \qquad\qquad 0 = 0 \end{cases}$$

Eftersom vi har en situation med $0 = 0$ kommer det finnas oändligt med lösningar då $a = 0$.

$$\underline{a = 2}: \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 0 \\ \qquad x_2 + x_3 \qquad = 1 \\ \qquad\qquad 0 = 2 \end{cases}$$

Nu är det istället en orimlighet i den tredje ekvationen, och alltså saknas det lösning.

Kapitel 2

2.1

Om A är mittpunkten på sidan PQ, B är mittpunkten på sidan QR, och C är mittpunkten på sidan RP, så kan vi med mittpunktsformeln skriva

$$\overline{OA} = \frac{1}{2}(\overline{OP} + \overline{OQ}),$$

$$\overline{OB} = \frac{1}{2}(\overline{OQ} + \overline{OR}),$$

$$\overline{OC} = \frac{1}{2}(\overline{OR} + \overline{OP}),$$

vilket betyder att

$$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \frac{1}{2}(\overline{OP} + \overline{OQ}) + \frac{1}{2}(\overline{OQ} + \overline{OR}) + \frac{1}{2}(\overline{OR} + \overline{OP}) = \overline{OP} + \overline{OQ} + \overline{OR}. \quad \square$$

2.2

Om N är tyngdpunkten i triangeln PQR, så vet vi (definitionsmässigt) att

$$\overline{ON} = \frac{1}{3}(\overline{OP} + \overline{OQ} + \overline{OR}) \iff 3\,\overline{ON} = \overline{OP} + \overline{OQ} + \overline{OR}.$$

Vidare kan vi skriva om ortsvektorerna $\overline{NP}$, $\overline{NQ}$, och $\overline{NR}$ enligt följande:

$$\overline{NP} = \overline{OP} - \overline{ON},$$

$$\overline{NQ} = \overline{OQ} - \overline{ON},$$

$$\overline{NR} = \overline{OR} - \overline{ON},$$

och med hjälp av detta kan vi skriva

$$\overline{NP} + \overline{NQ} + \overline{NR} = \overline{OP} - \overline{ON} + \overline{OQ} - \overline{ON} + \overline{OR} - \overline{ON} = \overline{OP} + \overline{OQ} + \overline{OR} - 3\,\overline{ON} = \mathbf{0}. \quad \square$$

2.3

Att man kan bilda en triangel av tre ortsvektorer är ekvivalent med att säga att deras summa är $\mathbf{0}$ (eftersom om man lägger ihop tre räta linjer och slutar där man startar måste man ha bildat en triangel). Vi vill alltså visa att

$$\overline{AA}_1 + \overline{BB}_1 + \overline{CC}_1 = \mathbf{0}.$$

Ur uppgiftsbeskrivningen kan vi använda mittpunktsformeln för att skriva

$$\overline{OA}_1 = \frac{1}{2}(\overline{OB} + \overline{OC}),$$

$$\overline{OB}_1 = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OC}),$$

$$\overline{OC}_1 = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB}),$$

och på samma sätt som i föregående uppgift kan vi också skriva

$$\overline{AA}_1 = \overline{OA}_1 - \overline{OA},$$
$$\overline{BB}_1 = \overline{OB}_1 - \overline{OB},$$
$$\overline{CC}_1 = \overline{OC}_1 - \overline{OC}.$$

Med detta kan vi först konstatera att

$$\overline{OA}_1 + \overline{OB}_1 + \overline{OC}_1 = \frac{1}{2}(\overline{OB} + \overline{OC}) + \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OC}) + \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB}) = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC},$$

och sedan tittar vi på summan som vi vill undersöka:

$$\overline{AA}_1 + \overline{BB}_1 + \overline{CC}_1 = \overline{OA}_1 - \overline{OA} + \overline{OB}_1 - \overline{OB} + \overline{OC}_1 - \overline{OC} =$$
$$= \overline{OA}_1 + \overline{OB}_1 + \overline{OC}_1 - (\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}) = \mathbf{0}. \quad \square$$

2.4

För varje hörn i tetraedern är den motstående sidan en triangel, vars tyngdpunkt vi är välbekanta med. Låt $\overline{OP} = \mathbf{u}$, $\overline{OQ} = \mathbf{v}$, $\overline{OR} = \mathbf{w}$, och $\overline{OS} = \mathbf{z}$. Låt också tyngdpunkten för triangeln QRS betecknas med N_1, tyngdpunkten för triangeln PRS betecknas med N_2, tyngdpunkten för triangeln PQS betecknas med N_3, och tyngdpunkten för triangeln PQR betecknas med N_4. Detta betyder att tyngdpunkten kan skrivas

$$\overline{OT} = \frac{1}{4}(\overline{OP} + \overline{OQ} + \overline{OR} + \overline{OS}) = \frac{1}{4}(\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{z}),$$

och $\overline{ON}_1 = \frac{1}{3}(\mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{z})$ och så vidare. Medianerna ges nu av

$$\overline{PN}_1 = \overline{ON}_1 - \overline{OP} = \frac{1}{3}(\mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{z}) - \mathbf{u} = \frac{1}{3}(\mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{z} - 3\mathbf{u}),$$
$$\overline{QN}_2 = \overline{ON}_2 - \overline{OQ} = \frac{1}{3}(\mathbf{u} + \mathbf{w} + \mathbf{z}) - \mathbf{v} = \frac{1}{3}(\mathbf{u} + \mathbf{w} + \mathbf{z} - 3\mathbf{v}),$$
$$\overline{RN}_3 = \overline{ON}_3 - \overline{OR} = \frac{1}{3}(\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{z}) - \mathbf{w} = \frac{1}{3}(\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{z} - 3\mathbf{w}),$$
$$\overline{SN}_4 = \overline{ON}_4 - \overline{OS} = \frac{1}{3}(\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}) - \mathbf{z} = \frac{1}{3}(\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} - 3\mathbf{z}),$$

och vidare är

$$\overline{PT} = \overline{OT} - \overline{OP} = \frac{1}{4}(\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{z}) - \mathbf{u} = \frac{1}{4}(-3\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{z}) = \frac{3}{4}\overline{PN}_1,$$
$$\overline{QT} = \overline{OT} - \overline{OQ} = \frac{1}{4}(\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{z}) - \mathbf{v} = \frac{1}{4}(\mathbf{u} - 3\mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{z}) = \frac{3}{4}\overline{QN}_2,$$
$$\overline{RT} = \overline{OT} - \overline{OR} = \frac{1}{4}(\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{z}) - \mathbf{w} = \frac{1}{4}(\mathbf{u} + \mathbf{v} - 3\mathbf{w} + \mathbf{z}) = \frac{3}{4}\overline{RN}_3,$$
$$\overline{ST} = \overline{OT} - \overline{OS} = \frac{1}{4}(\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{z}) - \mathbf{z} = \frac{1}{4}(\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} - 3\mathbf{z}) = \frac{3}{4}\overline{SN}_4.$$

Detta visar att T ligger på samtliga medianer i och delar dem i förhållandet 3 till 1, vilket betyder att medianerna skär varandra i denna punkt. Man hade kunnat använda samma symmetriargument som för triangeln, och bara tittat på en av medianerna, men det var lätt att använda ctrl + c och ctrl + v för att göra detta. $\square$

2.5

Mittpunktsformeln:

$$\overline{OM} = \frac{1}{2}(\overline{OP} + \overline{OQ}),$$

där M är mittpunkten på sträckan PQ.

$$\overline{OA} = \frac{1}{2}\overline{OP} = \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 = (1/2, 0, 0),$$

$$\overline{OB} = \frac{1}{2}(\overline{OQ} + \overline{OR}) = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = (0, 1/2, 1/2),$$

$$\overline{OC} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB}) = \frac{1}{2}\big((1/2, 0, 0) + (0, 1/2, 1/2)\big) = (1/4, 1/4, 1/4).$$

2.6

Om vi kan skriva $\mathbf{v}$ som en linjärkombination av $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$, så har vi visat att de ligger i samma plan. Skriv $\mathbf{v} = s_1\mathbf{u}_1 + s_2\mathbf{u}_2$. Att lösa detta ekvationssystem visar påståendet och dessutom kommer s_1 och s_2 att vara koordinaterna för $\mathbf{v}$ i basen $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$.

$$s_1\mathbf{u}_1 + s_2\mathbf{u}_2 = \mathbf{v} \iff s_1(2, -1, 3) + s_2(1, 1, 2) = (2, -7, 1) \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2s_1 + s_2 = 2 \\ -s_1 + s_2 = -7 \\ 3s_1 + 2s_2 = 1 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 2(2) + (1) \\ 2(3) - 3(1) \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 2s_1 + s_2 = 2 \\ 3s_2 = -12 \\ s_2 = -4 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} s_1 = (2 - s_2)/2 = 3 \\ s_2 = -4 \\ s_2 = -4 \end{cases} \qquad \square$$

Tacksamt nog fick vi samma värde på s_2 i det överbestämda ekvationssystemet. Vi kan nu skriva

$$\mathbf{v} = 3\mathbf{u}_1 - 4\mathbf{u}_2.$$

2.7

Vektorerna ($\mathbf{u}_1 = (1, -2, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (2, -1, -1)$, $\mathbf{u}_3 = (-1, -4, 5)$) ligger i samma plan om de är linjärt beroende, vilket betyder att ekvationssystemet $s_1\mathbf{u}_1 + s_2\mathbf{u}_2 + s_3\mathbf{u}_3 = 0$ har oändligt med lösningar.

$$s_1\mathbf{u}_1 + s_2\mathbf{u}_2 + s_3\mathbf{u}_3 = 0 \iff s_1(1, -2, 1) + s_2(2, -1, -1) + s_3(-1, -4, 5) = 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} s_1 + 2s_2 - s_3 = 0 \\ -2s_1 - s_2 - 4s_3 = 0 \\ s_1 - s_2 + 5s_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} (2) + 2(1) \\ (3) - (1) \end{bmatrix} \iff \begin{cases} s_1 + 2s_2 - s_3 = 0 \\ 3s_2 - 6s_3 = 0 \\ -3s_2 + 6s_3 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \big[(3) + (2)\big] \iff \begin{cases} s_1 + 2s_2 - s_3 = 0 \\ 3s_2 - 6s_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Detta indikerar att ekvationssystemet har oändligt med lösningar ($0 = 0$), och alltså är vektorerna linjärt beroende och ligger i samma plan.

2.8

För att de ska kunna bilda en bas i rummet måste de vara linjärt oberoende, vilket innebär att ekvationssystemet $s_1\mathbf{u}_1+s_2\mathbf{u}_2+s_3\mathbf{u}_3=0$ kan endast ha den triviala lösningen $s_1=s_2=s_3=0$. Låt $\mathbf{u}_1=(1,1,2)$, $\mathbf{u}_2=(4,4,9)$, $\mathbf{u}_3=(2,3,7)$.

$$s_1\mathbf{u}_1+s_2\mathbf{u}_2+s_3\mathbf{u}_3=0 \iff \begin{cases} s_1+4s_2+2s_3=0 \\ s_1+4s_2+3s_3=0 \\ 2s_1+9s_2+7s_3=0 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} (2)-(1) \\ (3)-2(1) \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} s_1+4s_2+2s_3=0 \\ s_3=0 \\ s_2+3s_3=0 \end{cases} \iff s_1=s_2=s_3=0. \quad \square$$

Koordinaterna ges av att lösa ekvationssystemet, om $\mathbf{v}=(5,4,3)$,

$$s_1\mathbf{u}_1+s_2\mathbf{u}_2+s_3\mathbf{u}_3=\mathbf{v} \iff \begin{cases} s_1+4s_2+2s_3=5 \\ s_1+4s_2+3s_3=4 \\ 2s_1+9s_2+7s_3=3 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} (2)-(1) \\ (3)-2(1) \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} s_1+4s_2+2s_3=5 \\ s_3=-1 \\ s_2+3s_3=-7 \end{cases} \iff \begin{cases} s_1=5-4s_2-2s_3=23 \\ s_2=-7-3s_3=-4 \\ s_3=-1 \end{cases}$$

Alltså är $\mathbf{v}=23\mathbf{u}_1-4\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_3$.

2.9

Vi gör som ovan och betraktar när ekvationssystemet $s_1\mathbf{u}_1+s_2\mathbf{u}_2+s_3\mathbf{u}_3=0$ (eller $s_1\mathbf{u}_1+s_2\mathbf{u}_2=0$) har oändligt med lösningar.

a)

$$s_1(2,2,2)+s_2(k,k^3,k^5)=0 \iff \begin{cases} 2s_1+\ ks_2=0 \\ 2s_1+k^3s_2=0 \\ 2s_1+k^5s_2=0 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} (2)-(1) \\ (3)-(1) \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2s_1+ks_2=0 \\ (k^3-k)s_2=0 \\ (k^5-k)s_2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2s_1+ks_2=0 \\ k(k^2-1)s_2=0 \\ k(k^4-1)s_2=0 \end{cases}$$

För att det ska finnas oändligt med lösningar måste koefficienterna i andra och tredje ekvationen vara 0, detta ger oss det nya ekvationssystemet

$$\begin{cases} k(k^2-1)=0 \\ k(k^4-1)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} k(k-1)(k+1)=0 \\ k(k-1)(k+1)(k^2+1)=0 \end{cases}$$

Ur detta ser vi att $k=0,1,-1$ fungerar finfint, vilket då är vårt svar.

b)

$$s_1(1,1,1)+s_2(1,k,2k)+s_3(k,1,k)=0 \iff \begin{cases} s_1 + \quad s_2 + ks_3 = 0 \\ s_1 + \quad ks_2 + \quad s_3 = 0 \\ s_1 + 2ks_2 + ks_3 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{bmatrix} (2)-(1) \\ (3)-(1) \end{bmatrix} \iff \begin{cases} s_1 + \quad s_2 + \quad ks_3 = 0 \\ (k-1)s_2 \quad = 0 \\ (2k-1)s_2 + (k-1)s_3 = 0 \end{cases}$$

Här ser vi att om $k=1$ eller $k=1/2$ kommer vi att få $0=0$ och alltså oändligt med lösningar, vilket betyder att vektorerna blir linjärt beroende.

c)

$$s_1(1,-1,-k)+s_2(2,k,4)+s_3(k,2,-4)=0 \iff \begin{cases} s_1 + 2s_2 + ks_3 = 0 \\ -s_1 + ks_2 + 2s_3 = 0 \\ -ks_1 + 4s_2 - 4s_3 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{bmatrix} (2)+(1) \\ (3)+k(1) \end{bmatrix} \iff \begin{cases} s_1 + \quad 2s_2 + \quad ks_3 = 0 \\ (k+2)s_2 + \quad (2+k)s_3 = 0 \\ (4+2k)s_2 + (-4+k^2)s_3 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} s_1 + \quad 2s_2 + \quad ks_3 = 0 \\ (k+2)s_2 + \quad (k+2)s_3 = 0 \\ 2(k+2)s_2 + (k-2)(k+2)s_3 = 0 \end{cases} \iff \big[(3)-2(2)\big] \iff$$

$$\iff \begin{cases} s_1 + \quad 2s_2 + \quad ks_3 = 0 \\ (k+2)s_2 + \quad (k+2)s_3 = 0 \\ (k+2)\big((k-2)-2\big)s_3 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} s_1 + \quad 2s_2 + \quad ks_3 = 0 \\ (k+2)s_2 + \quad (k+2)s_3 = 0 \\ (k+2)(k-4)s_3 = 0 \end{cases}$$

Detta ekvationssystem indikerar att $k=-2$ eller $k=4$ ger oss linjärt beroende vektorer.

2.10

Vi börjar med att bilda en riktningsvektor:

$$\mathbf{v} = (2,3,5)-(1,-1,4) = (1,4,1).$$

Vi vet också att punkten $(1, -1, 4)$ ska ligga på linjen, vilket betyder att linjen kan skrivas som

$$(x, y, z) = (1, -1, 4) + t\mathbf{v} \iff \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 4t \\ z = 4 + t. \end{cases}$$

2.11

Huruvida linjerna är parallella kan man direkt avgöra genom att betrakta riktningsvektorerna, om de är linjärt beroende så är linjerna parallella. Här har vi riktningsvektorerna $(1, -1, 2)$ och $(2, 1, 1)$ (koefficienterna till parametern t), men det är uppenbart att de inte är linjärt beroende, och därmed inte parallella. För att hitta en eventuell skärning sätter vi koordinaterna lika med varandra, men vi måste skilja på parametrarna i linjerna (eftersom det inte är nödvändigtvis att en skärningspunkt hade beskrivits av samma parametervärde).

$$\begin{cases} 2 + t_1 &= 1 + 2t_2 \\ 1 - t_1 &= t_2 \\ 2t_1 &= -1 + t_2 \end{cases} \iff \begin{cases} t_1 - 2t_2 = -1 \\ t_1 + \ \ t_2 = 1 \\ 2t_1 - \ \ t_2 = -1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{bmatrix} (2) - (1) \\ (3) - 2(1) \end{bmatrix} \iff \begin{cases} t_1 - 2t_2 = -1 \\ \qquad 3t_2 = 2 \\ \qquad 3t_2 = 1 \end{cases}$$

Eftersom t_2 får olika värden skär linjerna inte varandra (ekvationssystemet saknar lösning).

2.12

Analogt till föregående uppgift:

$$\begin{cases} 1 + 15t_1 &= 6 - 65t_2 \\ -4 - 21t_1 &= -11 + 91t_2 \\ 5 + 33t_1 &= 16 - 143t_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 15t_1 + \ \ 65t_2 = 5 \\ 21t_1 + \ \ 91t_2 = 7 \\ 33t_1 + 143t_2 = 11 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 3t_1 + 13t_2 = 1 \\ 3t_1 + 13t_2 = 1 \\ 3t_1 + 13t_2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 3t_1 + 13t_2 \qquad = 1 \\ \qquad\qquad\qquad 0 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad 0 = 0 \end{cases}$$

Rent spontant tycker jag att det ser ut som att detta ekvationssystemet har några lösningar, vilket betyder att linjerna skär varandra. Eftersom vi får oändligt med lösningarna sammanfaller linjerna (om man multiplicerar riktningsvektorn för den andra linjen med $3/13$ får man den första linjens riktningsvektor och alltså är de linjärt beroende (dock betyder det inte nödvändigtvis att linjerna sammanfaller, bara att de är parallella, för att kontrollera om de sammanfaller måste man hitta minst en punkt som finns på båda linjerna)).

2.13

Vi vet att den okända linjen måste passera genom $(3, 2, -1)$, och alltså kan vi skriva den på följande form:

$$\begin{cases} x = 3 + t_1 \\ y = 2 + at_1 \\ z = -1 + bt_1, \end{cases}$$

där $(1, a, b)$ är linjens riktningsvektor (genom att skala om en eventuell riktningsvektor kan man enkelt få så att den första koordinaten är 1). Vi bestämmer nu godtyckliga skärningspunkter med för dem givna linjerna:

$$\begin{cases} 3 + t_1 & = 1 + t_2 \\ 2 + at_1 & = t_2 \\ -1 + bt_1 & = -1 + t_2 \end{cases} \iff \begin{cases} t_1 - t_2 = -2 \\ at_1 - t_2 = -2 \\ bt_1 - t_2 = 0 \end{cases}$$

Här ser vi att det enda som skiljer den första och andra ekvationen är koefficienten a framför t_1-termen. Detta betyder att vi måste välja $a = 1$, eftersom vi annars antingen kommer att få oändligt med lösningar, eller inga lösningar alls. På samma sätt är koefficienten b det enda som skiljer vänsterledet i tredje ekvationen från dem andra två, men eftersom högerledet är annorlunda måste vi kräva att $b \neq 1$, eftersom vi annars kommer att få ett system som saknar lösning. Det gäller att för alla $b \neq 1$ finns det nu en entydig lösning till systemet, vilket betyder att vi fortsätter med att titta på den andra linjen som är given i uppgiften. Tänk på att vår riktningsvektor nu är $(1, a, b) = (1, 1, b)$.

$$\begin{cases} 3 + t_1 & = 10 + 5t_3 \\ 2 + t_1 & = 5 + t_3 \\ -1 + bt_1 & = 2 + 2t_3 \end{cases} \iff \begin{cases} t_1 - 5t_3 = 7 \\ t_1 - \ \ t_3 = 3 \\ bt_1 - 2t_3 = 3 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} (2) - (1) \\ (3) - b(1) \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} t_1 - \qquad 5t_3 = 7 \\ \qquad\quad 4t_3 = -4 \\ \quad (-2 + 5b)t_3 = 3 - 7b \end{cases} \iff \begin{cases} t_1 - 5t_3 = 7 \\ \qquad t_3 = -1 \\ \qquad t_3 = (3 - 7b)/(5b - 2) \end{cases}$$

För att detta system ska ha en (entydig) lösning måste

$$\frac{3 - 7b}{5b - 2} = -1 \implies 3 - 7b = 2 - 5b \implies 2b = 1 \implies b = \frac{1}{2}.$$

Detta ger oss slutligen riktningsvektorn $(1, 1, 1/2)||(2, 2, 1)$ (eftersom vi gillar heltal). Om man vill kan man kontrollera att linjen nu faktiskt skär dem två andra linjerna, men jag nöjer mig med att skriva ner linjens ekvation på parameterform:

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 + t. \end{cases}$$

Om man byter ut t med $t + 1$ får man det som står i facit. Det finns säkert ett bättre sätt att lösa denna uppgift, men detta duger för mig eftersom det gav rätt svar.

2.14

För att ange ett plan på parameterform behövs två riktningsvektorer samt en punkt som ligger i planet. Detta kan vi enkelt bilda med tre punkter.

$$\mathbf{v}_1 = (1,5,2) - (2,3,0) = (-1,2,2),$$

$$\mathbf{v}_2 = (-1,4,3) - (2,3,0) = (-3,1,3).$$

Planet ges nu av

$$(x,y,z) = (2,3,0) + s\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2 \iff \begin{cases} x = 2 - s - 3t \\ y = 3 + 2s + t \\ z = \phantom{3 + {}} 2s + 3t. \end{cases}$$

2.15

För att kontrollera detta kan man antingen konstruera ett plan med tre av punkterna, eller konstruera tre vektorer med alla fyra punkter och sedan undersöka om vektorerna är linjärt beroende. Jag tänker undersöka linjärt beroende.

$$\mathbf{u}_1 = (0,4,1) - (-1,-1,0) = (1,5,1),$$

$$\mathbf{u}_2 = (1,0,-1) - (-1,-1,0) = (2,1,-1),$$

$$\mathbf{u}_3 = (1,-3,-2) - (-1,-1,0) = (2,-2,-2).$$

Vi ska nu undersöka om ekvationen $s_1\mathbf{u}_1 + s_2\mathbf{u}_2 + s_3\mathbf{u}_3 = 0$ har oändligt med lösningar.

$$s_1(1,5,1) + s_2(2,1,-1) + s_3(2,-2,-2) = 0 \iff \begin{cases} s_1 + 2s_2 + 2s_3 = 0 \\ 5s_1 + s_2 - 2s_3 = 0 \\ s_1 - s_2 - 2s_3 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{bmatrix} (2) - 5(1) \\ (3) - (1) \end{bmatrix} \iff \begin{cases} s_1 + 2s_2 + 2s_3 = 0 \\ \quad - 9s_2 - 12s_3 = 0 \\ \quad - 3s_2 - 4s_3 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{bmatrix} 3(3) - (2) \end{bmatrix} \iff \begin{cases} s_1 + 2s_2 + 2s_3 = 0 \\ \quad - 9s_2 - 12s_3 = 0 \\ \qquad\qquad 0 = 0 \end{cases}$$

Detta visar linjärt beroende, och alltså är punkterna i samma plan.

2.16

Vi kan nästan direkt skriva planets ekvation på parameterform. Om det är parallellt med en linje, så måste det ha en riktningsvektor som är parallell med linjens riktningsvektor. Alltså kan vi ta $(-5,1,-2)$ som en riktningsvektor. Vidare kan vi bilda den andra genom att bilda vektorn mellan dem två givna punkterna: $(2,0,5) - (1,3,4) = (1,-3,1)$.

Slutligen behöver vi en punkt i planet, och för det kan vi bara ta $(1,3,4)$. Planets ekvation på parameterform blir nu

$$\begin{cases} x = 1 - 5s + t \\ y = 3 + s - 3t \\ z = 4 - 2s + t. \end{cases}$$

För att få det på affin form/normalform eliminerar vi s och t ur parameterrepresentationen med hjälp av Gausseliminering:

$$\begin{cases} x = 1 - 5s + t \\ y = 3 + s - 3t \\ z = 4 - 2s + t \end{cases} \iff \begin{cases} s - 3t = y - 3 \\ -5s + \ \ t = x - 1 \\ -2s + \ \ t = z - 4 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} (2) + 5(1) \\ (3) + 2(1) \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} s - \ \ 3t = y - 3 \\ \ \ - 14t = x - 1 + 5(y - 3) \\ \ \ - \ \ 5t = z - 4 + 2(y - 3) \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 14(3) - 5(2) \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} s - \ \ 3t \quad = y - 3 \\ \ \ - 14t \quad = x + 5y - 16 \\ \qquad\qquad 0 = 14(2y + z - 10) - 5(x + 5y - 16) \end{cases} \implies$$

$$\implies 0 = 14(2y + z - 10) - 5(x + 5y - 16) = 28y + 14z - 140 - 5x - 25y + 80 \iff$$
$$\iff -5x + 3y + 14z - 60 = 0 \iff 5x - 3y - 14z = -60.$$

2.17

Eftersom planet ska innehålla linjen vet vi att en riktningsvektor är $(-1,2,-3)$. Den andra kan vi få genom att ta en godtycklig punkt på linjen, säg $(3,2,1)$, och sedan bilda vektorn mellan den och den givna punkten. Detta ger oss den andra riktningsvektorn $(3,2,1) - (1,-1,2) = (2,3,-1)$. Planets ekvation på parameterform blir nu

$$\begin{cases} x = 3 - t + 2s \\ y = 2 + 2t + 3s \\ z = 1 - 3t - s \end{cases} \iff \begin{cases} -t + 2s = x - 3 \\ \ \ 2t + 3s = y - 2 \\ -3t - \ \ s = z - 1 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} (2) + 2(1) \\ (3) - 3(1) \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -t + 2s = x - 3 \\ \qquad 7s = y - 2 + 2(x - 3) \\ \ \ - 7s = z - 1 - 3(x - 3) \end{cases} \iff \begin{bmatrix} (3) + (2) \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -t + 2s \quad = x - 3 \\ \qquad 7s \quad = 2x + y - 8 \\ \qquad\qquad 0 = -3x + z + 8 + (2x + y - 8) \end{cases} \implies$$

$$\implies 0 = -3x + z + 8 + 2x + y - 8 = -x + y + z \iff x - y - z = 0.$$

2.18

Varje steg går åt båda riktningarna, så jag börjar med förutsättningen att vi har planet $Ax + By + Cz = D$ som är parallellt med riktningsvektorn (a, b, c). Först parametriserar vi planet för att få ut ett par riktningsvektorer från det:

$$Ax + By + Cz = D \iff [y = s,\ z = t] \iff \begin{cases} x = \frac{D}{A} - \frac{B}{A}s - \frac{C}{A}t \\ y = \qquad s \\ z = \qquad\qquad t, \end{cases}$$

ur detta avläser vi riktningsvektorerna

$$\mathbf{v}_1 = (-B/A, 1, 0),\ \mathbf{v}_2 = (-C/A, 0, 1).$$

Låt $\mathbf{v} = (a, b, c)$, då gäller det att $\mathbf{v}$ är parallell med planet om den kan uttryckas som en linjärkombination av riktningsvektorerna, $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$.

$$s_1\mathbf{v}_1 + s_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{v} \iff s_1(-B/A, 1, 0) + s_2(-C/A, 0, 1) = (a, b, c) \iff$$

$$\iff \begin{cases} -\frac{B}{A}s_1 - \frac{C}{A}s_2 = a \\ \quad s_1 \qquad\quad = b \\ \qquad\qquad s_2 = c \end{cases} \iff -\frac{B}{A}b - \frac{C}{A}c = a \iff$$

$$\iff -Bb - Cc = Aa \iff Aa + Bb + Cc = 0. \quad \square$$

2.19

Vi sneglar på den föregående uppgiften och konstaterar att vi kan välja (x, y, z) så att $2x + y - z = 0$ och $3x - 3y + z = 0$ för att få fram våra riktningsvektorer. Eftersom det är en linje beskrivs den av endast en riktningsvektor och således behöver vi en vektor, (x, y, z), som uppfyller båda ekvationerna:

$$\begin{cases} 2x + \ \ y - z = 0 \\ 3x - 3y + z = 0 \end{cases} \iff \big[3(2) - 2(1)\big] \iff \begin{cases} 2x + \ \ y - \ \ z = 0 \\ \quad -9y + 5z = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff [z = 9t] \iff \begin{cases} x = (z - y)/2 = 2t \\ y = 5z/9 = 5t \\ z = 9t. \end{cases}$$

Detta beskriver oändligt många riktningsvektorer, men för enkelhetens skull väljer vi $t = 1$, vilket ger oss riktningsvektorn $(2, 5, 9)$, och eftersom linjen ska gå genom $(1, 2, 4)$ får vi linjen

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 5t \\ z = 4 + 9t. \end{cases}$$

2.20

Eftersom riktningsvektorn, som går genom dem två punkterna vars mittpunkt vi vill ha i vårt plan, inte sammanfaller med linjen som vi också vill ha i planet, måste vi faktiskt bestämma mittpunkten. Den fås snabbt av $\big((3,1,4)+(1,1,2)\big)/2 = (2,1,3)$. För att garantera att denna mittpunkt inkluderas i planet tar vi en punkt från linjen och bildar en riktningsvektor från den till mittpunkten, men först uttrycker vi linjen på parameterform:

$$\begin{cases} 3x+4y+z=5 \\ x-\ \ y\ \ \ \ \ =-6 \end{cases} \iff [y=t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x=-6+y=-6+t \\ y=t \\ z=5-3x-4y=5+18-3t-4t=23-7t. \end{cases}$$

Härur kan vi avläsa en riktningsvektor $(1,1,-7)$. För att få den andra väljer vi punkten då $t=3$, nämligen $(-3,3,2)$, vilket ger oss riktningsvektorn $(-3,3,2)-(2,1,3)=(-5,2,-1)$. Planets ekvation kan nu skrivas som (om vi utgår från linjens ekvation):

$$\begin{cases} x=-6\ +\ t-5s \\ y=\qquad\quad t+2s \\ z=\ 23-7t\ -\ s \end{cases} \iff \begin{cases} t-5s=x+6 \\ t+2s=y \\ -7t-\ \ s=z-23 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} (2)-(1) \\ (3)+7(1) \end{bmatrix} \iff$$

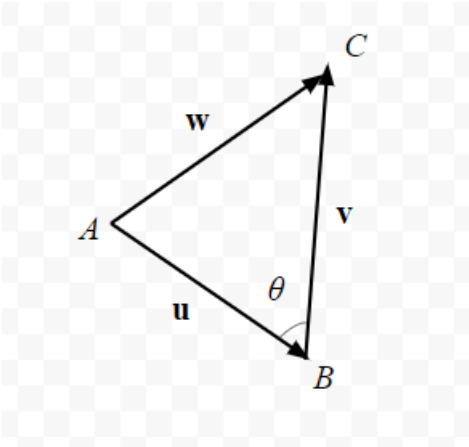
$$\iff \begin{cases} t-\ \ 5s=x+6 \\ \quad 7s=y-(x+6) \\ -36s=z-23+7(x+6) \end{cases} \iff \big[7(3)+36(2)\big] \iff$$

$$\iff \begin{cases} t-5s\qquad =x+6 \\ \quad 7s\qquad =-x+y-6 \\ \qquad\qquad 0=7(7x+z+21)+36(-x+y-6) \end{cases} \implies$$

$$\implies 0=7(7x+z+19)+36(-x+y-6)=$$
$$=49x+7z+133-36x+36y-216=$$
$$=13x+36y+7z-83 \iff 13x+36y+7z=83.$$

Kapitel 3

3.1



Låt $\overline{AB} = \mathbf{u}$, $\overline{BC} = \mathbf{v}$, och $\overline{AC} = \mathbf{w}$ (alltså det som bilden visar). För att vi ska kunna använda skalärproduktens definition med vinkeln θ, måste vi betrakta skalärprodukten

$$(\mathbf{u} \,|\, \mathbf{v}) = -(-\mathbf{u} \,|\, \mathbf{v}) = -|-\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta = -|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta,$$

eftersom vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är något annat som de är definierade nu (vinkeln mellan sidorna AB och BC är samma som vinkeln mellan vektorerna $-\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$). Eftersom ABC är en triangel gäller det att $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, vilket figuren också indikerar. Vi kan nu skriva

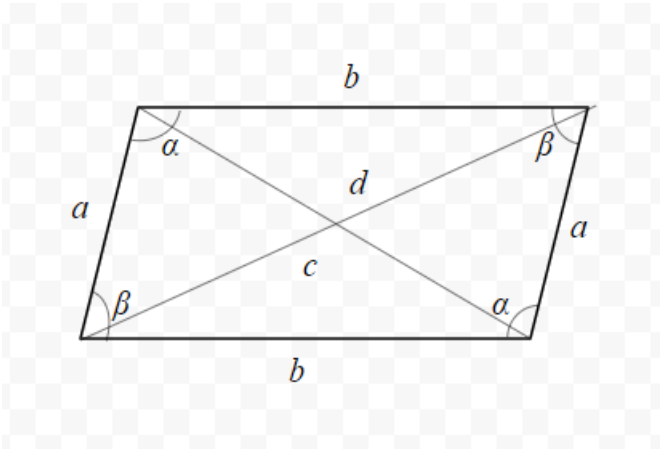
$$|\mathbf{w}|^2 = (\mathbf{w} \,|\, \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v} \,|\, \mathbf{u} + \mathbf{v}) = \underbrace{(\mathbf{u} \,|\, \mathbf{u})}_{=\,|\mathbf{u}|^2} + (\mathbf{u} \,|\, \mathbf{v}) + \underbrace{(\mathbf{v} \,|\, \mathbf{u})}_{=\,(\mathbf{u} \,|\, \mathbf{v})} + \underbrace{(\mathbf{v} \,|\, \mathbf{v})}_{=\,|\mathbf{v}|^2} =$$

$$= |\mathbf{u}|^2 + 2(\mathbf{u} \,|\, \mathbf{v}) + |\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 - 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta + |\mathbf{v}|^2 \iff$$

$$\iff \Big[|\mathbf{u}| = |AB|,\ |\mathbf{v}| = |BC|,\ |\mathbf{w}| = |AC|\Big] \iff$$

$$\iff |AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB||BC|\cos\theta. \quad \square$$

3.2



Med beteckningar från figuren och cosinussatsen i föregående uppgift kan vi skriva

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$$

och

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta.$$

Vidare gäller det att

$$\alpha + \beta + \alpha + \beta = 2\pi \iff \beta = \pi - \alpha \implies \cos\beta = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha,$$

vilket betyder att

$$c^2 + d^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha + a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta = 2a^2 + 2b^2 - 2ab(\cos\alpha + \cos\beta) =$$

$$= 2a^2 + 2b^2 - 2ab(\cos\alpha - \cos\alpha) = 2a^2 + 2b^2. \quad \square$$

3.3

För att ta reda på sidlängderna är det bara att bilda vektorer med hjälp av punkterna, och sedan ta beloppet av dem. För cosinus behöver man tänka lite på hur man väljer sina vektorer. Det lättaste är kanske att utgå från en punkt och sedan bilda två vektorer från den till dem andra två punkterna, ta skalärprodukten och använd definitionen för att lösa ut cosinusvärdet. På detta sätt arbetar man sig successivt igenom alla tre hörn.

$$\mathbf{u}_1 = (0, -1, 1) - (1, 0, 2) = (-1, -1, -1),$$

$$\mathbf{v}_1 = (2, 1, 2) - (1, 0, 2) = (1, 1, 0),$$

vilket ger oss att

$$(\mathbf{u}_1 \,|\, \mathbf{v}_1) = |\mathbf{u}_1||\mathbf{v}_1|\cos\theta_1 \implies \cos\theta_1 = \frac{(\mathbf{u}_1 \,|\, \mathbf{v}_1)}{|\mathbf{u}_1||\mathbf{v}_1|} =$$

$$= \frac{-1\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + (-1)\cdot 0}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2}\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = -\frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{2}} = -\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

För nästa hörn får vi vektorerna

$$\mathbf{u}_2 = (1,0,2) - (0,-1,1) = (1,1,1),$$

$$\mathbf{v}_2 = (2,1,2) - (0,-1,1) = (2,2,1),$$

vilket betyder att

$$\cos\theta_2 = \frac{(\mathbf{u}_2 \,|\, \mathbf{v}_2)}{|\mathbf{u}_2||\mathbf{v}_2|} = \frac{1\cdot 2 + 1\cdot 2 + 1\cdot 1}{\sqrt{3}\sqrt{9}} = \frac{5}{3\sqrt{3}}.$$

Det sista hörnet ger

$$\mathbf{u}_3 = (1,0,2) - (2,1,2) = (-1,-1,0),$$

$$\mathbf{v}_2 = (0,-1,1) - (2,1,2) = (-2,-2,-1),$$

vilket betyder att

$$\cos\theta_3 = \frac{(\mathbf{u}_3 \,|\, \mathbf{v}_3)}{|\mathbf{u}_3||\mathbf{v}_3|} = \frac{2+2+0}{\sqrt{2}\sqrt{9}} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

För sidlängderna kan vi ta tre vektorer, som inte är linjärt beroende, av dem vi har tagit fram här och titta på längden. För detta duger $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{v}_2$, och $\mathbf{u}_3$. Sidlängderna blir

$$|\mathbf{u}_1| = \sqrt{3},$$

$$|\mathbf{v}_2| = 3,$$

$$|\mathbf{u}_3| = \sqrt{2}.$$

3.4

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 \implies$$

$$\implies (\mathbf{u} \,|\, \mathbf{e}_1) = x_1 \text{ (eftersom } |\mathbf{e}_i|^2 = 1),$$

$$(\mathbf{u} \,|\, \mathbf{e}_2) = x_2,$$

$$(\mathbf{u} \,|\, \mathbf{e}_3) = x_3,$$

och dessutom är $(\mathbf{u} \,|\, \mathbf{e}_i) = |u|\cos\theta_i$, vilket betyder att

$$\begin{cases} x_1 = |\mathbf{u}|\cos\theta_1 = |\mathbf{u}|\cos\frac{\pi}{4} = |\mathbf{u}|/\sqrt{2} \\ x_2 = |\mathbf{u}|\cos\theta_2 = |\mathbf{u}|\cos\frac{\pi}{3} = |\mathbf{u}|/2 \\ x_3 = |\mathbf{u}|\cos\theta_3. \end{cases}$$

Vi vet också att

$$|\mathbf{u}|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{4}|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{u}|^2\cos^2\theta_3 = |\mathbf{u}|^2(\frac{3}{4} + \cos^2\theta_3) \implies$$

$$\implies 1 = \frac{3}{4} + \cos^2\theta_3 \implies \cos\theta_3 = \pm\frac{1}{2} \implies \begin{cases} \theta_3 = \pi/3 \\ \theta_3 = 2\pi/3, \end{cases}$$

eftersom $0 \le \theta_3 \le \pi$ får vi endast lösningarna ovan.

3.5

Vi bildar vektorn $\mathbf{u} = (1-t, -4+2t, 3-t) - (1,2,3) = (-t, -6+2t, -t)$, som motsvarar ortsvektorn från en godtycklig punkt på linjen till punkten vi är intresserade av. När denna vektor är ortogonal mot linjens riktningsvektor, $(-1,2,-1)$, så kommer avståndet mellan punkten och linjen vara minimalt. Vi undersöker därför när skalärprodukten är 0.

$$(-t)\cdot(-1) + (-6+2t)\cdot 2 + (-t)\cdot(-1) = 0 \iff 6t - 12 = 0 \iff t = 2.$$

Avståndet kommer nu att ges av längden på vektorn $(-t, -6+2t, -t)$, då $t = 2$.

$$|(-2, -6+2\cdot 2, -2)| = |(-2,-2,-2)| = \sqrt{12}.$$

3.6

Vi bestämmer först linjens ekvation genom att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 5 \\ 2x - \ \ y + \ \ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y - 2z = 5 \\ \ \ -5y + 5z = -10 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y - 2z = 5 \\ \qquad y - \ \ z = 2 \end{cases} \iff [z = t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = 5 - 2y + 2z = 5 - 4 - 2t + 2t = 1 \\ y = 2 + z = 2 + t \\ z = t \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + t \\ z = \qquad t. \end{cases}$$

Eftersom vi söker avståndet till origo är vektorn vi vill minimera samma som linjens ekvation: $(1, 2+t, t)$, och på samma sätt betraktar vi när skalärprodukten med riktningsvektorn, $(0,1,1)$, är 0:

$$1\cdot 0 + (2+t)\cdot 1 + t\cdot 1 = 0 \iff 2 + 2t = 0 \iff t = -1,$$

vilket betyder att punkten vi söker är

$$(1, 2+t, t)|_{t=-1} = (1, 1, -1).$$

3.7

Linjens riktningsvektor kommer att vara en normal till planet, $(2,-3,1)$, så vi kan direkt skriva linjens ekvation, eftersom vi också vet att den ska passera genom punkten $(1,2,3)$, som

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 + \ \ t \end{cases}$$

Vi bildar nu en godtycklig vektor mellan linjen och punkten $(4,5,6)$:

$$(1+2t, 2-3t, 3+t) - (4,5,6) = (-3+2t, -3-3t, -3+t).$$

Återigen vill vi nu veta när denna vektor är ortogonal mot linjens riktningsvektor, varför vi tittar på när skalärprodukten är 0:

$$(-3+2t)\cdot 2+(-3-3t)\cdot(-3)+(-3+t)\cdot 1=0 \iff$$

$$\iff -6+4t+9+9t-3+t=0 \iff 14t=0 \iff t=0.$$

Det kortaste avståndet ges nu av

$$|(-3+2\cdot 0,-3-3\cdot 0,-3+0)|=|(-3,-3,-3)|=3\sqrt{3}.$$

3.8

Eftersom planet ska ha samma avstånd till båda dessa punkter kan vi bilda planets normal genom att bilda ortsvektorn mellan punkterna. Planets normal är alltså parallell med

$$(1,2,0)-(-1,0,2)=(2,2,-2),$$

vi väljer $(1,1,-1)$ som planets normal. För att planet ska få samma avstånd till punkterna måste det innehålla den punkten som ligger mittemellan punkterna, alltså

$$\frac{1}{2}\big((1,2,0)+(-1,0,2)\big)=(0,1,1).$$

På samma sätt som i Exempel 4 får vi planets ekvation

$$1\cdot(x-0)+1\cdot(y-1)+(-1)\cdot(z-1)=0 \iff x+y-z=0.$$

3.9

Normalen till planet är $(3,-4,12)$, och med hjälp av formeln

$$d=\frac{|Ax+By+Cy-D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

kan vi ta reda på punkternas avstånd till planet - (A,B,C) är normalen till planet, och (x,y,z) är den aktuella punkten.

$$\sqrt{A^2+B^2+C^2}=\sqrt{9+16+144}=\sqrt{169}=13.$$

Med detta kan vi nu beräkna avstånden:

$$d_1=\frac{|3\cdot 0-4\cdot 0+12\cdot 0-13|}{13}=1,$$

och

$$d_2=\frac{|3\cdot 2-4\cdot 1+12\cdot 3-13|}{13}=\frac{|6-4+36-13|}{13}=\frac{25}{13}.$$

Huruvida punkterna ligger på samma eller olika sidor om planet avgörs av tecknet på $Ax+By+Cz-D$. För $(0,0,0)$ blev $Ax+By+Cz-D=-13<0$, och för $(2,1,3)$ fick vi att $Ax+By+Cz-D=25>0$. Detta betyder att punkterna ligger på olika sidor om planet.

3.10

a)

Vi får planets riktningsvektorer av att titta på vektorn mellan punkterna, $(2,-2,2)-(2,-3,0)=(0,1,2)$, och genom att ta linjens riktningsvektor, $(1,1,-1)$. Planets ekvation blir nu (eftersom det ska gå genom punkterna $(2,-2,2)$, $(2,-3,0)$)

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2 + s + t \\ z = 2 + 2s - t \end{cases} \iff \begin{cases} t = x-2 \\ t + s = y+2 \\ -t + 2s = z-2 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} t = x-2 \\ s = y+2-(x-2) \\ 2s = z-2+(x-2) \end{cases} \iff \begin{cases} t = x-2 \\ s = -x+y+4 \\ 0 = x+z-4-2(-x+y+4) \end{cases} \implies$$

$$\implies 0 = x+z-4-2(-x+y+4) =$$

$$\iff x+z-4+2x-2y-8 = 3x-2y+z-12 \iff 3x-2y+z=12.$$

b)

Avståndet får vi med den händiga formeln, där $(A,B,C)=(3,-2,1)$, $D=12$, och $(x,y,z)=(3,-1,0)$,

$$d = \frac{|Ax+By+Cy-D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|3\cdot 3 - 2\cdot(-1)+1\cdot 0-12|}{\sqrt{9+4+1}} = \frac{|9+2-12|}{\sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{14}}.$$

3.11

Planets riktningsvektorer är $(1,3,-1)-(1,1,0)=(0,2,-1)$ och $(-1,3,2)-(1,1,0)=(-2,2,2) \parallel (-1,1,1)$, vilket ger oss planets ekvation:

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 2s + t \\ z = -s + t \end{cases} \iff \begin{cases} -t = x-1 \\ t + 2s = y-1 \\ t - s = z \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -t = x-1 \\ 2s = x+y-2 \\ -s = x+z-1 \end{cases} \iff \begin{cases} -t = x-1 \\ 2s = x+y-2 \\ 0 = 2(x+z-1)+(x+y-2) \end{cases} \implies$$

$$\implies 0 = 2(x+z-1)+(x+y-2) = 3x+y+2z-4 \iff 3x+y+2z=4.$$

Vi avläser nu att planet har normalvektorn $(3,1,2)$, som normeras till $\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{14}}(3,1,2)$. För att få fram den punkt i planet som är närmast $(-2,-2,-1)$ tar vi en godtycklig punkt i planet, bildar ortsvektorn från den till $(-2,-2,-1)$, projicerar den på normalvektorn, och subtraherar bort den projicerade vektorn från $(-2,-2,-1)$. Vi vet att punkten

$(1,1,0)$ ligger i planet, vilket ger oss vektorn $\mathbf{u} = (-2,-2,-1) - (1,1,0) = (-3,-3,-1)$. Projektionen blir

$$\mathbf{u}' = (\mathbf{e}\,|\,\mathbf{u})\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{14}}(3\cdot(-3)+1\cdot(-3)+2\cdot(-1))\frac{1}{\sqrt{14}}(3,1,2) = -\frac{14}{14}(3,1,2) = -(3,1,2).$$

Punkten vi söker ges nu av

$$(-2,-2,-1) - \mathbf{u}' = (-2,-2,-1) + (3,1,2) = (1,-1,1).$$

3.12

a)

Vi visar påståendet genom att hitta skärningspunkten:

$$\begin{cases} 1+t_1 &= 3+t_2 \\ 2-t_1 &= 2+t_2 \\ 3+2t_1 &= 2-3t_2 \end{cases} \iff \begin{cases} t_1 - \ \ t_2 = 2 \\ -t_1 - \ \ t_2 = 0 \\ 2t_1 + 3t_2 = -1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} t_1 - \ \ t_2 = 2 \\ \quad -2t_2 = 2 \\ \quad\ \ 5t_2 = -5 \end{cases} \iff \begin{cases} t_1 - t_2 = 2 \\ \quad\ \ t_2 = -1 \\ \quad\ \ t_2 = -1. \end{cases}$$

Eftersom systemet har en entydig lösning skär linjerna varandra i en punkt. □

b)

Vi har riktningsvektorerna $(1,-1,2)$ och $(1,1,-3)$, samt skärningspunkten som fås då $t_2 = -1$ i L_2:s ekvation, alltså $(3-1, 2-1, 2+3) = (2,1,5)$, vilket ger oss planet

$$\begin{cases} x = 2+s+t \\ y = 1-s+t \\ z = 5+2s-3t \end{cases} \iff \begin{cases} s + \ \ t = x-2 \\ -s + \ \ t = y-1 \\ 2s-3t = z-5 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} s + \ \ t = x-2 \\ \quad 2t = x+y-3 \\ -5t = z-5-2(x-2) \end{cases} \iff$$

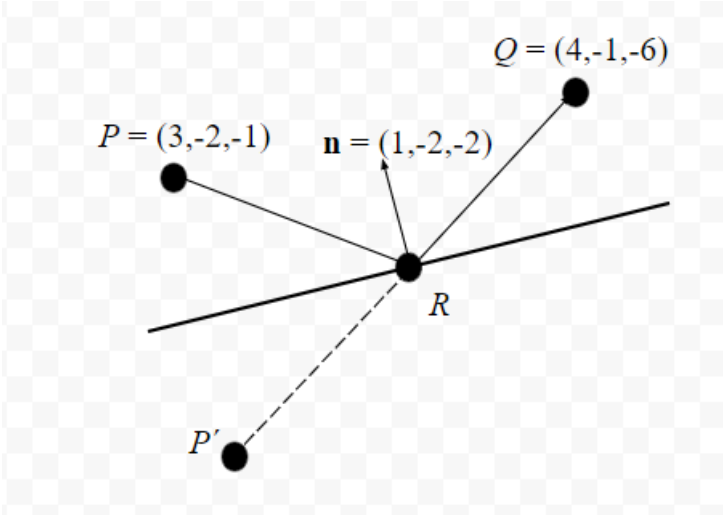
$$\iff \begin{cases} s + \ \ t \quad = x-2 \\ \quad 2t \quad = x+y-3 \\ \qquad 0 = 2(-2x+z-1)+5(x+y-3) \end{cases} \implies$$

$$\implies 0 = 2(-2x+z-1)+5(x+y-3) = -4x+2z-2+5x+5y-15 =$$
$$= x+5y+2z-17 \iff x+5y+2z = 17.$$

Vi får nu avståndet till $(3,4,5)$ av

$$d = \frac{|Ax+By+Cz-D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = [(A,B,C) = (1,5,2),\ D = 17] =$$
$$= \frac{|1\cdot 3+5\cdot 4+2\cdot 5-17|}{\sqrt{1+25+4}} = \frac{3+20+10-17}{\sqrt{30}} = \frac{16}{\sqrt{30}}.$$

3.13



Utöver beteckningarna i bilden, låt $\mathbf{u} = \overline{OP}$. Eftersom planet innehåller origo behöver kan vi välja $(0, 0, 0)$ som vår punkt i planet, vilket betyder att inte behöver tänka till när vi projicerar. Min plan för denna uppgift är att projicera $\mathbf{u}$ på planets normalvektor, låt oss kalla denna projektion för $\mathbf{u}'$, sedan subtrahera 2 gånger projektionen från $\mathbf{u}$, vilket kommer att ge oss ortsvektorn $\overline{OP}'$ (och därmed punkten P'). När vi har den punkten kan vi sedan bilda ortsvektorn $\overline{P'Q}$, som vi kan använda för att bilda en linje som utgår från P'. Därefter tar vi reda på i vilken punkt denna linje skär planet, och eftersom vi vet att den punkten kommer vara R, så kommer det att vara vårt svar. Förhoppningsvis gör figuren denna algoritm lite tydligare. Eftersom normalvektorn $\mathbf{n}$ inte är normerad måste vi kompensera för det i projektionsformeln (vilket görs genom att dela på $(\mathbf{n} \,|\, \mathbf{n})$ (man kan också normera normalvektorn och sedan bara använda $(\mathbf{e} \,|\, u)\mathbf{e}$, där $\mathbf{e}$ är den normerade normalvektorn)). Vi får alltså att

$$\mathbf{u}' = \frac{(\mathbf{n} \,|\, \mathbf{u})}{(\mathbf{n} \,|\, \mathbf{n})}\mathbf{n} = \frac{((1,-2,-2) \,|\, (3,-2,-1))}{((1,-2,-2) \,|\, (1,-2,-2))}(1,-2,-2) =$$

$$= \frac{1 \cdot 3 + (-2) \cdot (-2) + (-2) \cdot (-1)}{1+4+4}(1,-2,-2) = \frac{3+4+2}{9}(1,-2,-2) = (1,-2,-2),$$

vilket betyder att

$$\overline{OP}' = \mathbf{u} - 2\mathbf{u}' = (3,-2,-1) - 2(1,-2,-2) = (1,2,3).$$

Linjens riktningsvektor kommer nu att vara parallell med ortsvektorn

$$\overline{P'Q} = (4,-1,-6) - (1,2,3) = (3,-3,-9),$$

låt oss välja riktningsvektorn $(1,-1,-3)$, vilket ger oss linjen

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 - 3t, \end{cases}$$

för att hitta skärningen med planet sätter vi in linjens ekvation i planets ekvation och löser ut t:

$$x - 2y - 2z = 0 \implies (1+t) - 2(2-t) - 2(3-3t) = 0 \iff -9 + 9t = 0 \iff t = 1,$$

vilket betyder att punkten är

$$(1+1, 2-1, 3-3\cdot 1) = (2,1,0).$$

3.14

a)

Vi kommer att behöva planet som spänns upp av linjerna. Riktningsvektorerna är $(-3,3,1)$ och $(1,1,1)$, och vi konstruerar planet som innehåller den första linjen, det vill säga det plan som går genom origo:

$$\begin{cases} x = s - 3t \\ y = s + 3t \\ z = s + t \end{cases} \iff \begin{cases} s - 3t = x \\ s + 3t = y \\ s + \ \ t = z \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} s - 3t = x \\ \quad 6t = -x + y \\ \quad 4t = -x + z \end{cases} \iff \begin{cases} s - 3t \quad = x \\ \quad 6t \quad = -x + y \\ \qquad 0 = 3(-x+z) - 2(-x+y) \end{cases} \implies$$

$$\implies 0 = 3(-x+z) - 2(-x+y) = -x - 2y + 3z \iff x + 2y - 3z = 0.$$

Nu behöver vi bara bestämma avståndet mellan en godtycklig punkt på den andra linjen och detta plan - eftersom linjerna och planet är parallella har alla punkter samma avstånd. Ta punkten $(-1,0,0)$. Avståndet ges av, eftersom normalvektorn är $(A,B,C) = (1,2,-3)$ och punkten är $(x,y,z) = (-1,0,0)$ (och planet går genom origo, så det finns inget D),

$$d = \frac{|Ax + By + Cz|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|-1+0+0|}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{1}{\sqrt{14}}.$$

b)

Vi använder samma metod som ovan. Riktningsvektorer: $(0,1,1)$ och $(2,3,1)$. Bilda planet som går genom punkten $(1,2,3)$:

$$\begin{cases} x = 1 \ \ + \ \ 2t \\ y = 2 + s + 3t \\ z = 3 + s + t \end{cases} \iff \begin{cases} 2t \quad = x - 1 \\ 3t + s = y - 2 \\ \ \ t + s = z - 3 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2t \quad = x - 1 \\ \quad 2s = 2(y-2) - 3(x-1) \\ \quad 2s = 2(z-3) - (x-1) \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} t & = x-1 \\ \quad s & = -3x+2y-1 \\ & 0 = -x+2z-5-(-3x+2y-1) \end{cases} \implies$$

$$\implies 0 = -x+2z-5-(-3x+2y-1) = 2x-2y+2z-4 \iff x-y+z=2.$$

Alltså är $(A,B,C) = (1,-1,1)$, $D=2$, och vi väljer punkten $(x,y,z) = (1,1,1)$ från den andra linjen. Avståndet blir då

$$d = \frac{|Ax+By+Cz-D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|1-1+1-2|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

3.15

Först bildar vi det plan som innehåller L_1, och spänns upp av linjernas riktningsvektorer, $(-3,-1,1)$ och $(-1,-2,1)$. Detta planet har ekvationen

$$\begin{cases} x = 8-3s-t \\ y = 2-s-2t \\ z = -3+s+t \end{cases} \iff \begin{cases} s+\ \ t = z+3 \\ -3s-\ \ t = x-8 \\ -s-2t = y-2 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} s+\ \ t = z+3 \\ \quad 2t = x-8+3(z+3) \\ -\ \ t = y-2+z+3 \end{cases} \iff \begin{cases} s+\ \ t & = z+3 \\ \quad 2t & = x+3z+1 \\ & 0 = 2(y+z+1)+x+3z+1 \end{cases} \implies$$

$$\implies 0 = 2(y+z+1)+x+3z+1 = x+2y+5z+3 \iff x+2y+5z=-3.$$

Om vi istället skulle bilda planet som innehåller L_2 kommer vi att få planet $x+2y+5z=D$, och, eftersom detta plan ska innehålla punkten $(-12,4,1)$, $D=-12+8+5=1$. Planet som ligger mittemellan dessa två plan kommer alltså att ha en konstant som har medelvärdet av dessa två konstanter, alltså $(-3+1)/2=-1$, vilket betyder att planet vi söker är

$$x+2y+5z=-1.$$

3.16

a)

Vi bildar två riktningsvektorer med punkterna vi har till vårt förfogande:

$$(2,-1,3)-(1,0,2) = (1,-1,1),$$

$$(1,2,-2)-(1,0,2) = (0,2,-4) \mid\mid (0,1,-2),$$

vilket ger oss planet

$$\begin{cases} x = 1+s \\ y = \quad -s+t \\ z = 2+s-2t \end{cases} \iff \begin{cases} s & = x-1 \\ -s+\ \ t & = y \\ s-2t & = z-2 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} s = x-1 \\ t = x+y-1 \\ -2t = -x+z-1 \end{cases} \iff \begin{cases} s = x-1 \\ t = x+y-1 \\ 0 = -x+z-1+2(x+y-1) \end{cases} \implies$$

$$\implies 0 = -x+z-1+2(x+y-1) = x+2y+z-3 \iff x+2y+z = 3.$$

b)

Vinkeln mellan planen är samma som vinkeln mellan normalvektorerna. Vi avläser enkelt att $\mathbf{n}_1 = (1,2,1)$ och $\mathbf{n}_2 = (2,1,-1)$. Med skalärprodukten kan vi bestämma vinkeln:

$$(\mathbf{n}_1 \mid \mathbf{n}_2) = |\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|\cos\theta \implies \cos\theta = \frac{(\mathbf{n}_1 \mid \mathbf{n}_2)}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|} =$$

$$= \frac{1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 1\cdot(-1)}{\sqrt{1+4+1}\sqrt{4+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{6^2}} = \frac{1}{2}.$$

Av geometriska skäl måste $0 \le \theta \le \pi/2$, vilket betyder att $\theta = \pi/3$.

3.17

Vi bestämmer först vinkeln mellan normalvektorn till planet och linjens riktningsvektor. Vinkeln mellan planet och linjen fås sedan av ta $\pi/2$ minus den vinkel vi får fram (se Exempel 7). Normalvektorn avläses till $\mathbf{n} = (1,2,-1)$, och riktningsvektorn ser vi är $\mathbf{v} = (1,1,0)$. Precis som i föregående uppgift kommer vi att få vinkeln mellan dessa vektorer med hjälp av skalärprodukten:

$$\cos\theta = \frac{(\mathbf{n} \mid \mathbf{v})}{|\mathbf{n}||\mathbf{v}|} = \frac{1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 0\cdot(-1)}{\sqrt{1+4+1}\sqrt{1+1+0}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies \theta = \pi/6.$$

Vinkeln vi söker är alltså $\pi/2 - \pi/6 = \pi/3$.

3.18

Linjen som innehåller kanten AB kommer att ha riktningsvektorn $\mathbf{v} = \overline{OB} - \overline{OA} = (1,3,-1) - (-1,2,0) = (2,1,-1)$. Planet som innehåller sidan BCD kommer att spännas upp av riktningsvektorerna $\overline{BC} = \overline{OC} - \overline{OB} = (1,1,0) - (1,3,-1) = (0,-2,1)$ och $\overline{BD} = \overline{OD} - \overline{OB} = (-1,3,-2) - (1,3,-1) = (-2,0,-1)$. Eftersom vi bara är intresserade av planets normalvektor, och linjens riktningsvektor, spelar det ingen roll vilken punkt som vi använder för att bilda planets ekvation, eller linjens ekvation. Av enkelhetsskäl låter jag därför planet passera genom origo, vilket betyder att det har ekvationen

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = -2s \\ z = s-t \end{cases} \iff \begin{cases} s - t = z \\ -2t = x \\ -2s = y \end{cases} \iff \begin{cases} s - t = z \\ -2t = x \\ -2t = y+2z \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} s - t = z \\ -2t = x \\ 0 = -x+y+2z \end{cases} \implies x - y - 2z = 0.$$

Alltså är den sökta normalvektorn $\mathbf{n} = (1, -1, -2)$, vilket betyder att den komplementära vinkeln fås av

$$\cos\theta = \frac{(\mathbf{n}\,|\,\mathbf{v})}{|\mathbf{n}||\mathbf{v}|} = \frac{1\cdot 2 + (-1)\cdot 1 + (-2)\cdot(-1)}{\sqrt{1+1+4}\sqrt{4+1+1}} = \frac{2-1+2}{\sqrt{6^2}} = \frac{1}{2} \implies \theta = \pi/3.$$

Vinkeln vi söker blir då $\pi/2 - \pi/3 = \pi/6$.

3.19

Cirkelns ekvation är

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2,$$

där (x_0, y_0) är medelpunkten och a är radien. Om punkterna $(0, 1)$ och $(0, 9)$ ska ligga på cirkeln måste de uppfylla ekvationen, alltså kräver vi att

$$\begin{cases}(0-x_0)^2 + (1-y_0)^2 = a^2\\(0-x_0)^2 + (9-y_0)^2 = a^2\end{cases} \iff \begin{cases}x_0^2 + (y_0-1)^2 = a^2\\x_0^2 + (y_0-9)^2 = a^2\end{cases} \implies$$

$$\implies x_0^2 + (y_0-1)^2 = x_0^2 + (y_0-9)^2 \iff y_0^2 - 2y_0 + 1 = y_0^2 - 18y_0 + 81 \iff$$
$$\iff 16y_0 = 80 \iff y_0 = 5.$$

Eftersom cirkeln ska tangera x-axeln kan vi direkt säga att $a = 5$ (avståndet från medelpunkten till tangeringspunkten måste ju vara radien, och för en punkt på x-axeln kommer det avståndet att vara $y_0 = 5$). Insättning av detta i ekvationerna ovan ger att

$$\begin{cases}(0-x_0)^2 + (1-5)^2 = 5^2\\(0-x_0)^2 + (9-5)^2 = 5^2\end{cases} \iff \begin{cases}x_0^2 + 16 = 25\\x_0^2 + 16 = 25\end{cases} \iff x_0^2 = 9 \iff x_0 = \pm 3.$$

Medelpunkterna är alltså $(x_0, y_0) = (\pm 3, 5)$.

3.20

a)

$$9x^2 + 25y^2 = 225 \iff \frac{x^2}{225/9} + \frac{y^2}{225/25} = 1 \iff$$
$$\iff \frac{x^2}{(15/3)^2} + \frac{y^2}{(15/5)^2} = 1 \iff \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1,$$

ur detta avläser vi halvaxlarna $a = 5$ och $b = 3$. Eftersom ellipsen har sin medelpunkt i origo bestäms brännpunkterna av $(\pm c, 0)$, där c fås av (som det står i texten)

$$b^2 = a^2 - c^2 \implies c = \underset{(-)}{+}\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4,$$

alltså är brännpunkterna $(\pm 4, 0)$.

b)

$$25x^2 + 169y^2 = 4225 \iff 5^2x^2 + 13^2y^2 = 65^2 \iff$$
$$\iff \frac{5^2}{65^2}x^2 + \frac{13^2}{65^2}y^2 = 1 \iff \frac{x^2}{13^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1,$$

återigen ser vi att $a = 13$ och $b = 5$, vilket betyder att $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{12^2} = 12$, vilket ger oss brännspunkterna $(\pm 12, 0)$.

3.21

Eftersom vi är duktiga studenter har vi läst i boken, och vet då att $b = 2$ (eftersom ellipsen skär y-axlarna i $(0, \pm 2)$) och att $c = 2$ (eftersom brännpunkterna är $(\pm 2, 0)$). Ellipsen har ekvationen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

där vi får a ur

$$b^2 = a^2 - c^2 \implies a = \underset{(-)}{+}\sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}.$$

Detta ger oss ekvationen

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \iff x^2 + 2y^2 = 8.$$

3.22

a)

Vi sätter in linjens ekvation, $t(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t)$, i ellipsens ekvation. För att linjen ska tangera måste ekvationen då ha exakt en lösning.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Insättning, där vi kommer ihåg att (x_0, y_0) ligger på ellipsen,

$$\frac{(x_0 + \alpha t)^2}{a^2} + \frac{(y_0 + \beta)^2}{b^2} = 1 \iff \frac{x_0^2 + 2\alpha x_0 t + \alpha^2 t^2}{a^2} + \frac{y_0^2 + 2\beta y_0 t + \beta^2 t^2}{b^2} = 1 \iff$$

$$\iff 2t\left(\frac{\alpha x_0}{a^2} + \frac{\beta y_0}{b^2}\right) + t^2\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2}\right) + \underbrace{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}}_{=1} = 1 \iff$$

$$\iff 2t\left(\frac{\alpha x_0}{a^2} + \frac{\beta y_0}{b^2}\right) + t^2\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2}\right) = 0.$$

Denna ekvation har en lösning om och endast om koefficienten till t-termen är 0, eftersom koefficienten till t^2 är strängt positiv, alltså om

$$2\left(\frac{\alpha x_0}{a^2} + \frac{\beta y_0}{b^2}\right) = 0 \iff \frac{\alpha x_0}{a^2} + \frac{\beta y_0}{b^2} = 0. \quad \square$$

b)

Vi konstruerar tangentens ekvation genom att utföra variabelbytet

$$\begin{cases} x = ax' \\ y = by' \end{cases} \iff \begin{cases} x' = x/a \\ y' = y/b. \end{cases}$$

Detta omvandlar ellipsen till en cirkel:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \iff \frac{(ax')^2}{a^2} + \frac{(by')^2}{b^2} = 1 \iff (x')^2 + (y')^2 = 1,$$

och punkten (x_0, y_0) som låg på ellipsen flyttas nu till punkten

$$(x_0', y_0') = (x_0/a, y_0/b)$$

som ligger på cirkeln, vilket betyder att $(x_0')^2 + (y_0')^2 = 1$. För att nu ta fram tangentens ekvation noterar vi att radien till cirkeln ges av vektorn

$$(x_0', y_0'),$$

och tangenten kommer att vara ortogonal mot radien, vilket betyder att skalärprodukten är 0. Tangenten har riktningsvektorn (c, d) i den nya basen, vilket ger oss ekvationen

$$((x_0', y_0') \mid (c, d)) \iff cx_0' + dy_0' = 0 \iff [d = t] \iff \begin{cases} c = -dy_0'/x_0' = -y_0't/x_0' \\ d = t. \end{cases}$$

Sätter vi $t = x_0'$ får vi att tangenten har riktningsvektorn $(-y_0, x_0)$, vilket ger oss tangentens ekvation på parameterform

$$(x', y') = (x_0', y_0') + t(-y_0', x_0') \iff$$

$$\iff \begin{cases} -y_0't = x' - x_0' \\ x_0't = y' - y_0' \end{cases} \iff \begin{cases} -x_0'y_0't = x'x_0' - (x_0')^2 \\ x_0'y_0't = y'y_0' - (y_0')^2 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -x_0'y_0't = x'x_0' - (x_0')^2 \\ 0 = y'y_0' - (y_0')^2 + x'x_0' - (x_0')^2 \end{cases} \iff$$

$$\iff 0 = y'y_0' - (y_0')^2 + x'x_0' - (x_0')^2 = x'x_0' + y'y_0' - \big((x_0')^2 + (y_0')^2\big) =$$
$$= x'x_0' + y'y_0' - 1 \iff x'x_0' + y'y_0' = 1.$$

Återgår vi till den ursprungliga basen får vi tangentens ekvation

$$x'x_0' + y'y_0' = 1 \iff \frac{x}{a} \cdot \frac{x_0}{a} + \frac{y}{b} \cdot \frac{y_0}{b} = 1 \iff \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1. \quad \square$$

3.23

Algoritmen för hyperbler är i princip identisk med den för ellipser, det är bara ekvationen som ser lite annorlunda ut. Eftersom hyperblerna i denna uppgift också har sin medelpunkt i origo behöver vi inte anstränga oss mer än det som står i texten.

a)

$$16x^2 - 9y^2 = 144 \iff 4^2x^2 - 3^2y^2 = 12^2 \iff \frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1.$$

Ur detta kan vi se att $a = 3$ och att $b = 4$, vilket betyder att vi får brännpunkterna $((\pm c, 0))$ från sambandet

$$b^2 = c^2 - a^2 \implies c = \underset{(-)}{+}\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

vilket ger oss svaret $(\pm 5, 0)$.

b)

$$3x^2 - 5y^2 = 75 \iff \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{15} = 1 \iff \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{15})^2} = 1.$$

Nu ser vi att $a = 5$ och $b = \sqrt{15}$, vilket ger oss att $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{25 + 15} = \sqrt{40}$, och alltså är brännpunkterna $(\pm\sqrt{40}, 0)$.

3.24

Eftersom hyperbeln skär x-axeln kommer den att ha ekvationen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

och den ska skära x-axeln i punkterna $(\pm 2, 0)$, vilket ger oss

$$\frac{(\pm 2)^2}{a^2} - \frac{0^2}{b^2} = 1 \iff a^2 = 4 \implies a = 2 \ (a > 0).$$

Eftersom brännpunkterna är $(\pm 3, 0)$, kan vi direkt säga att $c = 3$. Vi använder nu sambandet

$$b^2 = c^2 - a^2 = 3^2 - 2^2 = 5,$$

vilket ger oss ekvationen

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1 \iff 5x^2 - 4y^2 = 20.$$

3.25

Att den är symmetrisk med avseende på x-axeln betyder att den kommer att ha en ekvation på formen

$$y^2 = 4ax + b,$$

men eftersom den går genom origo kan vi direkt säga att $b = 0$. Den andra punkten ger oss nu att

$$18^2 = 4a \cdot 27 \iff 4 \cdot 9^2 = 4 \cdot 27a \iff a = \frac{81}{27} = 3.$$

Ekvationen för parabeln blir alltså

$$y^2 = 12x,$$

och, eftersom vi valde att uttrycka ekvationen på det sätt vi gjorde, vet vi att brännpunkten ges av a, alltså $(3, 0)$.

3.26

Vi identifierar andragradskurvorna med den allmänna formen

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F.$$

Om $B \neq 0$ så kommer vi att behöva införa nya koordinater, som motsvarar rotationer i planet, vilket är fallet i a) och b). Den rotation man vill göra bestäms av

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B},$$

men, eftersom $A = C$ i både a) och b), får vi att

$$\cot 2\theta = 0 \iff \frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = 0 \implies \cos 2\theta = 0 \implies 2\theta = \frac{\pi}{2} \iff \theta = \pi/4$$

(detta resultat bör kännas rimligt). Koordinatbytet vi utför är då

$$\begin{cases} x = x' \cos\theta - y' \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\ y = x' \sin\theta + y' \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'). \end{cases}$$

Efter att man har rätt koordinater kvadratkompletterar man tills man erhåller det allmänna uttrycket för en ellips, alltså

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

där halvaxlarna ges av a och b. (Vi kommer lära oss senare att rotationer är isometriska avbildningar, så koordinatbytet kommer inte att påverka längden på halvaxlarna.)

a)

Vi inför koordinaterna som togs fram ovan:

$$17x^2 - 16xy + 17y^2 = 225 \iff \frac{17}{2}(x'-y')^2 - \frac{16}{2}(x'-y')(x'+y') + \frac{17}{2}(x'+y') = 225 \iff$$
$$\iff 17((x')^2 - 2x'y' + (y')^2) - 16((x')^2 - (y')^2) + 17((x')^2 + 2x'y' + (y')^2) = 450 \iff$$
$$\iff 34(x')^2 - 16x^2 + 16(y')^2 + 34(y')^2 = 450 \iff 9(x')^2 + 25(y')^2 = 225 \iff$$
$$\iff \frac{(x')^2}{(15/3)^2} + \frac{(y')^2}{(15/5)^2} = 1 \iff \frac{(x')^2}{5^2} + \frac{(y')^2}{3^2} = 1,$$

varur vi avläser halvaxlarna $a = 5$ och $b = 3$.

b)

Vi nyttjar återigen koordinatbytet:

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 = 8 \iff \frac{3}{2}(x' - y')^2 + \frac{2}{2}(x' - y')(x' + y') + \frac{3}{2}(x' + y')^2 = 8 \iff$$
$$\iff 3((x')^2 - 2x'y' + (y')^2) + 2((x')^2 - (y')^2) + 3((x')^2 + 2x'y' + (y')^2) = 16 \iff$$
$$\iff 6(x')^2 + 6(y')^2 + 2(x')^2 - 2(y')^2 = 16 \iff 8(x')^2 + 4(y')^2 = 16 \iff$$
$$\iff \frac{(x')^2}{2} + \frac{(y')^2}{4} = 1 \iff \frac{(x')^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{(y')^2}{2^2} = 1,$$

vilket berättar för oss att halvaxlarna är $a = \sqrt{2}$ och $b = 2$.

c)

Kvadratkomplettering:

$$0 = 9x^2 + y^2 - 18x + 4y + 4 = 9(x^2 - 2x + 1) - 9 + (y^2 + 4y + 4) = 9(x-1)^2 + (y+2)^2 - 9 \iff$$
$$\iff (x-1)^2 + \frac{(y+2)^2}{9} = 1 \iff \frac{(x-1)^2}{1^2} + \frac{(y+2)^2}{3^2} = 1.$$

Ur detta ser vi att halvaxlarna är $a = 1$ och $b = 3$.

d)

Kvadratkomplettering:

$$0 = 2x^2 + 3y^2 + 12x + 12 = 2(x^2 + 6x + 9) - 18 + 3y^2 + 12 = 2(x+3)^2 + 3y^2 - 6 \iff$$

$$\iff \frac{(x+3)^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1 \iff \frac{(x+3)^2}{(\sqrt{3})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1.$$

Detta ger att $a = \sqrt{3}$ och $b = \sqrt{2}$.

Kapitel 4

4.1

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}=\mathbf{0} \implies \underbrace{\mathbf{u}\times\mathbf{u}}_{=\,0}+\mathbf{u}\times\mathbf{v}+\underbrace{\mathbf{u}\times\mathbf{w}}_{=\,-\mathbf{w}\times\mathbf{u}}=\underbrace{\mathbf{u}\times\mathbf{0}}_{=\,0} \implies$$

$$\implies \mathbf{u}\times\mathbf{v}-\mathbf{w}\times\mathbf{u}=0 \implies \mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{w}\times\mathbf{u},$$

och på samma sätt får vi att

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}=\mathbf{0} \implies \mathbf{v}\times\mathbf{u}+\mathbf{v}\times\mathbf{v}+\mathbf{v}\times\mathbf{w}=\mathbf{v}\times\mathbf{0} \implies$$

$$\implies -\mathbf{u}\times\mathbf{v}+\mathbf{v}\times\mathbf{w}=0 \implies \mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{v}\times\mathbf{w},$$

vilket sammanställt ger oss att

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{v}\times\mathbf{w}=\mathbf{w}\times\mathbf{u}. \quad \square$$

4.2

Metoden går ut på att bilda två vektorer med hjälp av punkterna, beräkna kryssprodukten, och sedan ges arean av triangeln som punkterna utgör av $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|/2$, om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är vektorerna som bildades.

a)

$$\mathbf{u}=(3,4,1)-(1,2,3)=(2,2,-2),$$
$$\mathbf{v}=(2,0,2)-(1,2,3)=(1,-2,-1),$$

vilket betyder att

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=(2\cdot(-1)-(-2)\cdot(-2),-2\cdot 1-2\cdot(-1),2\cdot(-2)-2\cdot 1)=(-6,0,-6).$$

Arean blir då

$$\frac{1}{2}|(-6,0,-6)|=3|(-1,0,-1)|=3\sqrt{2}.$$

b)

$$\mathbf{u}=(2,3,2)-(5,1,1)=(-3,2,1),$$
$$\mathbf{v}=(3,2,3)-(5,1,1)=(-2,1,2),$$

vilket betyder att

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=(2\cdot 2-1\cdot 1,1\cdot(-2)-(-3)\cdot 2,-3\cdot 1-2\cdot(-2))=(3,4,1).$$

Arean blir då

$$\frac{1}{2}|(3,4,1)|=\frac{1}{2}\sqrt{9+16+1}=\sqrt{26}/2.$$

c)

Arean av denna skulle man kunna beräkna utan att använda kryssprodukten, men det orkar jag inte göra.

$$\mathbf{u} = (0,1,0) - (1,0,0) = (-1,1,0),$$
$$\mathbf{v} = (0,0,1) - (1,0,0) = (-1,0,1),$$

vilket betyder att

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (1 \cdot 1 - 0 \cdot 0, 0 \cdot (-1) - (-1) \cdot 1, (-1) \cdot 0 - 1 \cdot (-1)) = (1,1,1).$$

Arean blir då

$$\frac{1}{2}|(1,1,1)| = \sqrt{3}/2.$$

4.3

Vi konstruerar den vektor som är ortogonal mot båda linjerna, normerar den, och projicerar sedan en godtycklig ortsvektor mellan linjerna på vår normerade vektor, och sedan kommer avståndet att ges av beloppet av den skalärprodukten (alltså precis som i Exempel 4). L_2 har riktningsvektorn

$$\mathbf{v}_2 \mid\mid (4,4,4) - (2,2,-4) = (-2,-2,-8) \implies \mathbf{v}_2 = (1,1,4),$$

och L_1 har riktningvektorn

$$\mathbf{v}_1 \mid\mid (41,1,1) - (0,3,3) = (1,-2,-2) \implies \mathbf{v}_1 = (-1,2,2),$$

vilket ger oss den ortogonala vektorn

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (2 \cdot 4 - 2 \cdot 1, 2 \cdot 1 - (-1) \cdot 4, -1 \cdot 1 - 2 \cdot 1) = (6,6,-3) \mid\mid (2,2,-1).$$

Normering ger oss $\mathbf{e} = \frac{1}{3}(2,2,-1)$. En punkt på vardera linje är $P = (1,1,1)$ på L_1 och $Q = (4,4,4)$ på L_2, vilket ger oss ortsvektorn $\overline{PQ} = (4,4,4) - (1,1,1) = (3,3,3)$, vilket betyder att avståndet mellan linjerna ges av beloppet av projektionen av $\overline{PQ}$ på $\mathbf{e}$, alltså av

$$|(\mathbf{e} \,|\, \overline{PQ})| = |(\frac{1}{3}(2,2,-1) \,|\, (3,3,3))| = |((2,2,-1) \,|\, (1,1,1))| = |2+2-1| = 3.$$

4.4

Låt

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1,$$
$$\mathbf{v} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2,$$
$$\mathbf{w} = z_1\mathbf{e}_1 + z_2\mathbf{e}_2 + z_3\mathbf{e}_3,$$

vilket ger oss att

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (x_1\mathbf{e}_1 \times (y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2)) \times \mathbf{w} = (x_1y_1 \underbrace{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1}_{=\,0} + x_1y_2 \underbrace{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}_{=\,\mathbf{e}_3}) \times \mathbf{w} =$$

$$= x_1y_2\mathbf{e}_3 \times (z_1\mathbf{e}_1 + z_2\mathbf{e}_2 + z_3\mathbf{e}_3) = x_1y_2z_1 \underbrace{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1}_{=\,\mathbf{e}_2} + x_1y_2z_2 \underbrace{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2}_{=\,-\mathbf{e}_1} + x_1y_2z_3 \underbrace{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3}_{=\,0} =$$
$$= -x_1y_2z_2\mathbf{e}_1 + x_1y_2z_1\mathbf{e}_2,$$

och

$$(\mathbf{u} \,|\, \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \,|\, \mathbf{w})\mathbf{u} = x_1z_1(y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2) - (y_1z_1 + y_2z_2)x_1\mathbf{e}_1 =$$
$$= (x_1y_1z_1 - x_1y_1z_1 - x_1y_2z_2)\mathbf{e}_1 + x_1y_2z_1\mathbf{e}_2 = -x_1y_2z_2\mathbf{e}_1 + x_1y_2z_1\mathbf{e}_2. \quad \square$$

4.5

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w} = (\mathbf{u}\,|\,\mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v}\,|\,\mathbf{w})\mathbf{u},$$

$$\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = -(\mathbf{v}\times\mathbf{w})\times\mathbf{u} = -\big((\mathbf{v}\,|\,\mathbf{u})\mathbf{w} - (\mathbf{w}\,|\,\mathbf{u})\mathbf{v}\big) = (\mathbf{w}\,|\,\mathbf{u})\mathbf{v} - (\mathbf{v}\,|\,\mathbf{u})\mathbf{w},$$

vilket betyder att om

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w} = \mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) \implies (\mathbf{u}\,|\,\mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v}\,|\,\mathbf{w})\mathbf{u} = \underbrace{(\mathbf{w}\,|\,\mathbf{u})\mathbf{v}}_{=\,(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{w})\mathbf{v}} - (\mathbf{v}\,|\,\mathbf{u})\mathbf{w} \implies$$

$$\implies (\mathbf{v}\,|\,\mathbf{w})\mathbf{u} = (\mathbf{v}\,|\,\mathbf{u})\mathbf{w},$$

denna likhet är uppenbart uppfylld om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{w}$ är ortogonala mot $\mathbf{v}$, eftersom då blir skalärprodukterna 0. Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{w}$ är parallella, kan vi skriva $\mathbf{w} = c\mathbf{u}$, vilket ger oss att

$$(\mathbf{v}\,|\,c\mathbf{u})\mathbf{u} = (\mathbf{v}\,|\,\mathbf{u})(c\mathbf{u}) \implies c(\mathbf{v}\,|\,\mathbf{u})\mathbf{u} = c(\mathbf{v}\,|\,\mathbf{u})\mathbf{u} \implies 0 = 0.$$

Detta visar $\implies$, och om vi nu istället utgår från att den andra sidan (att $\mathbf{u}$ och $\mathbf{w}$ är parallella, eller att de är båda ortogonala mot $\mathbf{v}$) kan vi visa det andra hållet, $\impliedby$. Ovan kom vi fram till att

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w} = (\mathbf{u}\,|\,\mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v}\,|\,\mathbf{w})\mathbf{u}$$

och

$$\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = (\mathbf{u}\,|\,\mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v}\,|\,\mathbf{u})\mathbf{w},$$

om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{w}$ är ortogonala mot $\mathbf{v}$ blir

$$(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v}\,|\,\mathbf{w})\mathbf{u} = (\mathbf{u}\,|\,\mathbf{w})\mathbf{v}$$

och

$$(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v}\,|\,\mathbf{u})\mathbf{w} = (\mathbf{u}\,|\,\mathbf{w})\mathbf{v},$$

allstå är $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w} = \mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$ i detta fall. Om vi istället antar att $\mathbf{u}$ och $\mathbf{w}$ är parallella, kan vi igen skriva $\mathbf{w} = c\mathbf{u}$, vilket ger att

$$(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v}\,|\,\mathbf{w})\mathbf{u} = (\mathbf{u}\,|\,c\mathbf{u})\mathbf{v} - (\mathbf{v}\,|\,c\mathbf{u})\mathbf{u} = c(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{u})\mathbf{v} - c(\mathbf{v}\,|\,\mathbf{u})\mathbf{u}$$

och

$$(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v}\,|\,\mathbf{u})\mathbf{w} = (\mathbf{u}\,|\,c\mathbf{u})\mathbf{v} - (\mathbf{v}\,|\,\mathbf{u})(c\mathbf{u}) = c(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{u})\mathbf{v} - c(\mathbf{v}\,|\,\mathbf{u})\mathbf{u},$$

vilket också visar att $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w} = \mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$, och detta avslutar beviset. $\square$

4.6

$$(x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k)(x_0 - x_1 i - x_2 j - x_3 k) =$$

$$= x_0^2 - x_0x_1 i - x_0x_2 j - x_0x_3 k + x_1 i x_0 - x_1 i x_1 i - x_1 i x_2 j - x_1 i x_3 k +$$

$$+ x_2 j x_0 - x_2 j x_1 i - x_2 j x_2 j - x_2 j x_3 k + x_3 k x_0 - x_3 k x_1 i - x_3 k x_2 j - x_3 k x_3 k =$$

$$= x_0^2 - x_0x_1 i - x_0x_2 j - x_0x_3 k + x_0x_1 i - \underbrace{x_1^2 i^2}_{=\,-x_1^2} - \underbrace{x_1x_2 ij}_{=\,x_1x_2k} - \underbrace{x_1x_3 ik}_{=\,-x_1x_3j} +$$

$$+ x_0x_2 j - \underbrace{x_1x_2 ji}_{=\,-x_1x_2k} - \underbrace{x_2^2 j^2}_{=\,-x_2^2} - \underbrace{x_2x_3 jk}_{=\,x_2x_3i} + x_0x_3 k - \underbrace{x_1x_3 ki}_{=\,x_1x_3j} - \underbrace{x_2x_3 kj}_{=\,-x_2x_3i} - \underbrace{x_3^2 k^2}_{=\,-x_3^2} =$$

$$= x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2k + x_1x_3j + x_1x_2k - x_2x_3i - x_1x_3j + x_2x_3i = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \quad \square$$

4.7

Tre vektorer kommer alltid att definiera samma parallellepiped, som därför kommer att ha samma volym (oberoende av hur man tar kryssprodukter och sådant), och denna volym beräknas just med dessa skalärprodukter, vilket gör det högst rimligt att det är en likhet. Det bör alltså kännas rimligt att det inte spelar någon roll om man väljer att ta $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ eller $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$.

4.8

Vi bildar tre vektorer med hjälp av punkterna, och beräknar sedan determinanten, vilket kommer att ge oss volymen, så när som på ett tecken.

a)

$$\mathbf{u} = (3,5,2) - (2,1,0) = (1,4,2),$$
$$\mathbf{v} = (4,1,2) - (2,1,0) = (2,0,2),$$
$$\mathbf{w} = (6,1,5) - (2,1,0) = (4,0,5),$$

vilket betyder att volymen av parallellepipeden ges av ($\pm$)

$$V(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot 5 + 2\cdot 0\cdot 2 + 4\cdot 4\cdot 2 - 4\cdot 0\cdot 2 - 2\cdot 4\cdot 5 - 1\cdot 0\cdot 2 = 32 - 40 = -8,$$

och tetraederns volym blir då $8/6 = 4/3$.

b)

$$\mathbf{u} = (2,1,3) - (-2,2,-3) = (4,-1,6),$$
$$\mathbf{v} = (1,4,-2) - (-2,2,-3) = (3,2,1),$$
$$\mathbf{w} = (0,5,1) - (-2,2,-3) = (2,3,4),$$

vilket betyder att volymen för parallellepipeden är ($\pm$)

$$V(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4\cdot 2\cdot 4 + 3\cdot 3\cdot 6 + 2\cdot(-1)\cdot 1 - 2\cdot 2\cdot 6 - 3\cdot(-1)\cdot 4 - 4\cdot 3\cdot 1 =$$
$$= 32 + 54 - 2 - 24 + 12 - 12 = 60,$$

och tetraederns volym blir således $60/6 = 10$.

4.9

Att hörnet ligger på den positiva y-axeln betyder att punkten har formen $(0,a,0)$, där $a > 0$. Vi bildar vektorerna:

$$\mathbf{u} = (3,0,1) - (2,1,-1) = (1,-1,2),$$

$$\mathbf{v} = (2,-1,3) - (2,1,-1) = (0,-2,4),$$

$$\mathbf{w} = (0, a, 0) - (2, 1, -1) = (-2, a-1, 1),$$

vilket ger oss volymprodukten

$$V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & a-1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-2) \cdot 1 + 0 \cdot (a-1) \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) \cdot 4 - (-2) \cdot (-2) \cdot 2 - 0 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot (a-1) \cdot 4 =$$

$$= -2 + 8 - 8 - 4(a-1) = -2 - 4(a-1),$$

och tetraederns volym är då

$$\frac{|-2-4(a-1)|}{6} = 5 \implies 2 + 4(a-1) = 30 \implies a - 1 = \frac{28}{4} = 7 \implies a = 8.$$

4.10

Att tre vektorer är linjärt beroende kan formuleras om till att deras determinant är 0. Om man vill tänka på det i volymsammanhang kan man se det som att om en tredimensionell kropp har volymen 0 måste den egentligen vara två- eller endimensionell, vilket betyder att vektorerna som spänner upp den är linjärt beroende.

$$\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} = aaa + bbb + bbb - bab - bba - abb = a^3 + 2b^3 - 3ab^2 = 0,$$

det är uppenbart att $a = b$ är en lösning, vilket tillåter oss att utföra polynomdivision:

$$\begin{array}{rl} & a^2 + ba - 2b^2 \\ \hline a^3 - 3b^2a + 2b^3 & \underline{|\ a - b} \\ -a^2(a-b) & \\ \hline ba^2 - 3b^2a + 2b^3 & \\ -ba(a-b) & \\ \hline -2b^2a + 2b^3 & \\ -(-2b^2)(a-b) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Alltså är

$$a^3 + 2b^3 - 3ab^2 = (a-b)(a^2 + ab - 2b^2) = 0 \implies a^2 + ab - 2b^2 = 0 \implies$$

$$\implies a = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} + 2b^2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{9b^2}{4}} = -\frac{b}{2} \pm \frac{3b}{2} \implies \begin{cases} a = -2b \\ a = b \text{ (dubbelrot)}, \end{cases}$$

sammanställt har vi då att

$$a^3 + 2b^3 - 3ab^2 = (a-b)^2(a+2b) = 0,$$

vilket innebär att vektorerna är linjärt beroende om $a = b$, eller om $a = -2b$.

4.11

Om punkterna ligger i samma plan kommer den parallellepiped de spänner upp att ha volymen 0, vilket betyder att vi kan kontrollera för vilka värden på a som detta sker, och det är då vårt svar.

$$\mathbf{u} = (-a, 1, 0) - (0, 2, 1) = (-a, -1, -1),$$

$$\mathbf{v} = (-3, 3, -a) - (0, 2, 1) = (-3, 1, -1-a),$$

$$\mathbf{w} = (3, -3, 1+a) - (0, 2, 1) = (3, -5, a),$$

vilket ger oss volymprodukten

$$V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} -a & -3 & 3 \\ -1 & 1 & -5 \\ -1 & -(1+a) & a \end{vmatrix} =$$

$$= (-a) \cdot 1 \cdot a + (-3) \cdot (-5) \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) \cdot (-1-a) -$$

$$-3 \cdot 1 \cdot (-1) - (-3) \cdot (-1) \cdot a - (-a) \cdot (-5) \cdot (-1-a) =$$

$$= -a^2 - 15 + 3 + 3a + 3 - 3a + 5a^2 + 5a = 4a^2 + 5a - 9,$$

och vi vill veta när

$$4a^2 + 5a - 9 = 0 \implies a^2 + \frac{5}{4}a - \frac{9}{4} = 0 \implies a = -\frac{5}{8} \pm \sqrt{\frac{25}{64} + \frac{9}{4}} =$$

$$= -\frac{5}{8} \pm \sqrt{\frac{25}{64} + \frac{144}{64}} = -\frac{5}{8} \pm \sqrt{\frac{169}{64}} = -\frac{5}{8} \pm \frac{13}{8} \implies \begin{cases} a = -9/4 \\ a = 1. \end{cases}$$

Kapitel 5

5.1

a)

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 0 + 0\cdot 2 + 2\cdot 1 & 1\cdot 1 + 0\cdot(-2) + 2\cdot 2 & 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 2\cdot 3 \\ 0\cdot 0 + 3\cdot 2 + 1\cdot 1 & 0\cdot 1 + 3\cdot(-2) + 1\cdot 2 & 0\cdot 1 + 3\cdot 0 + 1\cdot 3 \\ 2\cdot 0 + 2\cdot 2 + (-1)\cdot 1 & 2\cdot 1 + 2\cdot(-2) + (-1)\cdot 2 & 2\cdot 1 + 2\cdot 0 + (-1)\cdot 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 7 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

b)

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0\cdot 1 + 1\cdot 0 + 1\cdot 2 & 0\cdot 0 + 1\cdot 3 + 1\cdot 2 & 0\cdot 2 + 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) \\ 2\cdot 1 + (-2)\cdot 0 + 0\cdot 2 & 2\cdot 0 + (-2)\cdot 3 + 0\cdot 2 & 2\cdot 2 + (-2)\cdot 1 + 0\cdot(-1) \\ 1\cdot 1 + 2\cdot 0 + 3\cdot 2 & 1\cdot 0 + 2\cdot 3 + 3\cdot 2 & 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 3\cdot(-1) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 2 & -6 & 2 \\ 7 & 12 & 1 \end{bmatrix}$$

c)

$$A^t B^t = (BA)^t = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 2 & -6 & 2 \\ 7 & 12 & 1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 5 & -6 & 12 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

d)

$$A + 3B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & -3 & 1 \\ 5 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

$$(A + 3B)C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & -3 & 1 \\ 5 & 8 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 2 + 3\cdot(-1) + 5\cdot 1 & 1\cdot 1 + 3\cdot 1 + 5\cdot 2 \\ 6\cdot 2 + (-3)\cdot(-1) + 1\cdot 1 & 6\cdot 1 + (-3)\cdot 1 + 1\cdot 2 \\ 5\cdot 2 + 8\cdot(-1) + 8\cdot 1 & 5\cdot 1 + 8\cdot 1 + 8\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 14 \\ 16 & 5 \\ 10 & 29 \end{bmatrix}$$

e)

$$CC^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2\cdot 2 + 1\cdot 1 & 2\cdot(-1) + 1\cdot 1 & 2\cdot 1 + 1\cdot 2 \\ (-1)\cdot 2 + 1\cdot 1 & (-1)\cdot(-1) + 1\cdot 1 & (-1)\cdot 1 + 1\cdot 2 \\ 1\cdot 2 + 2\cdot 1 & 1\cdot(-1) + 2\cdot 1 & 1\cdot 1 + 2\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

f)

$$C^t C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) + 1\cdot 1 & 2\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + 1\cdot 2 \\ 1\cdot 2 + 1\cdot(-1) + 2\cdot 1 & 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 2\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

5.2

a)

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) & 1\cdot 1 + 1\cdot 1 \\ (-1)\cdot 1 + 1\cdot(-1) & (-1)\cdot 1 + 1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + (-2)\cdot 3 & 1\cdot(-2) + (-2)\cdot 4 \\ 3\cdot 1 + 4\cdot 3 & 3\cdot(-2) + 4\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -10 \\ 15 & 10 \end{bmatrix}$$

$$A^2 - B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 & -10 \\ 15 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ -17 & -10 \end{bmatrix}$$

b)

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(A + B)(A - B) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2\cdot 0 + (-1)\cdot(-4) & 2\cdot 3 + (-1)\cdot(-3) \\ 2\cdot 0 + 5\cdot(-4) & 2\cdot 3 + 5\cdot(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ -20 & -9 \end{bmatrix}$$

Matrismultiplikation är ej kommutativ, så

$$(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2 \neq A^2 - B^2,$$

eftersom AB inte nödvändigtvis är samma sak som BA.

5.3

Låt

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

då blir

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot b_{11} + (-3) \cdot b_{21} & 1 \cdot b_{12} + (-3) \cdot b_{22} \\ (-3) \cdot b_{11} + 9 \cdot b_{21} & (-3) \cdot b_{12} + 9 \cdot b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} - 3b_{21} & b_{12} - 3b_{22} \\ -3b_{11} + 9b_{21} & -3b_{12} + 9b_{22} \end{bmatrix}$$

och

$$BA = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11} \cdot 1 + b_{12} \cdot (-3) & b_{11} \cdot (-3) + b_{12} \cdot 9 \\ b_{21} \cdot 1 + b_{22} \cdot (-3) & b_{21} \cdot (-3) + b_{22} \cdot 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} - 3b_{12} & -3b_{11} + 9b_{12} \\ b_{21} - 3b_{22} & -3b_{21} + 9b_{22} \end{bmatrix}$$

Vi vill att

$$AB = BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \implies$$

$$\implies \begin{cases} b_{11} - 3b_{21} = 0 \\ b_{12} - 3b_{22} = 0 \\ -3b_{11} + 9b_{21} = 0 \\ -3b_{12} + 9b_{22} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b_{11} - 3b_{21} = 0 \\ b_{12} - 3b_{22} = 0 \end{cases}$$

och

$$\begin{cases} b_{11} - 3b_{12} = 0 \\ -3b_{11} + 9b_{12} = 0 \\ b_{21} - 3b_{22} = 0 \\ -3b_{21} + 9b_{22} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b_{11} - 3b_{12} = 0 \\ b_{21} - 3b_{22} = 0. \end{cases}$$

Slår vi ihop dessa två ekvationssystem, och Gausseliminerar, får vi

$$\begin{cases} b_{11} - 3b_{21} = 0 \\ b_{12} - 3b_{22} = 0 \\ b_{11} - 3b_{12} = 0 \\ b_{21} - 3b_{22} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b_{11} - 3b_{21} = 0 \\ b_{12} - 3b_{22} = 0 \\ -3b_{12} + 3b_{21} = 0 \\ b_{21} - 3b_{22} = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} b_{11} - 3b_{21} = 0 \\ b_{12} - 3b_{22} = 0 \\ 3b_{21} - 9b_{22} = 0 \\ b_{21} - 3b_{22} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b_{11} - 3b_{21} = 0 \\ b_{12} - 3b_{22} = 0 \\ b_{21} - 3b_{22} = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff [b_{22} = t] \iff \begin{cases} b_{11} = 3b_{21} = 9t \\ b_{12} = 3b_{22} = 3t \\ b_{21} = 3b_{22} = 3t \\ b_{22} = t, \end{cases}$$

vilket ger oss matrisen

$$B = \begin{bmatrix} 9t & 3t \\ 3t & t \end{bmatrix}$$

5.4

a)

Detta är bara binomialsatsen, fast för matriser. Den kan antingen bevisas kombinatoriskt, eller induktivt.

$$(A+B)^k = A^k + kA^{k-1}B + \binom{k}{2}A^{k-2}B^2 + ... + B^k \iff$$

$$\iff (A+B)^k = \sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}A^{k-n}B^n.$$

<u>Induktion</u>:

Basfallet inses lätt. Antag nu att formeln gäller för k, då blir

$$(A+B)^{k+1} = (A+B)(A+B)^k = (A+B)\sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}A^{k-n}B^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}(AA^{k-n}B^n + BA^{k-n}B^n) = [AB = BA] =$$

$$= \sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}A^{k+1-n}B^n + \sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}A^{k-n}B^{n+1}.$$

Om vi ersätter $n+1$ med n (och därmed n med $n-1$) i den andra summan kommer vi att börja på $n=1$ och gå till $n=k+1$, alltså:

$$\sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}A^{k+1-n}B^n + \sum_{n=1}^{k+1}\binom{k}{n-1}A^{k-(n-1)}B^n =$$

$$= \underbrace{\binom{k}{0}A^{k+1-0}B^0}_{=\ A^{k+1}} + \sum_{n=1}^{k}\binom{k}{n}A^{k+1-n}B^n +$$

$$+ \sum_{n=1}^{k}\binom{k}{n-1}A^{k+1-n}B^n + \underbrace{\binom{k}{k+1-1}A^{k+1-(k+1)}B^{k+1}}_{=\ B^{k+1}} =$$

$$= A^{k+1} + \sum_{n=1}^{k}\underbrace{\left(\binom{k}{n} + \binom{k}{n-1}\right)}_{=\binom{k+1}{n}}A^{k+1-n}B^n + B^{k+1} =$$

$$= \binom{k+1}{0}A^{k+1-0}B^0 + \sum_{n=1}^{k}\binom{k+1}{n}A^{k+1-n}B^n + \binom{k+1}{k+1}A^{k+1-(k+1)}B^{k+1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{k+1}\binom{k+1}{n}A^{k+1-n}B^n. \quad \square$$

b)

Först beräknar vi några potenser av A. Eftersom matrisen måste ha ett nollrum som är minst måste $A^3 = \mathbf{0}$.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0\cdot 0 + 5\cdot 0 + 3\cdot 0 & 0\cdot 5 + 5\cdot 0 + 3\cdot 0 & 0\cdot 3 + 5\cdot 3 + 3\cdot 0 \\ 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 3\cdot 0 & 0\cdot 5 + 0\cdot 0 + 3\cdot 0 & 0\cdot 3 + 0\cdot 3 + 3\cdot 0 \\ 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 & 0\cdot 5 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 & 0\cdot 3 + 0\cdot 3 + 0\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies$$

$$\implies A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi använder nu formeln från a)-uppgiften:

$$(E + A)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} E^{10-k} A^k = [E^k A = A] = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} A^k = [A^k = \mathbf{0},\ k \geq 3] =$$

$$= \sum_{k=0}^{2} \binom{10}{k} A^k = \binom{10}{0} A^0 + \binom{10}{1} A^1 + \binom{10}{2} A^2 = E + 10A + 45A^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 10 \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 45 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 50 & 705 \\ 0 & 1 & 30 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.5

Vi har matriserna

$$I = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \quad , \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad K = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

och vi vill visa att

$$I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -E \implies$$

$$\implies IJ = -JI = K, \quad JK = -KJ = I, \quad KI = -IK = J.$$

Utgå från likheten $IJK = -E$ och multiplicera med I, J, eller K från olika sidor och använd att kvadraten av matriserna är $-E$

$$IJK = -E \implies \underbrace{IJK^2}_{=\ -IJ} = -K \implies IJ = K,$$

$$IJK = -E \implies \underbrace{I^2 JK}_{=\ -JK} = -I \implies JK = I,$$

$$IJK = -E \implies \underbrace{JI^2 JKI}_{=\ -J^2 KI = KI} = \underbrace{-JIEI}_{=\ -JI^2 = J} \implies KI = J,$$

$$IJK = -E \implies \underbrace{I^2 JK^2 I}_{=\ JI} = -IEKI = -I\underbrace{KI}_{=\ J} = -IJ \implies IJ = -JI,$$

$$IJK = -E \implies \underbrace{JI^2JKJ}_{=\,-J^2KJ=KJ} = -JIEJ = -J\underbrace{IJ}_{=\,K} = -JK \implies JK = -KJ,$$

$$IJK = -E \implies \underbrace{IJI^2JK}_{=\,-IJ^2K=IK} = -IJIE = \underbrace{-IJ}_{=\,-K}I = -KI \implies KI = -IK. \quad \square$$

5.6

För att göra det uppgiften begär betraktar vi ekvationssystemet

$$AX = Y,$$

där A är matrisen som ska inverteras, och

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad , \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Matrisen är inverterbar om det finns en entydig lösnings till detta ekvationssystem.

a)

$$AX = Y \iff \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = y_1 \\ \qquad\quad x_2 + 2x_3 = y_2 \\ \qquad\qquad\quad x_3 = y_3 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = y_1 - 2x_2 - 3x_3 = y_1 - 2y_2 + 4y_3 - 3y_3 = y_1 - 2y_2 + y_3 \\ \qquad\quad x_2 \qquad\quad = y_2 - 2x_3 = y_2 - 2y_3 \\ \qquad\qquad\qquad x_3 = y_3. \end{cases}$$

Genom att avläsa koefficienterna framför y_1, y_2, och y_3 i ekvationerna, ser vi att

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$AX = Y \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = y_1 \\ 2x_1 + x_2 + \ \ x_3 = y_2 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 = y_3 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 = \quad y_1 \\ \quad - \ \ x_2 - 3x_3 = -2y_1 + y_2 \\ \quad\ \ 2x_2 + 6x_3 = \quad y_1 \quad + \quad y_3 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \qquad = \quad y_1 \\ \quad - x_2 - 3x_3 \qquad = -2y_1 \ + \ y_2 \\ \qquad\qquad\qquad 0 = \quad y_1 + 2y_2 + y_3 \end{cases}$$

eftersom ekvationssystemet saknar entydig lösning är matrisen inte inverterbar.

c)

$$AX = Y \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x_1 \qquad + x_3 = y_1 \\ \qquad x_2 + x_3 = y_2 \\ x_1 + x_2 \qquad = y_3 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 \qquad + x_3 = \quad y_1 \\ \qquad x_2 + x_3 = \qquad y_2 \\ \qquad x_2 - x_3 = -y_1 \quad + \quad y_3 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 \qquad + \ x_3 = \quad y_1 \\ \qquad x_2 + \ x_3 = \qquad y_2 \\ \qquad\quad - 2x_3 = -y_1 - y_2 + y_3 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = y_1 - x_3 = (y_1 - y_2 + y_3)/2 \\ x_2 = y_2 - x_3 = (-y_1 + y_2 + y_3)/2 \\ x_3 = (y_1 + y_2 - y_3)/2 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 \qquad\qquad = \ \tfrac{1}{2}y_1 - \tfrac{1}{2}y_2 + \tfrac{1}{2}y_3 \\ \qquad x_2 \qquad = -\tfrac{1}{2}y_1 + \tfrac{1}{2}y_2 + \tfrac{1}{2}y_3 \\ \qquad\qquad x_3 = \ \tfrac{1}{2}y_1 + \tfrac{1}{2}y_2 - \tfrac{1}{2}y_3. \end{cases}$$

Alltså är

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

5.7

Vi gör som i föregående uppgift:

$$AX = Y \iff \begin{cases} x_1 \qquad + ax_3 = y_1 \\ \quad - x_2 + \ x_3 = y_2 \\ x_1 + x_2 \qquad = y_3 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 \qquad + ax_3 = \quad y_1 \\ \quad - x_2 + \ x_3 = \qquad y_2 \\ \qquad x_2 - ax_3 = -y_1 \quad + \quad y_3 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 \qquad + \qquad x_3 = \quad y_1 \\ \quad - x_2 + \qquad x_3 = \qquad y_2 \\ \qquad (1-a)x_3 = -y_1 + y_2 + y_3 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = y_1 - a(-y_1 + y_2 + y_3)/(1-a) = (y_1 - ay_2 - ay_3)/(1-a) \\ x_2 = -y_2 + (-y_1 + y_2 + y_3)/(1-a) = (-y_1 + ay_2 + y_3)/(1-a) \\ x_3 = (-y_1 + y_2 + y_3)/(1-a) \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 & & & = \frac{1}{1-a}(\ y_1 - ay_2 - ay_3) \\ & x_2 & & = \frac{1}{1-a}(-y_1 + ay_2 + y_3) \\ & & x_3 & = \frac{1}{1-a}(-y_1 + y_2 + y_3) \end{cases}$$

vilket visar att, för $a \neq 1$,

$$A^{-1} = \frac{1}{1-a}\begin{bmatrix} 1 & -a & -a \\ -1 & a & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5.8

Om

$$AA^{-1} = E \implies A^2(A^{-1})^2 = AAA^{-1}A^{-1} = AEA^{-1} = E,$$

vilket visar att $(A^{-1})^2$ är invers till A^2. Vi börjar med att bestämma A^{-1}.

$$AX = Y \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = y_1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = y_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = y_3 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = y_1 \\ -x_2 - 5x_3 = -2y_1 + y_2 \\ -x_2 - 2x_3 = -y_1 + y_3 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = y_1 \\ -x_2 - 5x_3 = -2y_1 + y_2 \\ 3x_3 = y_1 - y_2 + y_3 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = y_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ x_2 = 2y_1 - y_2 - 5x_3 \\ x_3 = (y_1 - y_2 + y_3)/3, \end{cases}$$

och

$$2y_1 - y_2 - 5x_3 = 2y_1 - y_2 - \frac{5}{3}(y_1 - y_2 + y_3) = \frac{1}{3}(y_1 + 2y_2 - 5y_3),$$

$$y_1 - 2x_2 - 3x_3 = y_1 - \frac{2}{3}(y_1 + 2y_2 - 5y_3) - (y_1 - y_2 + y_3) = \frac{1}{3}(-2y_1 - y_2 + 7y_3),$$

vilket betyder att

$$\begin{cases} x_1 & & & = \frac{1}{3}(-2y_1 - y_2 + 7y_3) \\ & x_2 & & = \frac{1}{3}(\ y_1 + 2y_2 - 5y_3) \\ & & x_3 & = \frac{1}{3}(\ y_1 - y_2 + y_3) \end{cases}$$

varur vi ser att

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Med vår kunskap från ovan kan vi då säga att

$$(A^2)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -2\cdot(-2)+(-1)\cdot 1+7\cdot 1 & -2\cdot(-1)+(-1)\cdot 2+7\cdot(-1) & -2\cdot 7+(-1)\cdot(-5)+7\cdot 1 \\ 1\cdot(-2)+2\cdot 1+(-5)\cdot 1 & 1\cdot(-1)+2\cdot 2+(-5)\cdot(-1) & 1\cdot 7+2\cdot(-5)+(-5)\cdot 1 \\ 1\cdot(-2)+(-1)\cdot 1+1\cdot 1 & 1\cdot(-1)+(-1)\cdot 2+1\cdot(-1) & 1\cdot 7+(-1)\cdot(-5)+1\cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 10 & -7 & -2 \\ -5 & 8 & -8 \\ -2 & -4 & 13 \end{bmatrix}$$

5.9

Tänk på att matrismultiplikation inte är kommutativ, så vi måste multiplicera med A^{-1} från vänster och B^{-1} från höger.

$$AXB = C \implies XB = A^{-1}C \implies X = A^{-1}CB^{-1},$$

nu är det bara att bestämma inverserna, och sedan multiplicera ihop allting. Lyckligtvis är B samma matris som i 5.6 a), vilket betyder att vi inte behöver bestämma den inversen igen. För A löser vi ekvationssystemet

$$AX = Y \iff \begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 \\ x_1 + 2x_2 = y_2 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 \\ x_2 = -y_1 + y_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 2y_1 - y_2 \\ x_2 = -y_1 + y_2. \end{cases}$$

Här ser vi att

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 0+1\cdot 0 & 1\cdot(-2)+2\cdot 1+1\cdot 0 & 1\cdot 1+2\cdot(-2)+1\cdot 1 \\ 2\cdot 1+1\cdot 0+2\cdot 0 & 2\cdot(-2)+1\cdot 1+2\cdot 0 & 2\cdot 1+1\cdot(-2)+2\cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2\cdot 1+(-1)\cdot 2 & 2\cdot 0+(-1)\cdot(-3) & 2\cdot(-2)+(-1)\cdot 2 \\ -1\cdot 1+1\cdot 2 & -1\cdot 0+1\cdot(-3) & -1\cdot(-2)+1\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

5.10

$$(E - BA)(E + B(E - AB)^{-1}A) = E - BA + (E - BA)B(E - AB)^{-1}A =$$
$$= E - BA + (B - BAB)(E - AB)^{-1}A = E - BA + B(E - AB)(E - AB)^{-1}A =$$
$$= E - BA + BEA = E - BA + BA = E,$$

$$(E + B(E - AB)^{-1}A)(E - BA) = E - BA + B(E - AB)^{-1}A(E - BA) =$$
$$= E - BA + B(E - AB)^{-1}(A - ABA) = E - BA + B(E - AB)^{-1}(E - AB)A =$$
$$= E - BA + BEA = E - BA + BA = E,$$

och eftersom

$$(E - BA)(E + B(E - AB)^{-1}A) = (E + B(E - AB)^{-1}A)(E - BA) = E$$

innebär det att

$$(E - BA)^{-1} = E + B(E - AB)^{-1}A. \quad \square$$

Eftersom vi har hittat en invers matris, som är entydigt bestämd (eftersom $(E - AB)^{-1}$ existerar), visar det också att matrisen är inverterbar.

Kapitel 6

6.1

Vi undersöker ekvationen $\lambda_1\mathbf{u}_1+\lambda_2\mathbf{u}_2+\lambda_3\mathbf{u}_3=\mathbf{0}$, och ser om den endast har den triviala lösningen $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$, vilket skulle betyda att vektorerna är linjärt oberoende.

a)

$$\lambda_1(1,-7,2)+\lambda_2(0,5,-2)+\lambda_3(1,1,1)=\mathbf{0} \iff \begin{cases} \lambda_1 \qquad\quad +\lambda_3=0 \\ -7\lambda_1+5\lambda_2+\lambda_3=0 \\ 2\lambda_1-2\lambda_2+\lambda_3=0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 \qquad\quad + \ \lambda_3=0 \\ \qquad 5\lambda_2+8\lambda_3=0 \\ -2\lambda_2- \ \lambda_3=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 \qquad\quad + \ \lambda_3=0 \\ \qquad 5\lambda_2+ \ 8\lambda_3=0 \\ \qquad\qquad 11\lambda_3=0 \end{cases} \iff \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0,$$

vilket betyder att vektorerna är linjärt oberoende.

b)

$$\lambda_1(1,0,2,-1)+\lambda_2(1,2,-1,0)+\lambda_3(1,1,0,-1)=\mathbf{0} \iff \begin{cases} \lambda_1+\ \lambda_2+\lambda_3=0 \\ \qquad 2\lambda_2+\lambda_3=0 \\ 2\lambda_1-\ \lambda_2 \qquad =0 \\ -\lambda_1 \qquad -\lambda_3=0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1+\ \lambda_2+\ \lambda_3=0 \\ \qquad 2\lambda_2+\ \lambda_3=0 \\ -3\lambda_2-2\lambda_3=0 \\ \lambda_2 \qquad =0 \end{cases} \iff \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0,$$

vilket betyder att vektorerna är linjärt oberoende.

c)

$$\lambda_1(1,2,-1,-2,4)+\lambda_2(6,1,5,3,2)+\lambda_3(4,-3,7,7,-6)=\mathbf{0} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1+6\lambda_2+4\lambda_3=0 \\ 2\lambda_1+\ \lambda_2-3\lambda_3=0 \\ -\lambda_1+5\lambda_2+7\lambda_3=0 \\ -2\lambda_1+3\lambda_2+7\lambda_3=0 \\ 4\lambda_1+2\lambda_2-6\lambda_3=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1+\ 6\lambda_2+\ 4\lambda_3=0 \\ -11\lambda_2-11\lambda_3=0 \\ 11\lambda_2+11\lambda_3=0 \\ 15\lambda_2+15\lambda_3=0 \\ -22\lambda_2-22\lambda_3=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1+6\lambda_2+4\lambda_3 \qquad =0 \\ \qquad \lambda_2+\ \lambda_3 \qquad =0 \\ \qquad\qquad 0=0 \\ \qquad\qquad 0=0 \\ \qquad\qquad 0=0. \end{cases}$$

Eftersom detta ekvationssystem har oändligt med lösningar är vektorerna linjärt beroende.

6.2

a)

Vi undersöker ekvationen

$$\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \lambda_3\mathbf{u}_3 + \lambda_4\mathbf{u}_4 = \mathbf{0} \iff$$

$$\iff \lambda_1(3,2,5,-1) + \lambda_2(1,-2,3,2) + \lambda_3(2,3,-4,-3) + \lambda_4(4,-1,2,1) = \mathbf{0} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 3\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + 4\lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + 3\lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ 5\lambda_1 + 3\lambda_2 - 4\lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 - 3\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + 4\lambda_4 = 0 \\ -8\lambda_2 + 5\lambda_3 - 11\lambda_4 = 0 \\ 4\lambda_2 - 22\lambda_3 - 14\lambda_4 = 0 \\ 7\lambda_2 - 7\lambda_3 + 7\lambda_4 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 3\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + 4\lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ -8\lambda_2 + 5\lambda_3 - 11\lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_2 - 11\lambda_3 - 7\lambda_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + 4\lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ -3\lambda_3 - 3\lambda_4 = 0 \\ -9\lambda_3 - 9\lambda_4 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 3\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + 4\lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff [\lambda_4 = t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = -(\lambda_2 + 2\lambda_3 + 4\lambda_4)/3 = 0 \\ \lambda_2 = \lambda_3 - \lambda_4 = -2t \\ \lambda_3 = -\lambda_4 = -t \\ \lambda_4 = t \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -2t \\ \lambda_3 = -t \\ \lambda_4 = t. \end{cases}$$

Eftersom $\lambda_1 = 0$ är $\mathbf{u}_1$ inte en linjärkombination av övriga vektorer, vilket betyder att svaret på denna fråga är nej.

b)

Vi fick fram en icke-trivial lösning i föregående deluppgift, vilket betyder att vektorerna är linjärt beroende ($\mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_3,\ \mathbf{u}_4$ är linjärt beroende).

6.3

Att bestämma en bas för nollrummet till en matris, A, är samma sak som att lösa ekvationen $Ax = \mathbf{0}$, där x är en kolonnmatris. I denna uppgift är

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

a)

$$\mathsf{A}x = \mathbf{0} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ - 2x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0 \\ - x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff [x_3 = s,\ x_4 = t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -x_2 - 3x_3 - 3x_4 = s + 2t - 3s - 3t = -2s - t \\ x_2 = -x_3 - 2x_4 = -s - 2t \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Alltså är en bas, exempelvis, $(-2, -1, 1, 0)$ och $(-1, -2, 0, 1)$.

b)

$$\mathsf{A}x = \mathbf{0} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_2 - 9x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff [x_3 = s,\ x_4 = t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -x_2 - 2x_3 + x_4 = -3s + t - 2s + t = -5s + 2t \\ x_2 = 3x_3 - x_4 = 3s - t \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nu ser vi att $(-5, 3, 1, 0)$ och $(2, -1, 0, 1)$ utgör en bas.

6.4

För att hitta en bas till värderummet utgår vi från ekvationen $\mathsf{A}x = \mathbf{0}$ och Gausseliminerar den så långt som möjligt, detta kommer att lämna ett antal variabler, och då kan vi se vilken dimension som värderummet har. När vi vet vilken dimension värderummet har,

kan vi välja så många linjärt oberoende kolonner från matrisen. Vilka kolonner som är oberoende kan man se utifrån pivotelementen efter Gausseliminering.

$$\mathsf{A}x = \mathbf{0} \iff \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ \phantom{3x_1 + {}} 5x_2 + 5x_3 = 0 \\ \phantom{3x_1 +{}} -4x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ \phantom{3x_1 +{}} x_2 + x_3 = 0 \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Här ser vi att värderummets dimension är 2, och pivotelementen är alla variabler som är längst ut till vänster på en rad, vilket i detta fall är x_1 och x_2. Detta betyder att kolonn 1 och 2 är linjärt oberoende och duger som en bas, vilket ger oss svaret $(3, 1, 1)$ och $(1, 2, -1)$.

6.5

Om vektorerna är linjärt oberoende utgör de en bas. Vi tittar därför på

$$\lambda_1(1,2,3,4) + \lambda_2(0,1,2,3) + \lambda_3(0,0,1,2) + \lambda_4(0,0,0,1) = \mathbf{0} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0. \quad \square$$

Koordinaterna hittar vi genom att lösa

$$\lambda_1(1,2,3,4) + \lambda_2(0,1,2,3) + \lambda_3(0,0,1,2) + \lambda_4(0,0,0,1) = (1,1,1,1) \iff$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ 4\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = -2 \\ 3\lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4 = -3 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = 0. \end{cases}$$

Det är också ganska lätt att direkt se dessa koordinater, men denna metod för att beräkna koordinaterna är mer allmän och fungerar när det inte är lika uppenbart.

6.6

Dimensionen ges av antalet linjärt oberoende vektorer i det linjära höljet, så, om vi tittar på ekvationen $\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \lambda_3\mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$, kommer dimensionen att vara antalet pivotelement.

a)

$$\lambda_1(1,0,2,1)+\lambda_2(0,2,2,4)+\lambda_3(1,-1,1,-1)=\mathbf{0} \iff \begin{cases} \lambda_1 \qquad\quad +\lambda_3=0 \\ \qquad 2\lambda_2-\lambda_3=0 \\ 2\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3=0 \\ \lambda_1+4\lambda_2-\lambda_3=0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 \qquad\quad +\ \lambda_3=0 \\ \qquad 2\lambda_2-\ \lambda_3=0 \\ \qquad 2\lambda_2-\ \lambda_3=0 \\ \qquad 4\lambda_2-2\lambda_3=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 \qquad +\lambda_3 \qquad =0 \\ \qquad 2\lambda_2-\lambda_3 \qquad =0 \\ \qquad\qquad\qquad 0=0 \\ \qquad\qquad\qquad 0=0. \end{cases}$$

Här ser vi att har 2 pivotelement, vilket betyder att dimensionen är 2.

b)

$$\lambda_1(1,2,1,2)+\lambda_2(2,1,2,1)+\lambda_3(1,2,2,1)=\mathbf{0} \iff \begin{cases} \lambda_1+2\lambda_2+\ \lambda_3=0 \\ 2\lambda_1+\ \lambda_2+2\lambda_3=0 \\ \lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3=0 \\ 2\lambda_1+\ \lambda_2+\ \lambda_3=0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3=0 \\ \quad -3\lambda_2 \qquad =0 \\ \qquad\qquad \lambda_3=0 \\ \quad -3\lambda_2-\lambda_3=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3 \qquad =0 \\ \qquad \lambda_2 \qquad\qquad =0 \\ \qquad\qquad \lambda_3 \qquad =0 \\ \qquad\qquad\qquad 0=0. \end{cases}$$

Nu har vi 3 pivotelement, och alltså är dimensionen 3.

6.7

Om vi kan uttrycka dem två andra vektorerna med hjälp av dem två första (eftersom då vet vi att de är i samma underrum), och även visar att vektorerna är linjärt oberoende i sina par är vi klara. Det är uppenbart att $(1,0,1,0,1,0)$ och $(0,1,1,1,1,-1)$ är linjärt oberoende, samt att $(4,-5,-1,-5,-1,5)$ och $(-3,2,-1,2,-1,-2)$ är linjärt oberoende. Låt oss nu undersöka ekvationerna

$$\lambda_1(1,0,1,0,1,0)+\lambda_2(0,1,1,1,1,-1)=(4,-5,-1,-5,-1,5)$$

och

$$\lambda_1(1,0,1,0,1,0)+\lambda_2(0,1,1,1,1,-1)=(-3,2,-1,2,-1,-2),$$

vi vill att båda dessa ekvationer ska ha entydiga lösningar.

$$\lambda_1(1,0,1,0,1,0)+\lambda_2(0,1,1,1,1,-1)=(4,-5,-1,-5,-1,5) \iff$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 \qquad\quad =4 \\ \qquad \lambda_2=-5 \\ \lambda_1+\lambda_2=-1 \\ \qquad \lambda_2=-5 \\ \lambda_1+\lambda_2=-1 \\ \quad -\lambda_2=5 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1=4 \\ \lambda_2=-5, \end{cases}$$

$$\lambda_1(1,0,1,0,1,0) + \lambda_2(0,1,1,1,1,-1) = (-3,2,-1,2,-1,-2) \iff$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 \qquad = -3 \\ \qquad \lambda_2 = 2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = -1 \\ \qquad \lambda_2 = 2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = -1 \\ \quad -\lambda_2 = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = 2, \end{cases}$$

och eftersom det andra paret av vektorer går att skriva som en linjärkombination av det första paret är beviset klart. □

6.8

Vi undersöker linjärt-beroende-ekvationen för vektorerna:

$$\lambda_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + \lambda_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) + ... + \lambda_{k-1}(\mathbf{v}_{k-1} - \mathbf{v}_k) + \lambda_k(\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_1) = \mathbf{0} \iff$$

$$\iff (\lambda_1 - \lambda_k)\mathbf{v}_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)\mathbf{v}_2 + ... + (\lambda_{k-1} - \lambda_{k-2})\mathbf{v}_{k-1} + (\lambda_k - \lambda_{k-1})\mathbf{v}_k = \mathbf{0},$$

och eftersom vi vet att $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_k$ är linjärt oberoende måste koefficienterna ovan vara 0, alltså:

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_k & = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_1 & = 0 \\ & ... \\ \lambda_{k-1} - \lambda_{k-2} & = 0 \\ \lambda_k - \lambda_{k-1} & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 & = \lambda_k \\ \lambda_2 & = \lambda_1 \\ & ... \\ \lambda_{k-1} & = \lambda_{k-2} \\ \lambda_k & = \lambda_{k-1} \end{cases} \iff$$

$$\iff \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_{k-1} = \lambda_k.$$

Detta är en icke-trivial lösning (för alla $\lambda_1 \neq 0$), och alltså är alla k vektorer linjärt beroende. Vi tar bort vektorn $v_k - v_1$ och undersöker om de $k-1$ återstående vektorerna är linjärt oberoende.

$$\lambda_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + \lambda_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) + ... + \lambda_{k-2}(\mathbf{v}_{k-2} - \mathbf{v}_{k-1}) + \lambda_{k-1}(\mathbf{v}_{k-1} - \mathbf{v}_k) = \mathbf{0} \iff$$

$$\iff \lambda_1\mathbf{v}_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)\mathbf{v}_2 + ... + (\lambda_{k-2} - \lambda_{k-3})\mathbf{v}_{k-2} + (\lambda_{k-1} - \lambda_{k-2})\mathbf{v}_{k-1} = \mathbf{0}.$$

Dessa vektorer är, fortfarande, linjärt oberoende, vilket betyder att alla koefficienter måste vara 0.

$$\begin{cases} \lambda_1 & = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_1 & = 0 \\ & ... \\ \lambda_{k-2} - \lambda_{k-3} & = 0 \\ \lambda_{k-1} - \lambda_{k-2} & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 & = 0 \\ \lambda_2 & = \lambda_1 \\ & ... \\ \lambda_{k-2} & = \lambda_{k-3} \\ \lambda_{k-1} & = \lambda_{k-2} \end{cases} \iff$$

$$\iff \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_{k-2} = \lambda_{k-1} = 0,$$

och alltså är dessa $k-1$ vektorer linjärt oberoende, vilket betyder att dimensionen är $k-1$.

6.9

a)

Vi behöver kontrollera att summan av två magiska kvadrater fortfarande är en magisk kvadrat, och att ett reellt tal gånger en magisk kvadrat fortfarande är en kvadrat. Multiplikationen med en skalär bibehåller uppenbarligen kvadratens magiska egenskap (man kan bara faktorisera ut talet från alla rad/kolonn/diagonalsummor, vilket endast ändrar vad det konstanta värdet är). Det är också uppenbart att summan av två magiska $n \times n$ kvadrater också är en magisk $n \times n$ kvadrat. Detta beror på att matrisaddition är elementvis, och alla rad/kolonn/diagonalsummor görs också elementvis, vilket betyder att man inte påverkar den magiska egenskapen genom att lägga ihop två stycken magiska kvadrater. $\square$

Man skulle kunna göra detta formellt genom att låta

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

vara 2 magiska $n \times n$ kvadrater, och sedan ställa upp radsummor, och sådant, och använda linjäriteten hos summor, men det är alldeles för mycket arbete för något som inses så lätt.

b)

Vi undersöker

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda_3 & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 & \lambda_1 & \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 & \lambda_1 + \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 \qquad - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 \qquad = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 \qquad\qquad = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \qquad = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 \qquad + \lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0. \quad \square$$

c)

Eftersom de tre matriserna i b) är linjärt oberoende, kan vi, med hjälp av sats, säga att de utgör en bas för MAG_3, och alltså är dimensionen 3 (eftersom det är tre bas*vektorer*). $\square$

d)

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 \qquad\quad - \lambda_3 = 4 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 9 \\ \lambda_1 - \lambda_2 \qquad\quad = 2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 3 \\ \lambda_1 \qquad\qquad\quad = 5 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 7 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \qquad\quad = 8 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 \qquad\quad + \lambda_3 = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 \qquad\qquad\quad = 5 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \qquad\quad = 8 \\ \lambda_1 - \lambda_2 \qquad\quad = 2 \\ \lambda_1 \qquad\quad + \lambda_3 = 6 \\ \lambda_1 \qquad\quad - \lambda_3 = 4 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 9 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 7 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 \qquad\qquad\quad = 5 \\ \quad \lambda_2 \qquad\quad = 3 \\ -\lambda_2 \qquad\quad = -3 \\ \qquad\quad \lambda_3 = 1 \\ \qquad -\lambda_3 = -1 \\ \quad \lambda_2 + \lambda_3 = 4 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = -2 \\ \quad \lambda_2 - \lambda_3 = 2 \\ -\lambda_2 - \lambda_3 = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 \qquad\qquad\quad = 5 \\ \quad \lambda_2 \qquad\quad = 3 \\ \qquad\qquad 0 = 0 \\ \qquad \lambda_3 \quad = 1 \\ \qquad \lambda_3 \quad = 1 \\ \qquad \lambda_3 \quad = 1 \\ \qquad \lambda_3 \quad = 1 \\ \qquad -\lambda_3 \quad = -1 \\ \qquad -\lambda_3 \quad = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 \qquad\qquad = 5 \\ \quad \lambda_2 \qquad = 3 \\ \qquad \lambda_3 = 1. \end{cases}$$

6.10

Antag att $\mathbf{U}_1$ har basen $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_k$, och att $\mathbf{U}_2$ har basen $f_1, ..., f_n$, alltså är dimensionerna för underrummen k respektive n. Dessa basvektorer måste, uppenbart, vara linjärt oberoende. Om de inte skulle vara det hade det varit möjligt att konstruera en nollskild vektor som en linjärkombination av basvektorerna i $\mathbf{U}_1$ och $\mathbf{U}_2$, vilket går emot det faktum att underrummen endast delar nollvektorn. Alltså kan man skriva

$$s_1\mathbf{e}_1 + \cdots + s_k\mathbf{e}_k = -t_1\mathbf{f}_1 - \cdots - t_n\mathbf{f}_n,$$

där samtliga koefficienter $s_1 = \cdots = s_k = t_1 = \cdots = t_n = 0$, vilket betyder att vektorerna i baserna, $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_k$ och $f_1, ..., f_n$, är linjärt oberoende i $\mathbf{V}$. Det finns alltså $k + n$ linjärt oberoende vektorer i $\mathbf{V}$, och detta innebär att

$$k + n \leq \dim \mathbf{V}. \quad \square$$

6.11

Vi använder Sats 3.

$$A^2 + AB = E \implies A(A + B) = E \implies (A + B)A = E \implies$$

$$\implies A(A + B) = (A + B)A \implies A^2 + AB = A^2 + BA \implies AB = BA. \quad \square$$

6.12

a)

Gausseliminationen gav

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 & = 0 \\ \quad\;\; x_2 + \;\; x_3 + 2x_4 & = 0 \\ & 0 = 0 \end{cases}$$

och eftersom vi kom fram till att nollrummets dimension var 2 måste, enligt dimensionsatsen, värderummets dimension vara $4-2=2$, och detta ser vi också ur Gausseliminationen eftersom vi har 2 pivotelement. För att hitta en bas väljer vi därför 2 linjärt oberoende kolonner i matrisen. Vi tar dem första två (vilket motiveras av pivotelementen, men det står typ inget om det i den här boken), vilket ger oss basen $(1,2,3)$ och $(1,0,2)$.

b)

Gausseliminationen gav

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 & = 0 \\ \quad\;\; x_2 - 3x_3 + x_4 & = 0 \\ & 0 = 0. \end{cases}$$

Ur ekvationssystemet ser vi att värderummets dimension är 2, vilket vi också får från dimensionssatsen eftersom nollrummets dimension är 2. Vi tar återigen 2 linjärt oberoende kolonner i matrisen som vår bas: $(1,1,2)$ och $(1,4,3)$.

6.13

Vi undersöker ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + 3x_2 \qquad + 2x_4 + \;\; x_5 = 0 \\ 2x_1 - \;\; x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + \;\; x_2 \qquad + \;\; x_4 - \;\; x_5 = 0 \\ \qquad\quad x_2 + x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + 3x_2 \qquad + 2x_4 + \;\; x_5 = 0 \\ \quad - 7x_2 + x_3 - \;\; x_4 \qquad\quad = 0 \\ \quad - 8x_2 \qquad - 5x_4 - 4x_5 = 0 \\ \qquad\quad x_2 + x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + 3x_2 \qquad\quad + \;\; 2x_4 + \;\;\; x_5 = 0 \\ \quad - 7x_2 + \;\; x_3 - \;\;\; x_4 \qquad\quad = 0 \\ \qquad\quad - 8x_3 - 27x_4 - 28x_5 = 0 \\ \qquad\quad 8x_3 + 27x_4 + 28x_5 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + 3x_2 \qquad\quad + \;\; 2x_4 + \;\;\; x_5 \qquad = 0 \\ \quad - 7x_2 + \;\; x_3 - \;\;\; x_4 \qquad\qquad = 0 \\ \qquad\quad 8x_3 + 27x_4 + 28x_5 \qquad = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 0 \end{cases}$$

och ur detta ser vi både att nolldimensionen är 2 (vi behöver införa 2 parametrar för att lösa ekvationssystemet), samt att rangen är 3 (det finns 3 pivotelement/oberoende kolonner i matrisen). (Om man bara ser den ena dimensionen kan man använda dimensionsatsen för att beräkna den andra.)

6.14

Antag att det finns två <u>olika</u> polynom, $f(t)$ och $g(t)$, av grad $2n-1$ som uppfyller att

$$f(t_i) = g(t_i) = a_i, \quad f'(t_i) = g'(t_i) = b_i, \quad i = 1, ..., n.$$

Bilda nu

$$h(t) = f(t) - g(t).$$

Då kommer h att vara ett polynom av grad $\leq 2n-1$ ($<$ uppstår om f och g har samma högstagradskoefficient), och dessutom kommer h att uppfylla

$$h(t_i) = 0, \quad h'(t_i) = 0, \quad i = 1, ..., n.$$

Detta betyder att h har minst n nollställen. Eftersom derivatan också har n nollställen följer det från Rolles sats att h' har $n-1$ nollställen i intervallen (t_i, t_{i+1}), $i = 1, ..., n-1$. Rolles sats säger ju att om man har en funktions som är kontinuerlig på ett slutet intervall, $[t_i, t_{i+1}]$, och deriverbar på det öppna intervallet, (t_i, t_{i+1}), som antar samma värde i ändpunkterna, $h(t_i) = h(t_{i+1})$, så måste derivatan ha ett nollställe på det öppna intervallet, (t_i, t_{i+1}). Vidare, eftersom $h'(t_i) = 0$, har h' ytterligare n nollställen, och därmed $2n-1$ nollställen totalt. Dock har h' grad $2n-2$, eftersom h har grad $2n-1$, och ett polynom av grad $2n-2$ kan högst ha $2n-2$ nollställen, men h' har $2n-1$, vilket är en motsägelse. Detta betyder att h' måste vara nollpolynomet,

$$h'(t) = 0 \iff h(t) = c \iff f(t) - g(t) = c \iff f(t) = g(t) + c,$$

men, eftersom $f(t_i) = g(t_i)$, måste $c = 0$, vilket ger oss likheten

$$f(t) = g(t),$$

vilket motsäger antagandet om att polynomen var olika, och alltså finns det exakt ett polynom av grad $2n-1$ som uppfyller interpolationsvillkoren. $\square$

(Att det ens existerar ett sådant polynom, av grad $2n-1$, följer av att vi har $2n$ okända och $2n$ ekvationer, vilket ger oss en lösning.)

Kapitel 7

7.1

$$(\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y}) = |\mathbf{x}||\mathbf{y}|\cos\theta \implies \cos\theta = \frac{(\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y})}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|} = \frac{((1,2,3,1,1)\,|\,(1,2,1,-1,1))}{|(1,2,3,1,1)||(1,2,1,-1,1)|} =$$

$$= \frac{1+4+3-1+1}{\sqrt{1+4+9+1+1}\sqrt{1+4+1+1+1}} = \frac{8}{\sqrt{16}\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{8}{16}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \theta = \frac{\pi}{4}.$$

7.2

För att de ska vara hörn i en kvadrat måste de vara vinkelräta, vilket vi kan kontrollera genom att ta skalärprodukten mellan ortsvektorerna som utgör sidorna på kvadraten. Vi behöver även kontrollera att alla sidor har samma längd. De relevanta ortsvektorerna är

$$\overline{P_0P}_1 = (2,3,4,5) - (1,2,3,4) = (1,1,1,1),$$
$$\overline{P_0P}_3 = (2,1,4,3) - (1,2,3,4) = (1,-1,1,-1),$$
$$\overline{P_1P}_0 = -\overline{P_0P}_1 = (-1,-1,-1,-1),$$
$$\overline{P_1P}_2 = (3,2,5,4) - (2,3,4,5) = (1,-1,1,-1),$$
$$\overline{P_2P}_1 = -\overline{P_1P}_2 = (-1,1,-1,1),$$
$$\overline{P_2P}_3 = (2,1,4,3) - (3,2,5,4) = (-1,-1,-1,-1),$$
$$\overline{P_3P}_2 = -\overline{P_2P}_3 = (1,1,1,1),$$
$$\overline{P_3P}_0 = -\overline{P_0P}_3 = (-1,1,-1,1).$$

Det är uppenbart att sidorna (ortsvektorerna) har samma längd. Skalärprodukterna som behöver undersökas är

$$(\overline{P_0P}_1\,|\,\overline{P_0P}_3) = ((1,1,1,1)\,|\,(1,-1,1,-1)) = 1-1+1-1 = 0,$$
$$(\overline{P_1P}_0\,|\,\overline{P_1P}_2) = ((-1,-1,-1,-1)\,|\,(1,-1,1,-1)) = -1+1-1+1 = 0,$$
$$(\overline{P_2P}_1\,|\,\overline{P_2P}_3) = ((-1,1,-1,1)\,|\,(-1,-1,-1,-1)) = 1-1+1-1 = 0,$$
$$(\overline{P_3P}_2\,|\,\overline{P_3P}_0) = ((1,1,1,1)\,|\,(-1,1,-1,1)) = -1+1-1+1 = 0,$$

vilket visar att alla hörn är vinkelräta, och alltså utgör punkterna en kvadrat i $\mathbf{R}^4$. $\square$

7.3

$$(\mathbf{u}-\mathbf{v}\,|\,\mathbf{u}-\mathbf{v}) = |\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2,$$

men vi kan också använda linjäriteten och kommutativiteten i skalärprodukten, samt att $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = |\mathbf{u}-\mathbf{v}|$, för att få

$$(\mathbf{u}-\mathbf{v}\,|\,\mathbf{u}-\mathbf{v}) = (\mathbf{u}\,|\,\mathbf{u}-\mathbf{v}) - (\mathbf{v}\,|\,\mathbf{u}-\mathbf{v}) = (\mathbf{u}-\mathbf{v}\,|\,\mathbf{u}) - (\mathbf{u}-\mathbf{v}\,|\,\mathbf{v}) =$$
$$= (\mathbf{u}\,|\,\mathbf{u}) - (\mathbf{v}\,|\,\mathbf{u}) - (\mathbf{u}\,|\,\mathbf{v}) + (\mathbf{v}\,|\,\mathbf{v}) = |\mathbf{u}|^2 - (\mathbf{u}\,|\,\mathbf{v}) - (\mathbf{u}\,|\,\mathbf{v}) + |\mathbf{v}|^2 =$$
$$= |\mathbf{u}|^2 - 2(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{v}) + |\mathbf{u}|^2 = 2|\mathbf{u}|^2 - 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta = 2|\mathbf{u}|^2 - 2|\mathbf{u}||\mathbf{u}|\cos\theta = 2|\mathbf{u}|^2(1-\cos\theta).$$

Detta ger oss likheten

$$|\mathbf{u}|^2 = 2|\mathbf{u}|^2(1-\cos\theta) \iff [\mathbf{u} \neq 0] \iff 1-\cos\theta = \frac{1}{2} \iff \cos\theta = \frac{1}{2} \implies \theta = \frac{\pi}{3}.$$

7.4

$$(\mathbf{e}_1 \,|\, \mathbf{e}_2) = ((2,1,0,1) \,|\, (0,2,1,-2)) = 0 + 2 + 0 - 2 = 0. \quad \square$$

Nu vill vi att

$$(s_1\mathbf{e}_1 + s_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{w} \,|\, \mathbf{e}_1) = 0 \iff s_1(\mathbf{e}_1 \,|\, \mathbf{e}_1) + s_2(\mathbf{e}_2 \,|\, \mathbf{e}_1) + (\mathbf{w} \,|\, \mathbf{e}_1) = 0 \iff$$

$$\iff s_1(4+1+0+1) + 0 + 2 + 2 + 0 + 2 = 0 \iff s_1 = -1$$

och

$$(s_1\mathbf{e}_1 + s_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{w} \,|\, \mathbf{e}_2) = 0 \iff s_1(\mathbf{e}_1 \,|\, \mathbf{e}_2) + s_2(\mathbf{e}_2 \,|\, \mathbf{e}_2) + (\mathbf{w} \,|\, \mathbf{e}_2) = 0 \iff$$

$$\iff 0 + s_2(0+4+1+4) + 0 + 4 + 1 - 4 = 0 \iff s_1 = -\frac{1}{9}.$$

Alternativt hade man kunnat använda formeln direkt

$$s_i = -\frac{(\mathbf{e}_i \,|\, \mathbf{w})}{(\mathbf{e}_i \,|\, \mathbf{e}_i)},$$

vars geometriska tolkning är att man projicerar $\mathbf{w}$ på basvektorerna och sedan när man skriver vektorn $s_1\mathbf{e}_1 + s_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{w}$ subtraherar man bort delarna av $\mathbf{w}$ som är parallella med basvektorerna, vilket kommer att bilda en vektor som är ortogonal mot basvektorerna, och alltså kan användas som en ny basvektor.

7.5

a)

Vi börjar med att bilda

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{|\mathbf{w}_1|} = \frac{1}{2}(1,1,1,1),$$

sedan tillämpar vi Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess för att bilda en ortonormerad bas.

$$\mathbf{w}_2' = s_{12}\mathbf{e}_1 + \mathbf{w}_2,$$

där

$$s_{12} = -\frac{(\mathbf{e}_1 \,|\, \mathbf{w}_2)}{(\mathbf{e}_1 \,|\, \mathbf{e}_1)} = [\mathbf{e}_1 \text{ normerad}] =$$

$$= -\frac{(\mathbf{e}_1 \,|\, \mathbf{w}_2)}{1} = -\frac{1}{2}((1,1,1,1) \,|\, (1,2,2,1)) = -\frac{1}{2}(1+2+2+1) = -3,$$

vilket ger oss

$$\mathbf{w}_2' = -3\mathbf{e}_1 + \mathbf{w}_2 = -\frac{3}{2}(1,1,1,1) + (1,2,2,1) = \frac{1}{2}(-1,1,1,-1).$$

Det råkade bli så att $|\mathbf{w}_2'| = 1$ redan, vilket betyder att vi inte behöver normera den, och $\mathbf{e}_2 = \mathbf{w}_2'$. Slutligen får vi den tredje basvektorn av

$$\mathbf{w}_3' = s_{13}\mathbf{e}_1 + s_{23}\mathbf{e}_2 + \mathbf{w}_3,$$

där

$$s_{13} = -\frac{(\mathbf{e}_1 \,|\, \mathbf{w}_3)}{(\mathbf{e}_1 \,|\, \mathbf{e}_1)} = -\frac{1}{2}((1,1,1,1) \,|\, (2,3,1,6)) = -\frac{1}{2}(2+3+1+6) = -6,$$

och

$$s_{23} = -\frac{(\mathbf{e}_2 \,|\, \mathbf{w}_3)}{(\mathbf{e}_2 \,|\, \mathbf{e}_2)} = -\frac{1}{2}((-1,1,1,-1) \,|\, (2,3,1,6)) = -\frac{1}{2}(-2+3+1+-6) = 2,$$

vilket betyder att

$$\mathbf{w}_3' = -6\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{w}_3 = -3(1,1,1,1) + (-1,1,1,-1) + (2,3,1,6) = (-2,1,-1,2) \implies$$

$$\implies \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{w}_3'}{|\mathbf{w}_3'|} = \frac{1}{\sqrt{4+1+1+4}}\mathbf{w}_3' = \frac{1}{\sqrt{10}}(-2,1,-1,2).$$

b)

Vi börjar med att ta

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{|\mathbf{w}_1|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,-1,-1).$$

Precis som ovan får vi att

$$\mathbf{w}_2' = -\frac{(\mathbf{e}_1 \,|\, \mathbf{w}_2)}{(\mathbf{e}_1 \,|\, \mathbf{e}_1)}\mathbf{e}_1 + \mathbf{w}_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{((1,0,-1,-1) \,|\, (0,1,1,0))}{1}\mathbf{e}_1 + \mathbf{w}_2 =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}(0+0-1-0)\mathbf{e}_1 + \mathbf{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,-1,-1) + (0,1,1,0) = \frac{1}{3}(1,3,2,-1),$$

och

$$|\mathbf{w}_2'| = \frac{1}{3}\sqrt{1+9+4+1} = \frac{1}{3}\sqrt{15} = \sqrt{\frac{5}{3}} \implies$$

$$\implies \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{w}_2'}{|\mathbf{w}_2'|} = \sqrt{\frac{3}{5}}\frac{1}{3}(1,3,2,-1) = \frac{1}{\sqrt{15}}(1,3,2,-1).$$

Slutligen är

$$\mathbf{w}_3' = -\frac{(\mathbf{e}_1 \,|\, \mathbf{w}_3)}{(\mathbf{e}_1 \,|\, \mathbf{e}_1)}\mathbf{e}_1 - \frac{(\mathbf{e}_2 \,|\, \mathbf{w}_3)}{(\mathbf{e}_2 \,|\, \mathbf{e}_2)}\mathbf{e}_2 + \mathbf{w}_3 = -(\mathbf{e}_1 \,|\, \mathbf{w}_3)\mathbf{e}_1 - (\mathbf{e}_2 \,|\, \mathbf{w}_3)\mathbf{e}_2 + \mathbf{w}_3 =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}((1,0,-1,-1) \,|\, (1,1,1,1))\mathbf{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{15}}((1,3,2,-1) \,|\, (1,1,1,1))\mathbf{e}_2 + \mathbf{w}_3 =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}(1+0-1-1)\mathbf{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{15}}(1+3+2-1)\mathbf{e}_2 + \mathbf{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{e}_1 - \frac{5}{\sqrt{15}}\mathbf{e}_2 + \mathbf{w}_3 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,-1,-1) - \frac{5}{\sqrt{15}}\frac{1}{\sqrt{15}}(1,3,2,-1) + (1,1,1,1) =$$

$$= \frac{1}{15}(5,0,-5,-5) - \frac{1}{15}(5,15,10,-5) + \frac{1}{15}(15,15,15,15) =$$

$$= \frac{1}{15}(15,0,0,15) = (1,0,0,1) \implies \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{w}_3'}{|\mathbf{w}_3'|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1).$$

7.6

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \iff [x_2 = s_1,\ x_3 = s_2,\ x_4 = s_3] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_3 - 4x_4 = -2s_1 + s_2 - 4s_3 \\ x_2 = s_1 \\ x_3 = s_2 \\ x_4 = s_3 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s_3 \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Alltså utgör vektorerna $\mathbf{w}_1 = (1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{w}_2 = (-2, 1, 0, 0)$, och $\mathbf{w}_3 = (-4, 0, 0, 1)$ en bas för underrum. Vi tillämpar nu Gram-Schmidt för att bilda en ortonormerad bas. Låt

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{|\mathbf{w}_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0).$$

$$\mathbf{w}_2' = s_{12}\mathbf{e}_1 + \mathbf{w}_2 = -\frac{(\mathbf{e}_1 \,|\, \mathbf{w}_2)}{(\mathbf{e}_1 \,|\, \mathbf{e}_1)}\mathbf{e}_1 + \mathbf{w}_2 = -(\mathbf{e}_1 \,|\, \mathbf{w}_2)\mathbf{e}_1 + \mathbf{w}_2 =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}((1, 0, 1, 0) \,|\, (-2, 1, 0, 0))\mathbf{e}_1 + \mathbf{w}_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(-2 + 0 + 0 + 0)\mathbf{e}_1 + \mathbf{w}_2 =$$

$$= \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0) + (-2, 1, 0, 0) = (-1, 1, 1, 0) \implies \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{w}_2'}{|\mathbf{w}_2'|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1, 0),$$

och

$$\mathbf{w}_3' = s_{13}\mathbf{e}_1 + s_{23}\mathbf{e}_2 + \mathbf{w}_2 = -\frac{(\mathbf{e}_1 \,|\, \mathbf{w}_3)}{(\mathbf{e}_1 \,|\, \mathbf{e}_1)}\mathbf{e}_1 - \frac{(\mathbf{e}_2 \,|\, \mathbf{w}_3)}{(\mathbf{e}_2 \,|\, \mathbf{e}_2)}\mathbf{e}_2 + \mathbf{w}_3 =$$

$$= -(\mathbf{e}_1 \,|\, \mathbf{w}_3)\mathbf{e}_1 - (\mathbf{e}_2 \,|\, \mathbf{w}_3)\mathbf{e}_2 + \mathbf{w}_3 =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}((1, 0, 1, 0) \,|\, (-4, 0, 0, 1))\mathbf{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}((-1, 1, 1, 0) \,|\, (-4, 0, 0, 1))\mathbf{e}_2 + \mathbf{w}_3 =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}(-4 + 0 + 0 + 0)\mathbf{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}(4 + 0 + 0 + 0)\mathbf{e}_2 + \mathbf{w}_3 =$$

$$= 2\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0) - \frac{4}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1, 0) + (-4, 0, 0, 1) =$$

$$= (2, 0, 2, 0) - \frac{1}{3}(-4, 4, 4, 0) + (-4, 0, 0, 1) = \frac{1}{3}(-2, -4, 2, 3) \implies$$

$$\implies \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{w}_3'}{|\mathbf{w}_3'|} = \frac{3}{\sqrt{4 + 16 + 4 + 9}}\frac{1}{3}(-2, -4, 2, 3) = \frac{1}{\sqrt{33}}(-2, -4, 2, 3).$$

7.7

För att matrisen ska vara ortogonal måste alla kolonnerna (och raderna) utgöra en ortonormerad bas.

$$A = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 6 & b \\ 3 & 2 & c \\ 6 & a & 2 \end{bmatrix} \implies$$

$$\implies A_1 = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \quad , \quad A_2 = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ a \end{bmatrix} \quad , \quad A_3 = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} b \\ c \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vi vill nu att

$$A_i^t A_i = 1,$$

och att

$$A_i^t A_j = 0, \ i \neq j.$$

A_1 är redan färdignormerad (annars hade uppgift blivit lite omöjlig), och

$$A_1^t A_2 = \frac{1}{49}(2 \cdot 6 + 3 \cdot 2 + 6 \cdot a) = \frac{1}{49}(18 + 6a) = 0 \iff a = -3,$$

$$A_1^t A_3 = \frac{1}{49}(2 \cdot b + 3 \cdot c + 6 \cdot 2) = \frac{1}{49}(2b + 3c + 12) = 0 \iff 2b + 3c = -12,$$

$$A_2^t A_3 = \frac{1}{49}(6 \cdot b + 2 \cdot c + a \cdot 2) = \frac{1}{49}(6b + 2c + 2a) = \frac{1}{49}(6b + 2c - 6) = 0 \iff 3b + c = 3,$$

vilket ger oss ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2b + 3c = -12 \\ 3b + \ \ c = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2b + 3c = -12 \\ \quad -7c = 42 \end{cases} \iff \begin{cases} b \quad\quad = -6 - 3c/2 = 3 \\ \quad\quad c = -6. \end{cases}$$

Man kan snabbt kontrollera att kolonnerna har absolutbelopp 1. Detta ger oss lösningen

$$\begin{cases} a = -3 \\ b = 3 \\ c = -6. \end{cases}$$

7.8

Att A och B är ortogonala betyder att $AA^t = BB^t = E$. Vi betraktar därför

$$AB(AB)^t = ABB^tA^t = AEA^t = AA^t = E. \quad \square$$

7.9

Jag kommer att beteckna alla matriskolonner med A_i och Q_i, och motsvarande vektorversioner med $\mathbf{a}_i$ respektive $\mathbf{q}_i$.

a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \implies A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Vi bildare en ortogonal bas för A_1, A_2, A_3 med Gram-Schmidt.

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}_1|} = \frac{(1,-2,2)}{|(1,-2,2)|} = \frac{1}{3}(1,-2,2).$$

$$\mathbf{q}_2 \parallel \mathbf{a}_2 - \frac{(\mathbf{q}_1 \,|\, \mathbf{a}_2)}{(\mathbf{q}_1 \,|\, \mathbf{q}_1)}\mathbf{q}_1 = \mathbf{a}_2 - (\mathbf{q}_1 \,|\, \mathbf{a}_2)\mathbf{q}_1 =$$

$$= (1,0,1) - \frac{1}{3}((1,-2,2) \,|\, (1,0,1))\mathbf{q}_1 = (1,0,1) - \frac{1}{3}(1-0+2)\frac{1}{3}(1,-2,2) =$$

$$= (1,0,1) - \frac{1}{3}(1,-2,2) = \frac{1}{3}(2,2,1).$$

Denna vektor råkar redan vara normerad, så $\mathbf{q}_2 = \frac{1}{3}(2,2,1)$.

$$\mathbf{q}_3 \parallel \mathbf{a}_3 - \frac{(\mathbf{q}_1 \,|\, \mathbf{a}_3)}{(\mathbf{q}_1 \,|\, \mathbf{q}_1)}\mathbf{q}_1 - \frac{(\mathbf{q}_2 \,|\, \mathbf{a}_3)}{(\mathbf{q}_2 \,|\, \mathbf{q}_2)}\mathbf{q}_2 = \mathbf{a}_3 - (\mathbf{q}_1 \,|\, \mathbf{a}_3)\mathbf{q}_1 - (\mathbf{q}_2 \,|\, \mathbf{a}_3)\mathbf{q}_2 =$$

$$= \mathbf{a}_3 - \frac{1}{3}((1,-2,2) \,|\, (1,1,5))\mathbf{q}_1 - \frac{1}{3}((2,2,1) \,|\, (1,1,5))\mathbf{q}_2 =$$

$$= \mathbf{a}_3 - \frac{1}{3}(1-2+10)\mathbf{q}_1 - \frac{1}{3}(2+2+5)\mathbf{q}_2 =$$

$$= (1,1,5) - 3 \cdot \frac{1}{3}(1,-2,2) - 3 \cdot \frac{1}{3}(2,2,1) = (-2,1,2) \implies$$

$$\implies \mathbf{q}_3 = \frac{(-2,1,2)}{|(-2,1,2)|} = \frac{1}{3}(-2,1,2).$$

Detta ger oss den ortogonala matrisen

$$Q = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

För att konstruera R betraktar vi systemet

$$\begin{cases} A_1 = r_{11}Q_1 \\ A_2 = r_{12}Q_1 + r_{22}Q_2 \\ A_3 = r_{13}Q_1 + r_{23}Q_2 + r_{33}Q_3 \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = r_{11} \cdot \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \iff r_{11} = 3,$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = r_{12} \cdot \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + r_{22} \cdot \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} r_{12} + 2r_{22} = 3 \\ -2r_{12} + 2r_{22} = 0 \\ 2r_{12} + r_{22} = 3 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -r_{12} + \ \ r_{22} = 0 \\ \ \ r_{12} + 2r_{22} = 3 \\ 2r_{12} + \ \ r_{22} = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} -r_{12} + \ \ r_{22} = 0 \\ \qquad\quad 3r_{22} = 3 \\ \qquad\quad 3r_{22} = 3 \end{cases} \iff r_{12} = r_{22} = 1,$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = r_{13} \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + r_{23} \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + r_{33} \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} \ \ r_{13} + 2r_{23} - 2r_{33} = 3 \\ -2r_{13} + 2r_{23} + \ \ r_{33} = 3 \\ \ \ 2r_{13} + \ \ r_{23} + 2r_{33} = 15 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} r_{13} + 2r_{23} - 2r_{33} = 3 \\ \qquad\quad 6r_{23} - 3r_{33} = 9 \\ \quad -3r_{23} + 6r_{33} = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} r_{13} + 2r_{23} - 2r_{33} = 3 \\ \qquad\quad 2r_{23} - \ \ r_{33} = 3 \\ \qquad\qquad\quad 3r_{33} = 9 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} r_{13} = 3 - 2r_{23} + 2r_{33} = 3 \\ r_{23} = (3 + r_{33})/2 = 3 \\ r_{33} = 3 \end{cases} \implies R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Alltså är

$$A = QR \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

b)

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \implies A_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad , \quad A_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Gram-Schmidt:

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}_1|} = \frac{(-2,1,1)}{|(-2,1,1)|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1).$$

$$\mathbf{q}_2 \parallel \mathbf{a}_2 - \frac{(\mathbf{q}_1 \,|\, \mathbf{a}_2)}{(\mathbf{q}_1 \,|\, \mathbf{q}_1)}\mathbf{q}_1 = \mathbf{a}_2 - (\mathbf{q}_1 \,|\, \mathbf{a}_2)\mathbf{q}_1 =$$

$$= (0,3,3) - \frac{1}{\sqrt{6}}((-2,1,1) \,|\, (0,3,3))\mathbf{q}_1 = (0,3,3) - \frac{1}{\sqrt{6}}(-0+3+3)\frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1) =$$

$$= (0,3,3) - (-2,1,1) = (2,2,2) \implies$$

$$\implies \mathbf{q}_2 = \frac{(2,2,2)}{|(2,2,2)|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1).$$

$$\mathbf{q}_3 \parallel \mathbf{a}_3 - \frac{(\mathbf{q}_1 \,|\, \mathbf{a}_3)}{(\mathbf{q}_1 \,|\, \mathbf{q}_1)}\mathbf{q}_1 - \frac{(\mathbf{q}_2 \,|\, \mathbf{a}_3)}{(\mathbf{q}_2 \,|\, \mathbf{q}_2)}\mathbf{q}_2 = \mathbf{a}_3 - (\mathbf{q}_1 \,|\, \mathbf{a}_3)\mathbf{q}_1 - (\mathbf{q}_2 \,|\, \mathbf{a}_3)\mathbf{q}_2 =$$

$$= \mathbf{a}_3 - \frac{1}{\sqrt{6}}((-2,1,1) \,|\, (4,4,-2))\mathbf{q}_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}((1,1,1) \,|\, (4,4,-2))\mathbf{q}_2 =$$

$$= \mathbf{a}_3 - \frac{1}{\sqrt{6}}(-8+4-2)\frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1) - \frac{1}{\sqrt{3}}(4+4-2)\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) =$$

$$= (4,4,-2) + (-2,1,1) - 2(1,1,1) = (0,3,-3) \implies$$

$$\implies \mathbf{q}_3 = \frac{(0,3,-3)}{|(0,3,-3)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1).$$

Nu har vi den ortogonala matrisen

$$Q = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -2 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Återigen betraktas

$$\begin{cases} A_1 = r_{11} Q_1 \\ A_2 = r_{12} Q_1 + r_{22} Q_2 \\ A_3 = r_{13} Q_1 + r_{23} Q_2 + r_{33} Q_3 \end{cases}$$

för att bilda matrisen R.

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = r_{11} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \iff r_{11} = \sqrt{6},$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = r_{12} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + r_{22} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \iff \begin{cases} -2r_{12} + \sqrt{2} r_{22} = 0 \\ r_{12} + \sqrt{2} r_{22} = 3\sqrt{6} \\ r_{12} + \sqrt{2} r_{22} = 3\sqrt{6} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -2r_{12} + \sqrt{2} r_{22} = 0 \\ 3\sqrt{2} r_{22} = 6\sqrt{6} \end{cases} \iff \begin{cases} r_{12} = r_{22}/\sqrt{2} = \sqrt{6} \\ r_{22} = 2\sqrt{3} \end{cases},$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = r_{13} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + r_{23} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} + r_{33} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -2r_{13} + \sqrt{2} r_{23} = 4\sqrt{6} \\ r_{13} + \sqrt{2} r_{23} + \sqrt{3} r_{33} = 4\sqrt{6} \\ r_{13} + \sqrt{2} r_{23} - \sqrt{3} r_{33} = -2\sqrt{6} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -2r_{13} + \sqrt{2} r_{23} = 4\sqrt{6} \\ 3\sqrt{2} r_{23} + 2\sqrt{3} r_{33} = 12\sqrt{6} \\ 3\sqrt{2} r_{23} - 2\sqrt{3} r_{33} = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -2r_{13} + \sqrt{2} r_{23} = 4\sqrt{6} \\ 3\sqrt{2} r_{23} + 2\sqrt{3} r_{33} = 12\sqrt{6} \\ -4\sqrt{3} r_{33} = -12\sqrt{6} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} r_{13} = -2\sqrt{6} + r_{23}/\sqrt{2} = -\sqrt{6} \\ r_{23} = 4\sqrt{3} - \sqrt{2} r_{33}/\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \\ r_{33} = 3\sqrt{2} \end{cases} \implies$$

$$\implies R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & \sqrt{6} & -\sqrt{6} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 3\sqrt{2} \end{bmatrix} = \sqrt{6} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix},$$

vilket ger oss QR-faktoriseringen

$$A = QR \iff \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -2 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \sqrt{6}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

7.10

a)

Vi betraktar skalärprodukten

$$(\mathbf{u} - \mathbf{u}' \,|\, \mathbf{e}_m) = \left(\mathbf{u} - \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{u} \,|\, \mathbf{e}_k)\mathbf{e}_k \,\middle|\, \mathbf{e}_m \right) =$$

$$= (\mathbf{u} \,|\, \mathbf{e}_m) - \left(\sum_{k=1}^{n} (\mathbf{u} \,|\, \mathbf{e}_k)\mathbf{e}_k \,\middle|\, \mathbf{e}_m \right) = (\mathbf{u} \,|\, \mathbf{e}_m) - \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{u} \,|\, \mathbf{e}_k)(\mathbf{e}_k \,|\, \mathbf{e}_m),$$

och, eftersom $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ är ortonormerad,

$$(\mathbf{e}_k \,|\, \mathbf{e}_m) = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ 1, & k = m, \end{cases}$$

vilket betyder att

$$(\mathbf{u} \,|\, \mathbf{e}_m) - \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{u} \,|\, \mathbf{e}_k)(\mathbf{e}_k \,|\, \mathbf{e}_m) = (\mathbf{u} \,|\, \mathbf{e}_m) - (\mathbf{u} \,|\, \mathbf{e}_m) \cdot 1 = 0. \quad \square$$

b)

Vi har det faktum att $\mathbf{u} - \mathbf{u}'$ och $\mathbf{u}'$ är ortogonala i åtanke, och betraktar skalärprodukten

$$(\mathbf{u} - \mathbf{u}' \,|\, \mathbf{u} - \mathbf{u}') = (\mathbf{u} \,|\, \mathbf{u} - \mathbf{u}') - \underbrace{(\mathbf{u}' \,|\, \mathbf{u} - \mathbf{u}')}_{=\,0} = (\mathbf{u} \,|\, \mathbf{u}) - (\mathbf{u} \,|\, \mathbf{u}') = |\mathbf{u}|^2 - (\mathbf{u} \,|\, \mathbf{u}'),$$

men vi hade också kunnat skriva

$$(\mathbf{u} - \mathbf{u}' \,|\, \mathbf{u} - \mathbf{u}') = (\mathbf{u} \,|\, \mathbf{u}) - (\mathbf{u} \,|\, \mathbf{u}') - (\mathbf{u}' \,|\, \mathbf{u}) + (\mathbf{u}' \,|\, \mathbf{u}') = |\mathbf{u}|^2 - 2(\mathbf{u} \,|\, \mathbf{u}') + |\mathbf{u}'|^2,$$

där

$$|\mathbf{u}'|^2 = (\mathbf{u}' \,|\, \mathbf{u}') = \left(\sum_{k=1}^{n} (\mathbf{u} \,|\, \mathbf{e}_k)\mathbf{e}_k \,\middle|\, \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{u} \,|\, \mathbf{e}_k)\mathbf{e}_k \right) = \sum_{k=1}^{n} ((\mathbf{u} \,|\, \mathbf{e}_k)\mathbf{e}_k \,|\, (\mathbf{u} \,|\, \mathbf{e}_k)\mathbf{e}_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{u} \,|\, \mathbf{e}_k)^2 \underbrace{(\mathbf{e}_k \,|\, \mathbf{e}_k)}_{=\,1} = \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{u} \,|\, \mathbf{e}_k)^2,$$

med detta har vi bildat likheten

$$|\mathbf{u}|^2 - (\mathbf{u}\,|\,\mathbf{u}') = |\mathbf{u}|^2 - 2(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{u}') + |\mathbf{u}'|^2 \iff (\mathbf{u}\,|\,\mathbf{u}') = |\mathbf{u}'|^2 = \sum_{k=1}^{n}(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{e}_k)^2,$$

och $\mathbf{u}'$ är summan av projektionen av $\mathbf{u}$ på alla basvektorer, vilket betyder att vi minskar längden på vektorn, om inte $\mathbf{u}$ redan är en linjärkombination av $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$. Detta betyder att längden på $\mathbf{u}'$ är som mest samma som $\mathbf{u}$, vilket sker om de är parallella, och alltså är

$$(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{u}') \leq (\mathbf{u}\,|\,\mathbf{u}) = |\mathbf{u}|^2,$$

vilket visar Bessels olikhet,

$$\sum_{k=1}^{n}(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{e}_k)^2 = (\mathbf{u}\,|\,\mathbf{u}') \leq |\mathbf{u}|^2. \quad \square$$

7.11

a)

Vi behöver kontrollera att

$$(\alpha f + \beta g\,|\,h) = \alpha(f\,|\,h) + \beta(g\,|\,h),\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

$$(f\,|\,g) = (g\,|\,f),$$

och

$$(f\,|\,f) > 0,\ f \neq 0.$$

Det andra och tredje villkoret är uppenbara. För det tredje gäller det att $f^2 > 0$ på ett öppet intervall (eftersom f inte får vara identiskt lika med 0), och $e^{-t} > 0,\ t \in (0, \infty)$, vilket betyder att integralen kommer att vara positiv. Låt nu $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, och $f(t), g(t), h(t) \in \mathbf{P}_n$.

$$(\alpha f + \beta g\,|\,h) = \int_0^\infty (\alpha f(t) + \beta g(t))h(t)e^{-t}\,dt =$$

$$= \int_0^\infty \alpha f(t)h(t)e^{-t}\,dt + \int_0^\infty \beta g(t)h(t)e^{-t}\,dt =$$

$$= \alpha \int_0^\infty f(t)h(t)e^{-t}\,dt + \beta \int_0^\infty g(t)h(t)e^{-t}\,dt = \alpha(f\,|\,h) + \beta(g\,|\,h). \quad \square$$

b)

Först beräknar vi några integraler:

$$I_n = \int_0^\infty t^n e^{-t}\,dt = [\text{partialintegration}] =$$

$$= \underbrace{[-t^n e^{-t}]_0^\infty}_{=\,0} - \int_0^\infty -nt^{n-1}e^{-t}\,dt = n\int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}\,dt = nI_{n-1},$$

och

$$I_0 = \int_0^\infty t^0 e^{-t}\,dt = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = [-e^{-t}]_0^\infty = -0-(-1) = 1,$$

vilket ger oss att

$$\begin{aligned} I_1 &= 1\cdot I_0 = 1\cdot 1 = 1,\\ I_2 &= 2\cdot I_1 = 2\cdot 1 = 2,\\ I_3 &= 3\cdot I_2 = 3\cdot 2 = 6,\\ I_4 &= 4\cdot I_3 = 4\cdot 6 = 24. \end{aligned}$$

För att bilda en ortonormerad bas, utgår vi från 1 och bildar den första basfunktionen enligt

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{(1\,|\,1)^{1/2}} = \left(\int_0^\infty 1\cdot 1\cdot e^{-t}\,dt\right)^{-1/2} = (I_0)^{-1/2} = 1.$$

Gram-Schmidt ger nu att

$$\tilde{\varphi}_1(t) = t - \frac{(\varphi_0\,|\,t)}{(\varphi_0\,|\,\varphi_0)}\varphi_0 = t - (\varphi_0\,|\,t)\varphi_0 =$$

$$= t - \int_0^\infty 1\cdot t\cdot e^{-t}\,dt\cdot 1 = t - I_1 = t-1,$$

och med normering får vi att

$$\varphi_1(t) = \frac{\tilde{\varphi}_1}{(\tilde{\varphi}_1\,|\,\tilde{\varphi}_1)^{1/2}} = \frac{t-1}{\int_0^\infty (t-1)\cdot(t-1)e^{-t}\,dt} =$$

$$= \left(\int_0^\infty (t-1)^2 e^{-t}\,dt\right)^{-1/2}(t-1) = \left(\int_0^\infty (t^2-2t+1)e^{-t}\,dt\right)^{-1/2}(t-1) =$$

$$= \left(\int_0^\infty t^2e^{-t}\,dt - 2\int_0^\infty te^{-t}\,dt + \int_0^\infty e^{-t}\,dt\right)^{-1/2}(t-1) =$$

$$= (I_2 - 2I_1 + I_{0=\ 2-2+1=1})^{-1/2}(t-1) = t-1.$$

Den sista basfunktionen får vi av

$$\tilde{\varphi}_2(t) = t^2 - \frac{(\varphi_0\,|\,t^2)}{(\varphi_0\,|\,\varphi_0)}\varphi_0 - \frac{(\varphi_1\,|\,t^2)}{(\varphi_1\,|\,\varphi_1)}\varphi_1 = t^2 - (\varphi_0\,|\,t^2)\varphi_0 - (\varphi_1\,|\,t^2)\varphi_1 =$$

$$= t^2 - \int_0^\infty t^2e^{-t}\,dt\cdot 1 - \int_0^\infty (t-1)t^2e^{-t}\,dt\cdot(t-1) =$$

$$= t^2 - I_2 + \left(\int_0^\infty t^2e^{-t}\,dt - \int_0^\infty t^3e^{-t}\,dt\right)(t-1) = t^2 - I_2 + \underbrace{(I_2 - I_3)}_{=\ 2-6=-4}(t-1)$$

$$= t^2 - 2 - 4(t-1) = t^2 - 2 - 4t + 4 = t^2 - 4t + 2,$$

och eftersom

$$(\tilde{\varphi}_2\,|\,\tilde{\varphi}_2) = \int_0^\infty (t^2-4t+2)^2e^{-t}\,dt =$$

$$= \left[(t^2-4t+2)^2 = t^4+16t^2+4-8t^3-8t+4t^2 = t^4-8t^3+20t^2-16t+4\right] =$$

$$= \int_0^\infty t^4e^{-t}\,dt - 8\int_0^\infty t^3e^{-t}\,dt + 20\int_0^\infty t^2e^{-t}\,dt - 16\int_0^\infty te^{-t}\,dt + 4\int_0^\infty e^{-t}\,dt =$$

$$= I_4 - 8I_3 + 20I_2 - 16I_1 + 4I_0 = 24-48+40-16+4 = 4,$$

så blir

$$\varphi_2(t) = \frac{\tilde{\varphi}_2}{(\tilde{\varphi}_2 \mid \tilde{\varphi}_2)^{1/2}} = \frac{1}{2}\tilde{\varphi}_2(t) = \frac{1}{2}t^2 - 2t + 1.$$

7.12

$$f_k(t) = \frac{d^k}{dt^k}(t^2-1)^k \quad , \quad I_k = \int_{-1}^1 (t^2-1)^k\,dt \quad ,$$

$$(f_k \mid f_j) = (-1)^k \int_{-1}^1 (t^2-1)^k \frac{d^{k+j}}{dt^{k+j}}(t^2-1)^j\,dt.$$

a)

$$I_k = \int_{-1}^1 (t^2-1)^k\,dt = \left[t(t^2-1)^k\right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 t\cdot k\cdot 2t(t^2-1)^{k-1}\,dt =$$

$$= (1\cdot(1^2-1)^k) - (-1\cdot((-1)^2-1)^k) - \int_{-1}^1 t\cdot 2kt(t^2-1)^{k-1}\,dt =$$

$$= -2k\int_{-1}^1 t^2(t^2-1)^{k-1}\,dt = -2k\int_{-1}^1 (t^2-1+1)(t^2-1)^{k-1}\,dt =$$

$$= -2k\int_{-1}^1 ((t^2-1)^k + (t^2-1)^{k-1})\,dt = -2k\left(\int_{-1}^1 (t^2-1)^k\,dt + \int_{-1}^1 (t^2-1)^{k-1}\,dt\right) =$$

$$= -2k(I_k + I_{k-1}). \quad \square$$

b)

Den någorlunda suspekta notationen !! är en slags "dubbelfakultet", och $n!! = n(n-2)(n-4)...4\cdot 2$, om n är jämnt. Om n är udda blir det istället $n!! = n(n-2)(n-4)...3\cdot 1$.

$$I_k = -2k(I_k + I_{k-1}) = -2kI_k - 2kI_{k-1} \iff (2k+1)I_k = -2kI_{k-1} \iff$$

$$\iff I_k = -\frac{2k}{2k+1}I_{k-1} = (-1)^2\frac{2k}{2k+1}\frac{2k-2}{2k-1}I_{k-2},$$

och upprepar man detta hela vägen ner till I_0 får man

$$I_k = (-1)^k\frac{2k(2k-2)(2k-4)...4\cdot 2}{(2k+1)(2k-1)(2k-3)...3\cdot 1}I_0 =$$

$$= (-1)^k\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\int_{-1}^1 (t^2-1)^0\,dt = (-1)^k\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\cdot 2. \quad \square$$

$$(f_k \mid f_k) = \int_{-1}^{1} \frac{d^k}{dt^k}(t^2-1)^k \frac{d^k}{dt^k}(t^2-1)^k \, dt = [\text{partialintegration}] =$$

$$= \underbrace{\left[\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}(t^2-1)^k \frac{d^k}{dt^k}(t^2-1)^k\right]_{-1}^{1}}_{=\,0} - \int_{-1}^{1} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}(t^2-1)^k \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}}(t^2-1)^k \, dt =$$

$$= [\text{partialintegration } k-1 \text{ gånger till}] =$$

$$= \left[(t^2-1)^k \frac{d^{2k-1}}{dt^{2k-1}}(t^2-1)^k\right]_{-1}^{1} + (-1)^k \int_{-1}^{1} (t^2-1)^k \frac{d^{2k}}{dt^{2k}}(t^2-1)^k \, dt =$$

$$= (-1)^k \int_{-1}^{1} (t^2-1)^k \frac{d^{2k}}{dt^{2k}}(t^2-1)^k \, dt.$$

Låt nu

$$L_n = (-1)^k \int_{-1}^{1} (t^2-1)^n \frac{d^{2k}}{dt^{2k}}(t^2-1)^k \, dt = [\text{partialintegration}] =$$

$$= \underbrace{\left[(-1)^k t(t^2-1)^n \frac{d^{2k}}{dt^{2k}}(t^2-1)^k\right]_{-1}^{1}}_{=\,0} -$$

$$-(-1)^k \int_{-1}^{1} \left(t \cdot 2nt(t^2-1)^{n-1} + t(t^2-1)^n \frac{d^{2k+1}}{dt^{2k+1}}(t^2-1)^k\right) dt =$$

$$= (-1)^{k+1} 2n \int_{-1}^{1} t^2 (t^2-1)^{n-1} \frac{d^{2k}}{dt^{2k}}(t^2-1)^k \, dt +$$

$$+(-1)^{k+1} \int_{-1}^{1} t(t^2-1)^n \frac{d^{2k+1}}{dt^{2k+1}}(t^2-1)^k \, dt =$$

$$= \left[(t^2-1)^k \text{ har grad } 2k \implies \frac{d^{2k+1}}{dt^{2k+1}}(t^2-1)^k = 0\right] =$$

$$= (-1)^{k+1} 2n \int_{-1}^{1} t^2 (t^2-1)^{n-1} \frac{d^{2k}}{dt^{2k}}(t^2-1)^k \, dt + 0 =$$

$$= (-1)^{k+1} 2n \int_{-1}^{1} (t^2-1+1)(t^2-1)^{n-1} \frac{d^{2k}}{dt^{2k}}(t^2-1)^k \, dt =$$

$$= -2n(-1)^k \int_{-1}^{1} (t^2-1)^n \frac{d^{2k}}{dt^{2k}}(t^2-1)^k \, dt - 2n(-1)^k \int_{-1}^{1} (t^2-1)^{n-1} \frac{d^{2k}}{dt^{2k}}(t^2-1)^k \, dt =$$

$$= -2nL_n - 2nL_{n-1} \iff L_n = -2nL_n - 2nL_{n-1} \iff$$

$$\iff (2n+1)L_n = -2nL_{n-1} \iff L_n = -\frac{2n}{2n+1} L_{n-1},$$

vilket är samma rekursionsformel som för I_k, och alltså är

$$L_n = (-1)^n \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} L_0,$$

där

$$L_0 = (-1)^k \int_{-1}^{1} (t^2-1)^0 \frac{d^{2k}}{dt^{2k}}(t^2-1)^k \, dt = (-1)^k \int_{-1}^{1} \frac{d^{2k}}{dt^{2k}}(t^2-1)^k \, dt =$$

$$= (-1)^k \left[\frac{d^{2k-1}}{dt^{2k-1}}(t^2-1)^k \right]_{-1}^{1}.$$

Eftersom $(t^2-1)^k$ har grad $2k$, och vi deriverar $2k-1$ gånger, behöver vi ta reda på koefficienterna för högstagradstermerna. Alla termer med grad $< 2k-1$ försvinner. Binomialsatsen ger att

$$(t^2-1)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (t^2)^{k-j} 1^j = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} t^{2k-2j},$$

här ser vi att det inte finns någon term som har $2k-1$, och att t^{2k} har koefficienten $\binom{k}{0} = 1$, vilket betyder att

$$L_0 = (-1)^k \left[\frac{d^{2k-1}}{dt^{2k-1}}(t^2-1)^k \right]_{-1}^{1} = (-1)^k \left[\frac{d^{2k-1}}{dt^{2k-1}} t^{2k} \right]_{-1}^{1} =$$

$$= (-1)^k \left[(2k)(2k-1)(2k-2)...3 \cdot 2t \right]_{-1}^{1} = (-1)^k \left[(2k)!t \right]_{-1}^{1} =$$

$$= (-1)^k (2k)!(1-(-1)) = 2(-1)^k (2k)!$$

Vi är intresserade av

$$L_k = (f_k \mid f_k) = \underbrace{(-1)^k \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}}_{= I_k/2} L_0 = \frac{I_k}{2} 2(-1)^k (2k)! = (-1)^k (2k)! \, I_k =$$

$$= (-1)^k (2k)! (-1)^k \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \cdot 2 = 2(2k)!(-1)^{2k} \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} = 2(2k)! \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} =$$

$$= 2(2k)(2k-1)...2 \cdot 1 \cdot \frac{(2k)(2k-2)...4 \cdot 2}{(2k+1)(2k-1)...3 \cdot 1} =$$

$$= 2(2k)(2k-2)...4 \cdot 2 \cdot \frac{(2k-1)(2k-3)...3 \cdot 1 \cdot 2^k (k(k-1)...2 \cdot 1)}{(2k+1)(2k-1)...3 \cdot 1} =$$

$$= 2 \cdot 2^k (k(k-1)...2 \cdot 1) \cdot \frac{2^k k!}{2k+1} = 2^{2k} (k!)^2 \cdot \frac{2}{2k+1}. \quad \square$$

7.13

Vi börjar med att bestämma en ortonormerad bas i $\mathbf{U}$. Ta

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0,0,0)$$

och sedan får vi att

$$\mathbf{e}_2 \parallel (1,0,3,0,0) - \frac{(\mathbf{e}_1 \mid (1,0,3,0,0))}{(\mathbf{e}_1 \mid \mathbf{e}_1)} \mathbf{e}_1 =$$

$$= (1,0,3,0,0) - \frac{1}{\sqrt{5}}((1,2,0,0,0)\,|\,(1,0,3,0,0))\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0,0,0) =$$

$$= (1,0,3,0,0) - \frac{1}{5}(1+0+0+0+0)(1,2,0,0,0) = \frac{1}{5}(4,-2,15,0,0) \implies$$

$$\implies \mathbf{e}_2 = \frac{\frac{1}{5}(4,-2,15,0,0)}{|\frac{1}{5}(4,-2,15,0,0)|} = \frac{1}{\sqrt{16+4+225+0+0}}(4,-2,15,0,0) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{245}}(4,-2,15,0,0).$$

$\mathbf{U}$ har dimension 2 eftersom det är 2 basvektorer, och $\mathbf{R}^5$ har dimension 5, vilket betyder att $\mathbf{U}^\perp$ har dimension 3. Vidare vet vi att alla vektorer i $\mathbf{U}^\perp$ ska vara ortogonala mot dem i $\mathbf{U}$. Detta gör det enkelt att hitta 2 basvektorer i $\mathbf{U}^\perp$. Eftersom vektorerna som utgör en bas i $\mathbf{U}$ är

$$(1,2,0,0,0) \quad \text{och} \quad (1,0,3,0,0),$$

kan vi direkt välja

$$(0,0,0,1,0) \quad \text{och} \quad (0,0,0,0,1)$$

som basvektorer i $\mathbf{U}^\perp$. Den tredje basvektorn kommer att ha formen $(a,b,c,0,0)$, och vi vill att den ska vara ortogonala mot allting i $\mathbf{U}$, vilket betyder att de behöver vara ortogonala mot basvektorerna:

$$(\mathbf{e}_1\,|\,(a,b,c,0,0)) = 0 \quad \text{och} \quad (\mathbf{e}_2\,|\,(a,b,c,0,0)) = 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} a+2b = 0 \\ 4a-2b+15c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a+\ \ 2b = 0 \\ -10b+15c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a+2b = 0 \\ -2b+3c = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff [c = 2t] \iff \begin{cases} a = -2b = -6t \\ b = 3c/2 = 3t \\ c = 2t, \end{cases}$$

vilket betyder att en basvektor som duger är

$$(-6,3,2,0,0) \implies [\text{normering}] \implies \frac{1}{\sqrt{36+9+4}}(-6,3,2,0,0) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{49}}(-6,3,2,0,0) = \frac{1}{7}(-6,3,2,0,0).$$

7.14

Vi använder Gram-Schmidt för att bilda en ortonormerad bas, och sedan bestämmer vi projektionen med hjälp av (7.23).

a)

Detta är samma bas som i Exempel 9, men utan normering, så vi kan direkt bilda basvektorerna

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,1) \quad \text{och} \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1),$$

vilket ger oss den ortogonala projektionen av $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{u}' = (\mathbf{e}_1 \,|\, \mathbf{u})\mathbf{e}_1 + (\mathbf{e}_1 \,|\, \mathbf{u})\mathbf{e}_1 =$$

$$= \frac{1}{2}((1,1,1,1) \,|\, (0,4,4,0))\frac{1}{2}(1,1,1,1) + \frac{1}{2}((1,-1,1,-1) \,|\, (0,4,4,0))\frac{1}{2}(1,-1,1,-1) =$$

$$= ((1,1,1,1) \,|\, (0,1,1,0))(1,1,1,1) + ((1,-1,1,-1) \,|\, (0,1,1,0))(1,-1,1,-1) =$$

$$= (0+1+1+0)(1,1,1,1) + (0-1+1-0)(1,-1,1,-1) = 2(1,1,1,1) + 0 = (2,2,2,2).$$

b)

Gram-Schmidt:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{(1,2,3,1)}{|(1,2,3,1)|} = \frac{1}{\sqrt{1+4+9+1}}(1,2,3,1) = \frac{1}{\sqrt{15}}(1,2,3,1) \implies$$

$$\mathbf{e}_2 \parallel (1,-2,1,0) - \frac{(\mathbf{e}_1 \,|\, (1,-2,1,0))}{(\mathbf{e}_1 \,|\, \mathbf{e}_1)}\mathbf{e}_1 = (1,-2,1,0) - (\mathbf{e}_1 \,|\, (1,-2,1,0))\mathbf{e}_1 =$$

$$= (1,-2,1,0) - \frac{1}{\sqrt{15}}((1,2,3,1) \,|\, (1,-2,1,0))\frac{1}{\sqrt{15}}(1,2,3,1) =$$

$$= (1,-2,1,0) - \frac{1}{15}(1-4+3+0)(1,2,3,1) = (1,-2,1,0) - 0 \implies$$

$$\implies \mathbf{e}_2 = \frac{(1,-2,1,0)}{|(1,-2,1,0)|} = \frac{1}{\sqrt{1+4+1+0}}(1,-2,1,0) = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1,0).$$

Vi får nu den ortogonala projektionen

$$\mathbf{u}' = (\mathbf{e}_1 \,|\, \mathbf{u})\mathbf{e}_1 + (\mathbf{e}_2 \,|\, \mathbf{u})\mathbf{e}_2 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{15}}((1,2,3,1) \,|\, (0,4,4,0))\frac{1}{\sqrt{15}}(1,2,3,1) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{6}}((1,-2,1,0) \,|\, (0,4,4,0))\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1,0) =$$

$$= \frac{1}{15}(0+8+12+0)(1,2,3,1) + \frac{1}{6}(0-8+4+0)(1,-2,1,0) =$$

$$= \frac{4}{3}(1,2,3,1) - \frac{2}{3}(1,-2,1,0) = \frac{2}{3}(1,6,5,2).$$

7.15

Avståndet till underrummet ges av $|\mathbf{u}''|$, där $\mathbf{u}'' = u - \mathbf{u}'$.

a)

$$\mathbf{u}'' = u - \mathbf{u}' = (0,4,4,0) - (2,2,2,2) = (-2,2,2,-2) = 2(-1,1,1,-1) \implies$$

$$\implies |\mathbf{u}''| = 2\sqrt{1+1+1+1} = 4.$$

b)

$$\mathbf{u}'' = u - \mathbf{u}' = (0,4,4,0) - \frac{2}{3}(1,6,5,2) = \frac{2}{3}(0,6,6,0) - \frac{2}{3}(1,6,5,2) =$$

$$= \frac{2}{3}(-1,0,1,-2) \implies |\mathbf{u}''| = \frac{2}{3}\sqrt{1+0+1+4} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

7.16

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 5x_5 + x_6 = 0 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 7 & 5 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi ser alltså att vektorn $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ är ortogonal mot vektorerna $(1,-1,1,-1,1,-1)$ och $(3,3,7,5,5,1)$, och eftersom $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \mathbf{U}$, betyder det att vektorerna $(1,-1,1,-1,1,-1)$ och $(3,3,7,5,5,1)$ utgör en bas för det ortogonala komplementet till $\mathbf{U}$, $\mathbf{U}^\perp$. Alltså kan vi direkt använda Gram-Schmidt på $(1,-1,1,-1,1,-1)$ och $(3,3,7,5,5,1)$.

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,1,-1,1,-1),$$

$$\mathbf{e}_2 \mid\mid (3,3,7,5,5,1) - \frac{(\mathbf{e}_1 \mid (3,3,7,5,5,1))}{(\mathbf{e}_1 \mid \mathbf{e}_1)}\mathbf{e}_1 =$$

$$= (3,3,7,5,5,1) - (\mathbf{e}_1 \mid (3,3,7,5,5,1))\mathbf{e}_1 =$$

$$= (3,3,7,5,5,1) - \frac{1}{\sqrt{6}}((1,-1,1,-1,1,-1) \mid (3,3,7,5,5,1))\mathbf{e}_1 =$$

$$= (3,3,7,5,5,1) - \frac{1}{\sqrt{6}}(3-3+7-5+5-1)\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,1,-1,1,-1) =$$

$$= (3,3,7,5,5,1) - (1,-1,1,-1,1,-1) = (2,4,6,6,4,2) \mid\mid (1,2,3,3,2,1) \implies$$

$$\implies \mathbf{e}_2 = \frac{(1,2,3,3,2,1)}{|(1,2,3,3,2,1)|} = \frac{1}{\sqrt{1+4+9+9+4+1}}(1,2,3,3,2,1) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{28}}(1,2,3,3,2,1).$$

Detta ger oss den ortogonala projektionen av $\mathbf{u} = (1,5,4,-2,7,-3)$,

$$\mathbf{u}' = (\mathbf{e}_1 \mid \mathbf{u})\mathbf{e}_1 + (\mathbf{e}_2 \mid \mathbf{u})\mathbf{e}_2 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}((1,-1,1,-1,1,-1) \mid (1,5,4,-2,7,-3))\mathbf{e}_1 +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{28}}((1,2,3,3,2,1) \mid (1,5,4,-2,7,-3))\mathbf{e}_2 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}(1-5+4+2+7+3)\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,1,-1,1,-1) +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{28}}(1+10+12-6+14-3)\frac{1}{\sqrt{28}}(1,2,3,3,2,1)=$$
$$=\frac{12}{6}(1,-1,1,-1,1,-1)+\frac{28}{28}(1,2,3,3,2,1)=(3,0,5,1,4,-1),$$

detta ger oss

$$\mathbf{u}''=\mathbf{u}-\mathbf{u}'=(1,5,4,-2,7,-3)-(3,0,5,1,4,-1)=(-2,5,-1,-3,3,-2)\implies$$
$$\implies|\mathbf{u}''|=\sqrt{4+25+1+9+9+4}=\sqrt{52}.$$

7.17

Enligt texten om ortogonala funktioner kan vi fram en ortonormerad bas för $\mathbf{P}_2$ genom att utgå från formeln

$$p_k(t)=\sqrt{\frac{2k+1}{2}}\cdot\frac{1}{2^k k!}\frac{d^k}{dt^k}(t^2-1)^k,\ k=0,1,2.$$
$$p_0(t)=\sqrt{\frac{2\cdot 0+1}{2}}\cdot\frac{1}{2^0\cdot 0!}\frac{d^0}{dt^0}(t^2-1)^0=\frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$p_1(t)=\sqrt{\frac{2\cdot 1+1}{2}}\cdot\frac{1}{2^1\cdot 1!}\frac{d}{dt}(t^2-1)^1=\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2}(2t)=\sqrt{\frac{3}{2}}t,$$
$$p_2(t)=\sqrt{\frac{2\cdot 2+1}{2}}\cdot\frac{1}{2^2\cdot 2!}\frac{d^2}{dt^2}(t^2-1)^2=\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\frac{1}{8}\frac{d^2}{dt^2}(t^4-2t^2+1)=$$
$$=\frac{\sqrt{5}}{8\sqrt{2}}(12t^2-4)=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3t^2-1).$$

Den ortogonala projektionen av $f(t)=|t|$ blir nu

$$(p_0\mid f)p_0+(p_1\mid f)p_1+(p_2\mid f)p_2=$$
$$=\int_{-1}^{1}p_0(t)f(t)\,dt\cdot p_0(t)+\int_{-1}^{1}p_1(t)f(t)\,dt\cdot p_1(t)+\int_{-1}^{1}p_2(t)f(t)\,dt\cdot p_2(t)=$$
$$=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot|t|\,dt\cdot p_0(t)+\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{3}{2}}t\cdot|t|\,dt\cdot p_1(t)+\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3t^2-1)\cdot|t|\,dt\cdot p_2(t)=$$
$$=\left[\sqrt{\frac{3}{2}}t|t|\text{ udda}\implies\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{3}{2}}t|t|\,dt=0\right]=$$
$$=\frac{p_0}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}\underbrace{|t|}_{\text{jämn}}\,dt+\frac{p_2\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}\underbrace{(3t^2-1)|t|}_{\text{jämn}}\,dt=$$
$$=\frac{2p_0}{\sqrt{2}}\int_{0}^{1}|t|\,dt+\frac{2p_2\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\int_{0}^{1}(3t^2-1)|t|\,dt=$$
$$=\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{0}^{1}|t|\,dt+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3t^2-1)\int_{0}^{1}(3t^2-1)|t|\,dt=$$
$$=\int_{0}^{1}t\,dt+\frac{5}{4}(3t^2-1)\int_{0}^{1}(3t^3-t)\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1+\frac{5}{4}(3t^2-1)\left[\frac{3}{4}t^4-\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{5}{4}(3t^2-1)\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{8}{16}+\frac{5}{16}(3t^2-1)=\frac{1}{16}(15t^2+3)=\frac{3}{16}(5t^2+1).$$

7.18

a)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ -2x_1 + 3x_2 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{=x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{=y}$$

Detta ger oss normalekvationen

$$A^tAx = A^ty \iff \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{bmatrix} 9 & -7 \\ -7 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 9x_1 - 7x_2 = 5 \\ -7x_1 + 11x_2 = 4 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 9x_1 - 7x_2 = 5 \\ 50x_2 = 71 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = (5 + 7x_2)/9 = 747/450 = 83/50 \\ x_2 = 71/50 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = 83/50 = 1.66 \\ x_2 = 71/50 = 1.42 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 2 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{=x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{=y}$$

Detta ger oss normalekvationen

$$A^tAx = A^ty \iff$$

$$\iff \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 3x_1 + x_3 = 6 \\ 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 7 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 3x_1 + x_3 = 6 \\ 3x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 3x_2 + 12x_3 = 21 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x_1 + x_3 = 6 \\ 3x_2 + x_3 = 3 \\ 10x_3 = 12 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = 2 - x_3/3 = 8/5 \\ x_2 = 1 - x_3/3 = 3/5 \\ x_3 = 6/5 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 8/5 = 1.6 \\ x_2 = 3/5 = 0.6 \\ x_3 = 6/5 = 1.2 \end{cases}$$

7.19

Om vi använder modellen $y = b + ct$, och sätter in tabellens värden, får vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} b + c \cdot 1 = 5 \\ b + c \cdot 2 = 6 \\ b + c \cdot 3 = 10 \\ b + c \cdot 4 = 12 \\ b + c \cdot 5 = 17 \end{cases} \iff \begin{cases} b + c = 5 \\ b + 2c = 6 \\ b + 3c = 10 \\ b + 4c = 12 \\ b + 5c = 17 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 10 \\ 12 \\ 17 \end{bmatrix} \iff Ax = y.$$

För att lösa detta överbestämda system i minsta kvadratmening betraktar vi normalekvationen:

$$A^t Ax = A^t y \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 10 \\ 12 \\ 17 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 180 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 5b + 15c = 50 \\ 15b + 55c = 180 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 5b + 15c = 50 \\ \phantom{5b + {}} 10c = 30 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 10 - 3c = 1 \\ c = 3, \end{cases}$$

vilket ger oss linjen

$$y = 3t + 1.$$

7.20

Insättning av tabellvärdena i modellen $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ ger oss ekvationssystemet

$$\begin{cases} a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-1) + c = 2 \\ a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 1 \\ \phantom{a \cdot 0^2 + {}} a \cdot 0^2 + \phantom{b \cdot 0 + {}} b \cdot 0 + c = 1 \\ \phantom{a \cdot 0^2 + {}} a \cdot 1^2 + \phantom{b \cdot 0 + {}} b \cdot 1 + c = 2 \\ \phantom{a \cdot 0^2 + {}} a \cdot 2^2 + \phantom{b \cdot 0 + {}} b \cdot 2 + c = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 4a - 2b + c = 2 \\ a - b + c = 1 \\ \phantom{a - {}} c = 1 \\ a + b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 3 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \iff Ax = y,$$

som kan lösas i minsta kvadratmening med normalekvationen

$$A^t Ax = A^t y \iff$$

$$\iff \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{bmatrix} 34 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 34a & & +10c = 23 \\ & 10b & = 3 \\ 10a & & + \ 5c = 9 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 34a & & +10c = 23 \\ & b & = 3/10 \\ -14a & & = -5 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} a = 5/14 \\ b = 3/10 \\ c = (23 - 34a)/10 = (322/14 - 170/14)/10 = 152/140 = 38/35 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} a = 5/14 = 25/70 \\ b = 3/10 = 21/70 \\ c = 38/35 = 76/70, \end{cases}$$

vilket innebär att andragradskurvan vi söker är

$$y = f(x) = \frac{1}{70}(25x^2 + 21x + 76).$$

7.21

Med samma beteckningar som i 7.9 har vi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \implies A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Gram-Schmidt:

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}_1|} = \frac{(1,1,1,1,1)}{|(1,1,1,1,1)|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,1,1,1,1),$$

$$\mathbf{q}_2 \parallel \mathbf{a}_2 - \frac{(\mathbf{q}_1 \,|\, \mathbf{a}_2)}{(\mathbf{q}_1 \,|\, \mathbf{q}_1)}\mathbf{q}_1 = \mathbf{a}_2 - (\mathbf{q}_1 \,|\, \mathbf{a}_2)\mathbf{q}_1 =$$

$$= \mathbf{a}_2 - \frac{1}{\sqrt{5}}((1,1,1,1,1) \,|\, (0,1,2,3,4))\frac{1}{\sqrt{5}}(1,1,1,1,1) =$$

$$= \mathbf{a}_2 - \frac{1}{5}(0+1+2+3+4)(1,1,1,1,1) =$$

$$= (0,1,2,3,4) - 2(1,1,1,1,1) = (-2,-1,0,1,2) \implies$$

$$\implies \mathbf{q}_2 = \frac{(-2,-1,0,1,2)}{|(-2,-1,0,1,2)|} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-2,-1,0,1,2),$$

vilket ger oss

$$Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{5} & 1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{5} & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{10} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -2 \\ \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}.$$

Eftersom vi har två kolonner i Q måste R vara en 2×2 matris. Detta ger oss ekvationerna

$$\begin{cases} A_1 = r_{11} Q_1 \\ A_2 = r_{12} Q_1 + r_{22} Q_2 \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = r_{11} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \iff r_{11} = \sqrt{5},$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = r_{12} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + r_{22} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} \sqrt{2} r_{12} - 2 r_{22} = 0 \\ \sqrt{2} r_{12} - r_{22} = \sqrt{10} \\ \sqrt{2} r_{12} \phantom{- 2 r_{22}} = 2\sqrt{10} \\ \sqrt{2} r_{12} + r_{22} = 3\sqrt{10} \\ \sqrt{2} r_{12} + 2 r_{22} = 4\sqrt{10} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} r_{12} \phantom{- \sqrt{2} r_{22}} = \sqrt{20} \\ r_{12} - \sqrt{2} r_{22} = 0 \\ \sqrt{2} r_{12} - \phantom{\sqrt{2}} r_{22} = \sqrt{10} \\ \sqrt{2} r_{12} + \phantom{\sqrt{2}} r_{22} = 3\sqrt{10} \\ r_{12} + \sqrt{2} r_{22} = 2\sqrt{20} \end{cases} \iff \begin{cases} r_{12} \phantom{- \sqrt{2} r_{22}} = \sqrt{20} \\ - \sqrt{2} r_{22} = -\sqrt{20} \\ - \phantom{\sqrt{2}} r_{22} = -\sqrt{10} \\ r_{22} = \sqrt{10} \\ \sqrt{2} r_{22} = \sqrt{20} \end{cases} \iff \begin{cases} r_{12} = \sqrt{20} \\ r_{22} = \sqrt{10}. \end{cases}$$

Alltså är

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & \sqrt{20} \\ 0 & \sqrt{10} \end{bmatrix} = \sqrt{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix},$$

vilket ger oss QR-faktoriseringen

$$A = QR \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -2 \\ \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 2 \end{bmatrix} \sqrt{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -2 \\ \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Kapitel 8

8.1

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot5\cdot9+2\cdot6\cdot7+3\cdot4\cdot8-3\cdot5\cdot7-2\cdot4\cdot9-1\cdot6\cdot8 = 45+84+96-105-72-48 = 0.$$

b)

$$\begin{vmatrix} 555 & 556 & 558 \\ 556 & 557 & 559 \\ 558 & 559 & 560 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 555+0 & 555+1 & 555+3 \\ 555+1 & 555+2 & 555+4 \\ 555+3 & 555+4 & 555+5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 555 & 555 & 555 \\ 555 & 555 & 555 \\ 555 & 555 & 555 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0 + 1\cdot4\cdot3 + 3\cdot1\cdot4 - 3\cdot2\cdot3 - 1\cdot1\cdot5 - 0 = 12+12-18-5 = 1.$$

c)

Vi utför radoperationer på determinanten:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 0 & b-a & a-b \\ 0 & c-a & a-c \end{vmatrix}$$

Om vi nu utvecklar den första kolonnen får vi att

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 0 & b-a & a-b \\ 0 & c-a & a-c \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+1}\cdot1\cdot\begin{vmatrix} b-a & a-b \\ c-a & a-c \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}\cdot0\cdot\begin{vmatrix} a & b+c \\ c-a & a-c \end{vmatrix} + (-1)^{3+1}\cdot0\cdot\begin{vmatrix} a & b+c \\ b-a & a-b \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} b-a & a-b \\ c-a & a-c \end{vmatrix} = (b-a)(a-c)-(c-a)(a-b) = -(a-b)(a-c)+(a-c)(a-b) = 0.$$

d)

Radoperationer ger att (subtraherar bort den sista raden från ovantstående så att första elementet i raden blir 0)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & -9 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

Utveckling av kolonn 1 ger nu

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & -9 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot 0 \cdot 0 \begin{vmatrix} -1 & -1 & -9 \\ 0 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{3+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 & -9 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{4+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 & -9 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} -1 & -1 & -9 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix}$$

Om vi här adderar två av den första raden till den andra får vi att

$$- \begin{vmatrix} -1 & -1 & -9 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -1 & -9 \\ 0 & -2 & -22 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix}$$

och utveckling av kolonn 1 i denna determinant ger

$$- \begin{vmatrix} -1 & -1 & -9 \\ 0 & -2 & -22 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-1)^{1+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & -22 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} - (-1)^{2+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -9 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} - (-1)^{3+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -9 \\ -2 & -22 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & -22 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-4) - (-22) \cdot 3 = 8 + 66 = 74.$$

e)

Vi utför radoperationer igen

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 8 & 10 \\ 0 & 7 & 10 & 13 \end{vmatrix}$$

Utveckling av kolonn 1:

$$- \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 8 & 10 \\ 0 & 7 & 10 & 13 \end{vmatrix} = -(-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 8 & 10 \\ 7 & 10 & 13 \end{vmatrix} - (-1)^{2+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 2 & 8 & 10 \\ 7 & 10 & 13 \end{vmatrix} -$$

$$-(-1)^{3+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 7 \\ 7 & 10 & 13 \end{vmatrix} - (-1)^{4+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 7 \\ 2 & 8 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 8 & 10 \\ 7 & 10 & 13 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 8 \cdot 13 + 2 \cdot 10 \cdot 7 + 7 \cdot 2 \cdot 10 - 7 \cdot 8 \cdot 7 - 2 \cdot 2 \cdot 13 - 1 \cdot 10 \cdot 10) =$$

$$= -104 - 140 - 140 + 392 + 52 + 100 = 160.$$

f)

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ b & a & a & a \\ 0 & b & a & a \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 & 0 \\ b & a & a & a \\ 0 & b & a & a \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix}$$

Utveckling av rad 1:

$$\begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 & 0 \\ b & a & a & a \\ 0 & b & a & a \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot (a-b) \cdot \begin{vmatrix} a & a & a \\ b & a & a \\ 0 & b & a \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} b & a & a \\ 0 & a & a \\ 0 & b & a \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{1+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} b & a & a \\ 0 & b & a \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} b & a & a \\ 0 & b & a \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} =$$

$$= (a-b) \begin{vmatrix} a & a & a \\ b & a & a \\ 0 & b & a \end{vmatrix} = (a-b) \begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 \\ b & a & a \\ 0 & b & a \end{vmatrix}$$

Utveckling av rad 1 igen:

$$(a-b) \begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 \\ b & a & a \\ 0 & b & a \end{vmatrix} =$$

$$= (a-b)(-1)^{1+1} \cdot (a-b) \cdot \begin{vmatrix} a & a \\ b & a \end{vmatrix} + (a-b)(-1)^{1+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} b & a \\ 0 & a \end{vmatrix} + (a-b)(-1)^{1+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} b & a \\ 0 & b \end{vmatrix} =$$

$$= (a-b)^2 \begin{vmatrix} a & a \\ b & a \end{vmatrix} = (a-b)^2(a \cdot a - b \cdot a) = a(a-b)^3.$$

8.2

a)

Vi utför först radoperationer (den sista raden subtraheras från rad 2 och rad 3, för den första raden subtraheras $x/2$ gånger rad 4)

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 2 & 2 \\ 2 & x & 2 & 2 \\ 2 & 2 & x & 2 \\ 2 & 2 & 2 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2-x & 2-x & 2-\frac{x^2}{2} \\ 0 & x-2 & 0 & 2-x \\ 0 & 0 & x-2 & 2-x \\ 2 & 2 & 2 & x \end{vmatrix}$$

Vid utveckling av kolonn 1 kommer determinanten ovan förenklas till

$$\begin{vmatrix} 0 & 2-x & 2-x & 2-\frac{x^2}{2} \\ 0 & x-2 & 0 & 2-x \\ 0 & 0 & x-2 & 2-x \\ 2 & 2 & 2 & x \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + 0 + 0 + (-1)^{4+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2-x & 2-x & 2-\frac{x^2}{2} \\ x-2 & 0 & 2-x \\ 0 & x-2 & 2-x \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 2-x & 2-x & 2-\frac{x^2}{2} \\ x-2 & 0 & 2-x \\ 0 & x-2 & 2-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-x & 2-x & x^2-4 \\ x-2 & 0 & 2x-4 \\ 0 & x-2 & 2x-4 \end{vmatrix}$$

Om vi nu adderar minus halva kolonn 3 till kolonn 2 får vi

$$\begin{vmatrix} 2-x & 2-x & x^2-4 \\ x-2 & 0 & 2x-4 \\ 0 & x-2 & 2x-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-x & 2-x-\frac{x^2}{2}+2 & x^2-4 \\ x-2 & -x+2 & 2x-4 \\ 0 & 0 & 2x-4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2-x & 4-x-\frac{x^2}{2} & x^2-4 \\ x-2 & 2-x & 2x-4 \\ 0 & 0 & 2x-4 \end{vmatrix}$$

Utveckling av rad 3 ger oss

$$\begin{vmatrix} 2-x & 4-x-\frac{x^2}{2} & x^2-4 \\ x-2 & 2-x & 2x-4 \\ 0 & 0 & 2x-4 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + 0 + (-1)^{3+3} \cdot (2x-4) \cdot \begin{vmatrix} 2-x & 4-x-\frac{x^2}{2} \\ x-2 & 2-x \end{vmatrix} =$$

$$= (x-2) \begin{vmatrix} 2-x & 8-2x-x^2 \\ x-2 & 4-2x \end{vmatrix} = (x-2)((2-x)(4-2x) - (8-2x-x^2)(x-2)) =$$

$$= (x-2)((x-2)(2x-4) + (x^2+2x-8)(x-2)) = (x-2)^2(2x-4+x^2+2x-8) =$$

$$= (x-2)^2(x^2+4x-12) = (x-2)^2(x^2+6x-2x-12) =$$

$$= (x-2)^2(x(x+6) - 2(x+6)) = (x-2)^2(x+6).$$

Vi vill att denna determinant ska vara lika med 0.

$$(x-2)^2(x+6) = 0 \iff \begin{cases} x = -6 \\ x = 2. \end{cases}$$

b)

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 1 \\ 0 & x & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -x & -x & 1-x^2 \\ 0 & x & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

Varpå utveckling av kolonn 1 ger

$$\begin{vmatrix} 0 & -x & -x & 1-x^2 \\ 0 & x & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 + (-1)^{4+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -x & -x & 1-x^2 \\ x & 0 & 1 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} -x & -x & 1-x^2 \\ x & 0 & 1 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x & x^2-1 \\ x & 0 & 1 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix}$$

Subtraktion av rad 2 från rad 1 ger

$$\begin{vmatrix} x & x & x^2-1 \\ x & 0 & 1 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x & x^2-2 \\ x & 0 & 1 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix}$$

Nu ger utveckling av kolonn 1

$$\begin{vmatrix} x & x & x^2-1 \\ x & 0 & 1 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} = 0 + (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} x & x^2-2 \\ x & 1 \end{vmatrix} + 0 = -\begin{vmatrix} x & x^2-2 \\ x & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(x \cdot 1 - (x^2-2)x) = x^2 - 3x.$$

Detta ska vara lika med 0, vilket betyder att

$$x^2 - 3x = 0 \iff x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3}. \end{cases}$$

8.3

Vi ser att raderna i determinanten utgör talen som är delbara med 17. Detta motiverar att göra vissa kolonnoperationer. Om vi kallar kolonn i för A_i, så vill vi göra kolonnoperationerna

$$D(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5) = D(A_1, A_2, A_3, A_4, A_1 \cdot 10^4 + A_2 \cdot 10^3 + A_3 \cdot 10^2 + A_4 \cdot 10 + A_5).$$

Anledningen till detta är för att vi kommer att få alla tal som är delbara i kolonn 5, och sedan kan vi utveckla determinanten i kolonn 5, vilket kommer att ge oss alla tal som är delbara med 17 som koefficienter till underdeterminanterna.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 9 & 8 & 6 & 5 \\ 5 & 8 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 7 & 6 & 3 & 9 \\ 9 & 6 & 5 & 7 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 1\cdot 10^4 + 3\cdot 10^3 + 4\cdot 10^2 + 1\cdot 10 + 3 \\ 3 & 9 & 8 & 6 & 3\cdot 10^4 + 9\cdot 10^3 + 8\cdot 10^2 + 6\cdot 10 + 5 \\ 5 & 8 & 7 & 5 & 5\cdot 10^4 + 8\cdot 10^3 + 7\cdot 10^2 + 5\cdot 10 + 2 \\ 7 & 7 & 6 & 3 & 7\cdot 10^4 + 7\cdot 10^3 + 6\cdot 10^2 + 3\cdot 10 + 9 \\ 9 & 6 & 5 & 7 & 9\cdot 10^4 + 6\cdot 10^3 + 5\cdot 10^2 + 7\cdot 10 + 7 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 13413 \\ 3 & 9 & 8 & 6 & 39865 \\ 5 & 8 & 7 & 5 & 58752 \\ 7 & 7 & 6 & 3 & 77639 \\ 9 & 6 & 5 & 7 & 96577 \end{vmatrix}$$

Utveckling av kolonn 5:

$$(-1)^{1+5}\cdot 13413\cdot\begin{vmatrix}3&9&8&6\\5&8&7&5\\7&7&6&3\\9&6&5&7\end{vmatrix}+(-1)^{2+5}\cdot 39865\cdot\begin{vmatrix}1&3&4&1\\5&8&7&5\\7&7&6&3\\9&6&5&7\end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{3+5}\cdot 58752\cdot\begin{vmatrix}1&3&4&1\\3&9&8&6\\7&7&6&3\\9&6&5&7\end{vmatrix}+(-1)^{4+5}\cdot 77639\cdot\begin{vmatrix}1&3&4&1\\3&9&8&6\\5&8&7&5\\9&6&5&7\end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{5+5}\cdot 96577\cdot\begin{vmatrix}1&3&4&1\\3&9&8&6\\5&8&7&5\\7&7&6&3\end{vmatrix}=$$

$$=17\cdot 789\begin{vmatrix}3&9&8&6\\5&8&7&5\\7&7&6&3\\9&6&5&7\end{vmatrix}-17\cdot 2345\begin{vmatrix}1&3&4&1\\5&8&7&5\\7&7&6&3\\9&6&5&7\end{vmatrix}+$$

$$+17\cdot 3456\begin{vmatrix}1&3&4&1\\3&9&8&6\\7&7&6&3\\9&6&5&7\end{vmatrix}-17\cdot 4567\begin{vmatrix}1&3&4&1\\3&9&8&6\\5&8&7&5\\9&6&5&7\end{vmatrix}+17\cdot 5681\begin{vmatrix}1&3&4&1\\3&9&8&6\\5&8&7&5\\7&7&6&3\end{vmatrix}$$

Detta uttryck är uppenbart delbart med 17. □

8.4

Antag att matrisen A är av udda ordning, säg $2n+1$, och skevsymmetrisk. Enligt sats är

$$\det A^t = \det A,$$

men för en skevsymmetrisk matris gäller det också att

$$\det A^t = \det(-A) = (-1)^{2n+1}\det A = -\det A.$$

För matris av jämn ordning är $\det(-A) = (-1)^{2n}\det A = \det A$. Vi har nu likheten

$$\det A = -\det A \iff 2\det A = 0 \iff \det A = 0. \quad \square$$

8.5

a)

Vi subtraherar rad 1 från alla nedanstående rader och utvecklar sedan kolonn 1:

$$\begin{vmatrix}1&1&1&\dots&1\\1&2&1&\dots&1\\1&1&3&\dots&1\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\1&1&1&\dots&n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&\dots&1\\0&1&0&\dots&0\\0&0&2&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&\dots&n-1\end{vmatrix}=$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & n-1 \end{vmatrix} + 0 + ... + 0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & n-1 \end{vmatrix}$$

Vi kan nu fortsätta att utveckla kolonn 1, och induktivt reducera storleken på determinanten:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & n-1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & n-1 \end{vmatrix} + 0 + ... + 0 =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & n-1 \end{vmatrix} = ... = 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-2)(n-1) = (n-1)!$$

b)

Vi börjar med att addera kolonn 1 till kolonn 2, sedan adderar vi kolonn 2 till kolonn 3, och på detta sätt håller vi på, vilket ger oss att

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & ... & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & -1 & 1 \end{vmatrix} = ... = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n-1 & n \\ -1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Om vi nu utvecklar rad 2 får vi

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n-1 & n \\ -1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{2+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & ... & n-1 & n \\ -1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & -1 & 0 \end{vmatrix} + 0 + ... + 0 =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 3 & ... & n-1 & n \\ -1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & -1 & 0 \end{vmatrix} = [\text{utveckla rad 2 igen}] =$$

$$= (-1)^{2+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & ... & n-1 & n \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & -1 & 0 \end{vmatrix} + 0 + ... + 0 = \begin{vmatrix} 3 & ... & n-1 & n \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Om vi nu utvecklar rad 2 ett antal gånger till (alla kommer att ge faktorn $(-1)^{2+1}\cdot(-1) = 1$ eftersom alla element på den diagonalen är -1) kommer vi till slut få determinanten

$$\begin{vmatrix} 3 & ... & n-1 & n \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & -1 & 0 \end{vmatrix} = ... = \begin{vmatrix} n-1 & n \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - n\cdot(-1) = n.$$

c)

Vi subtraherar rad k från rad $k+1$, där k går från 1 till $n-1$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = ... = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Nu arbetar vi istället åt andra hållet och subtraherar rad k från rad $k-1$, där k nu går från n till 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = ... =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Det är ganska uppenbart att denna determinant är lika med 1, men för att vara lite mer explicit kan man utveckla kolonn (eller) rad 1 n gånger:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = ... =$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix} = 1.$$

d)

Vi alternerar mellan att subtrahera rad k från rad $k+2$, och att subtrahera kolonn k från kolonn $k+2$, där k går från 1 till $n-2$. Detta kommer att ge upphov till 2 fall beroende på om n är udda, eller inte.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Här ser vi att huvuddiagonalen kommer att bestå av 2×2 matriser med formen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

och för att det ska finnas ett helt antal av dessa 2×2 matriser i determinanten måste n var jämnt; om n är udda kommer man bara att få med 0:an i den övre vänstra hörnet på den sista sådan 2×2 matris på diagonalen. Alltså om n är udda får vi att

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = ... = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

För att beräkna denna determinant noterar vi att den sista raden enbart har 0:or i sig, vilket betyder att den är linjärt beroende av ovantstående rader (0 gånger en rad blir den n:e raden), och alltså kan vi direkt säga att

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Om n istället skulle vara jämnt får vi att

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = ... = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Vi utvecklar den första kolonnen:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 + ... + 0 =$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Utvecklar vi första kolonnen igen får vi

$$-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 + ... + 0 = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

På detta vis kan vi fortsätta med att utveckla kolonn 1. Mönstret är att vid den första utvecklingen får vi en faktor -1, vid den andra får vi en faktor 1, vid den tredje får vi en faktor -1, och så vidare. Alltså om vi utvecklar 4 gånger kommer vi att få tillbaka en 1:a som konstanten framför, men efter 2 utvecklingar har vi istället ett minustecken. Detta betyder att determinantens värde beror på om n är delbart med 4, eller inte. Om n är delbart med 4 blir värdet 1; annars -1. Detta kan vi sammanfatta genom att skriva

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n/2}.$$

8.6

Börja med att subtrahera rad 1 från alla nedanstående rader.

$$\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & ... & a_1 - b_n \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & ... & a_2 - b_n \\ ... & ... & ... & ... \\ a_n - b_1 & a_n - b_2 & ... & a_n - b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & ... & a_1 - b_n \\ a_2 - a_1 & a_2 - a_1 & ... & a_2 - a_1 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_n - a_1 & a_n - a_1 & ... & a_n - a_1 \end{vmatrix}$$

Om vi nu subtraherar kolonn 1 från alla kolonner till höger får vi att

$$\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & ... & a_1 - b_n \\ a_2 - a_1 & a_2 - a_1 & ... & a_2 - a_1 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_n - a_1 & a_n - a_1 & ... & a_n - a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 - b_1 & b_1 - b_2 & ... & b_1 - b_n \\ a_2 - a_1 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_n - a_1 & 0 & ... & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 - b_1 & b_1 - b_2 & b_1 - b_3 & ... & b_1 - b_n \\ a_2 - a_1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_3 - a_1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_n - a_1 & 0 & 0 & ... & 0 \end{vmatrix}$$

Utveckling av kolonn 1:

$$\begin{vmatrix} a_1-b_1 & b_1-b_2 & b_1-b_3 & ... & b_1-b_n \\ a_2-a_1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_3-a_1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_n-a_1 & 0 & 0 & ... & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot (a_1-b_1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{2+1} \cdot (a_2-a_1) \cdot \begin{vmatrix} b_1-b_2 & b_1-b_3 & ... & b_1-b_n \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{3+1} \cdot (a_3-a_1) \cdot \begin{vmatrix} b_1-b_2 & b_1-b_3 & ... & b_1-b_n \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{vmatrix} + ...+$$

$$+(-1)^{n+1} \cdot (a_n-a_1) \cdot \begin{vmatrix} b_1-b_2 & b_1-b_3 & ... & b_1-b_n \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + (-(a_2-a_1) + (a_3-a_1) + ... + (-1)^{n+1}(a_n-a_1)) \begin{vmatrix} b_1-b_2 & b_1-b_3 & ... & b_1-b_n \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{vmatrix}$$

Denna determinant är uppenbart 0, vilket antingen kan ses genom att utveckla alla rader utom den första, eller genom att utveckla en valfri kolonn, eller genom att konstatera att raderna är linjärt beroende. Hursomhelst får man att

$$(-a_2 + a_3 + ... + (-1)^{n+1}(a_n-a_1)) \begin{vmatrix} b_1-b_2 & b_1-b_3 & ... & b_1-b_n \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-a_2 + a_3 + ... + (-1)^{n+1}(a_n-a_1)) \cdot 0 = 0,$$

vilket betyder att

$$\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & ... & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & ... & a_2-b_n \\ ... & ... & ... & ... \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & ... & a_n-b_n \end{vmatrix} = 0. \quad \square$$

Om $n < 3$ hade man, efter rad- och kolonnoperationerna, fått determinanten

$$\begin{vmatrix} a_1-b_1 & b_1-b_2 \\ a_2-a_1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (b_1-b_2)(a_2-a_1) = (a_2-a_1)(b_2-b_1),$$

som inte nödvändigtvis är lika med 0.

8.7

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & ... & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & ... & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & ... & n-3 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & ... & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & ... & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & ... & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & ... & n-4 & n-3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & ... & n-5 & n-4 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ n-2 & n-3 & n-4 & n-5 & ... & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & ... & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Om vi nu adderar den sista raden till den första raden får vi

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & ... & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & ... & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & ... & n-4 & n-3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & ... & n-5 & n-4 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ n-2 & n-3 & n-4 & n-5 & ... & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & ... & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} n-1 & n-1 & n-1 & n-1 & ... & n-1 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & ... & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & ... & n-4 & n-3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & ... & n-5 & n-4 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ n-2 & n-3 & n-4 & n-5 & ... & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & ... & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & ... & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & ... & n-4 & n-3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & ... & n-5 & n-4 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ n-2 & n-3 & n-4 & n-5 & ... & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & ... & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Subtraktion av $k-1$ gånger den första raden från den k:e raden ger

$$(n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & ... & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & ... & n-4 & n-3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & ... & n-5 & n-4 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ n-2 & n-3 & n-4 & n-5 & ... & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & ... & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & ... & n-4 & n-3 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & ... & n-6 & n-5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & ... & n-8 & n-7 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & -1 & -2 & -3 & ... & -n+2 & -n+3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & ... & -n+2 & -n+1 \end{vmatrix}$$

Subtraktion av rad 2 från alla nedanstående rader ger

$$(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & ... & n-4 & n-3 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & ... & n-6 & n-5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & ... & n-8 & n-7 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & -1 & -2 & -3 & ... & -n+2 & -n+3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & ... & -n+2 & -n+1 \end{vmatrix} =$$

$$= (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & ... & n-4 & n-3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & ... & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & ... & -4 & -4 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & -2 & -4 & ... & -2n+6 & -2n+6 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & ... & -2n+6 & -2n+4 \end{vmatrix}$$

Subtraktion av rad 3 från alla nedanstående rader ger

$$= (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & ... & n-4 & n-3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & ... & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & ... & -4 & -4 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & -2 & -4 & ... & -2n+6 & -2n+6 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & ... & -2n+6 & -2n+4 \end{vmatrix} =$$

$$= (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & ... & n-4 & n-3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & ... & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & ... & -2 & -2 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & -2 & ... & -2n+8 & -2n+8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & ... & -2n+8 & -2n+6 \end{vmatrix}$$

Om vi fortsätter att subtrahera rad k från rad $k+1$ till n, där k nu löper från 4 till $n-1$, kommer vi att få en triangulär matris där alla element i den övre halvan är -2

(utom elementen på dem första raderna)

$$(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & ... & n-4 & n-3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & ... & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & ... & -2 & -2 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & -2 & ... & -2n+8 & -2n+8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & ... & -2n+8 & -2n+6 \end{vmatrix} = ... =$$

$$= (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & ... & n-4 & n-3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & ... & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & ... & -2 & -2 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (n-1)(-2)^{n-2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & ... & n-4 & n-3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ... & 1 & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n-2}(n-1)2^{n-2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & ... & n-4 & n-3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ... & 1 & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Vi kan nu utveckla denna determinant längs den första kolonnen n gånger, och vi kommer att få en faktor 1 varje gång - utom vid den andra utvecklingen där vi snappar upp -1 istället. Alltså är

$$(-1)^{n-2}(n-1)2^{n-2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & ... & n-4 & n-3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ... & 1 & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n-2}(n-1)2^{n-2} \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot ... \cdot 1 \cdot 1 = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}.$$

Vi har nu slutligen kommit fram till att

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & ... & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & ... & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & ... & n-3 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & ... & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}.$$

8.8

$$V(t_1, ..., t_{n-1}, x) = \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & ... & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & ... & t_2^{n-1} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & x & x^2 & ... & x^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & ... & x^{n-2} & x^{n-1} \\ 1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3 & ... & t_1^{n-2} & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & t_2^3 & ... & t_2^{n-2} & t_2^{n-1} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & t_{n-2} & t_{n-2}^2 & t_{n-2}^3 & ... & t_{n-2}^{n-2} & t_{n-2}^{n-1} \\ 1 & t_{n-1} & t_{n-1}^2 & t_{n-1}^3 & ... & t_{n-1}^{n-2} & t_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

Subtrahera x gånger kolonn $k-1$ från kolonn k, där k går från n till 2, och utveckla sedan rad 1:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & ... & x^{n-2} & x^{n-1} \\ 1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3 & ... & t_1^{n-2} & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & t_2^3 & ... & t_2^{n-2} & t_2^{n-1} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & t_{n-2} & t_{n-2}^2 & t_{n-2}^3 & ... & t_{n-2}^{n-2} & t_{n-2}^{n-1} \\ 1 & t_{n-1} & t_{n-1}^2 & t_{n-1}^3 & ... & t_{n-1}^{n-2} & t_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & ... & x^{n-2} & x^{n-1} - x \cdot x^{n-2} \\ 1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3 & ... & t_1^{n-2} & t_1^{n-1} - x \cdot t_1^{n-2} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & t_2^3 & ... & t_2^{n-2} & t_2^{n-1} - x \cdot t_2^{n-2} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & t_{n-2} & t_{n-2}^2 & t_{n-2}^3 & ... & t_{n-2}^{n-2} & t_{n-2}^{n-1} - x \cdot t_{n-2}^{n-2} \\ 1 & t_{n-1} & t_{n-1}^2 & t_{n-1}^3 & ... & t_{n-1}^{n-2} & t_{n-1}^{n-1} - x \cdot t_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & ... & x^{n-2} & 0 \\ 1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3 & ... & t_1^{n-2} & t_1^{n-2}(t_1 - x) \\ 1 & t_2 & t_2^2 & t_2^3 & ... & t_2^{n-2} & t_2^{n-2}(t_2 - x) \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & t_{n-2} & t_{n-2}^2 & t_{n-2}^3 & ... & t_{n-2}^{n-2} & t_{n-2}^{n-2}(t_{n-2} - x) \\ 1 & t_{n-1} & t_{n-1}^2 & t_{n-1}^3 & ... & t_{n-1}^{n-2} & t_{n-1}^{n-2}(t_{n-1} - x) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & ... & x^{n-2} - x \cdot x^{n-3} & 0 \\ 1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3 & ... & t_1^{n-2} - x \cdot t_1^{n-3} & t_1^{n-2}(t_1 - x) \\ 1 & t_2 & t_2^2 & t_2^3 & ... & t_2^{n-2} - x \cdot t_2^{n-3} & t_2^{n-2}(t_2 - x) \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & t_{n-2} & t_{n-2}^2 & t_{n-2}^3 & ... & t_{n-2}^{n-2} - x \cdot t_{n-2}^{n-3} & t_{n-2}^{n-2}(t_{n-2} - x) \\ 1 & t_{n-1} & t_{n-1}^2 & t_{n-1}^3 & ... & t_{n-1}^{n-2} - x \cdot t_{n-1}^{n-3} & t_{n-1}^{n-2}(t_{n-1} - x) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & ... & 0 & 0 \\ 1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3 & ... & t_1^{n-3}(t_1 - x) & t_1^{n-2}(t_1 - x) \\ 1 & t_2 & t_2^2 & t_2^3 & ... & t_2^{n-3}(t_2 - x) & t_2^{n-2}(t_2 - x) \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & t_{n-2} & t_{n-2}^2 & t_{n-2}^3 & ... & t_{n-2}^{n-3}(t_{n-2} - x) & t_{n-2}^{n-2}(t_{n-2} - x) \\ 1 & t_{n-1} & t_{n-1}^2 & t_{n-1}^3 & ... & t_{n-1}^{n-3}(t_{n-1} - x) & t_{n-1}^{n-2}(t_{n-1} - x) \end{vmatrix} = ... =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & t_1 - x & t_1(t_1 - x) & t_1^2(t_1 - x) & ... & t_1^{n-3}(t_1 - x) & t_1^{n-2}(t_1 - x) \\ 1 & t_2 - x & t_2(t_2 - x) & t_2^2(t_2 - x) & ... & t_2^{n-3}(t_2 - x) & t_2^{n-2}(t_2 - x) \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & t_{n-2} - x & t_{n-2}(t_{n-2} - x) & t_{n-2}^2(t_{n-2} - x) & ... & t_{n-2}^{n-3}(t_{n-2} - x) & t_{n-2}^{n-2}(t_{n-2} - x) \\ 1 & t_{n-1} - x & t_{n-1}(t_{n-1} - x) & t_{n-1}^2(t_{n-1} - x) & ... & t_{n-1}^{n-3}(t_{n-1} - x) & t_{n-1}^{n-2}(t_{n-1} - x) \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} t_1 - x & t_1(t_1 - x) & t_1^2(t_1 - x) & ... & t_1^{n-2}(t_1 - x) \\ t_2 - x & t_2(t_2 - x) & t_2^2(t_2 - x) & ... & t_2^{n-2}(t_2 - x) \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ t_{n-2} - x & t_{n-2}(t_{n-2} - x) & t_{n-2}^2(t_{n-2} - x) & ... & t_{n-2}^{n-2}(t_{n-2} - x) \\ t_{n-1} - x & t_{n-1}(t_{n-1} - x) & t_{n-1}^2(t_{n-1} - x) & ... & t_{n-1}^{n-2}(t_{n-1} - x) \end{vmatrix} + 0 + ... + 0 =$$

$$= (t_1 - x)(t_2 - x)...(t_{n-2} - x)(t_{n-1} - x) \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & ... & t_1^{n-2} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & ... & t_2^{n-2} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & t_{n-2} & t_{n-2}^2 & ... & t_{n-2}^{n-2} \\ 1 & t_{n-1} & t_{n-1}^2 & ... & t_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= (t_1 - x)...(t_{n-1} - x) \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & ... & t_1^{n-2} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & ... & t_2^{n-2} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & t_{n-1} & t_{n-1}^2 & ... & t_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix} = (t_1 - x)...(t_{n-1} - x)V(t_1, ..., t_{n-1})$$

Determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & ... & t_1^{n-2} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & ... & t_2^{n-2} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & t_{n-1} & t_{n-1}^2 & ... & t_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

beror ej på x, och den är också uppenbart nollskild (vilket gör det tydligare varför ekvationssystemet i 6.14 har en entydig lösning). $V(t_1, ..., t_{n-1})$ är alltså lika med en konstant, säg a, vilket betyder att

$$V(t_1, ..., t_{n-1}, x) = a(t_1 - x)...(t_{n-1} - x) = a \prod_{k=1}^{n-1} (t_k - x).$$

Detta är uppenbart ett polynom med grad $n - 1$ (vi har $n - 1$ faktorer och alla bidrar med ett x), och dessutom är det väldigt tydligt att t_1,...,t_n är nollställena, eftersom polynomet är faktoriserat med sina nollställen. □

För att visa att

$$V(t_1, t_2, ..., t_n) = \prod_{j<k} (t_k - t_j)$$

betraktar vi situationen ovan, och sätter $x = t_n$. Då får vi att

$$V(t_1, ..., t_n) = \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & ... & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & ... & t_2^{n-1} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & t_n & t_n^2 & ... & t_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= (t_1 - x)...(t_{n-1} - x)V(t_1, ..., t_{n-1}) = \prod_{k=1}^{n-1}(t_n - t_k)\, V(t_1, ..., t_{n-1}) \iff$$

$$\iff V(t_1, ..., t_n) = \prod_{k=1}^{n-1}(t_n - t_k)\, V(t_1, ..., t_{n-1}).$$

Om vi förutsätter att vi endast arbetar med naturliga tal (heltal ≥ 1), kommer $k < n$ att motsvara talen $\{1, 2, ..., n-2, n-1\}$, vilket betyder att vi kan skriva om produkten till

$$\prod_{k=1}^{n-1}(t_n - t_k) = \prod_{k<n}(t_n - t_k).$$

Vi har nu rekursionsformeln:

$$V(t_1, ..., t_n) = \prod_{k<n}(t_n - t_k)\, V(t_1, ..., t_{n-1}),$$

vilket, om vi arbetar oss induktivt mot basfallet, blir

$$V(t_1, ..., t_n) = \prod_{k<n}(t_n - t_k)\, V(t_1, ..., t_{n-1}) =$$

$$= \prod_{k<n}(t_n - t_k) \prod_{k<n-1}(t_{n-1} - t_k)\, V(t_1, ..., t_{n-2}) = ... =$$

$$= \prod_{k<n}(t_n - t_k) \prod_{k<n-1}(t_{n-1} - t_k)... \prod_{k<2}(t_3 - t_k) \prod_{k<2}(t_2 - t_k)\, V(t_1),$$

och

$$V(t_1) = \left|1\right| = 1,$$

vilket betyder att

$$\prod_{k<n}(t_n - t_k) \prod_{k<n-1}(t_{n-1} - t_k)... \prod_{k<2}(t_3 - t_k) \prod_{k<2}(t_2 - t_k)\, V(t_1) = \prod_{j<k}(t_k - t_j),$$

där k går från 2 till n. □

8.9

Matrisen är inverterbar om $\det A \neq 0$, och dessutom gäller sambandet

$$\det A = \frac{1}{\det A^{-1}} \iff \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Vi beräknar därför determinanten:

$$\det A = \begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$$

Addition av 3 gånger kolonn 1 till kolonn 2, kolonn 1 till kolonn 3, och 2 gånger kolonn 1 till kolonn 4 ger

$$\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -7 & -3 & -3 \\ 4 & 7 & 1 & 6 \\ 7 & 13 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

Utveckling av rad 1:

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -7 & -3 & -3 \\ 4 & 7 & 1 & 6 \\ 7 & 13 & 3 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} -7 & -3 & -3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 13 & 3 & 9 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 = -3 \begin{vmatrix} 7 & 3 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 13 & 3 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(7 \cdot 1 \cdot 9 + 3 \cdot 6 \cdot 13 + 3 \cdot 7 \cdot 3 - 3 \cdot 1 \cdot 13 - 3 \cdot 7 \cdot 9 - 7 \cdot 6 \cdot 3) =$$

$$= 3(63 + 234 + 63 - 39 - 3 \cdot 63 - 2 \cdot 63) = 3(195 - 3 \cdot 63) = 3 \cdot 6 = 18 \neq 0. \quad \square$$

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{18}.$$

8.10

$$\begin{cases} (a+1)x + \quad y - \quad 3z = 1 \\ 2x + (2a-1)y - \quad 3z = 5 \\ 2x + \quad y - (2a+1)z = -3 \end{cases} \iff$$

$$\iff \underbrace{\begin{bmatrix} a+1 & 1 & -3 \\ 2 & 2a-1 & -3 \\ 2 & 1 & -2a-1 \end{bmatrix}}_{= A} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Detta ekvationssystem har en entydig lösning om $\det A \neq 0$ (eftersom då är matrisen inverterbar), annars kan det antingen finns oändligt med lösningar, eller inga. Vi beräknar determinanten:

$$\det A = \begin{vmatrix} a+1 & 1 & -3 \\ 2 & 2a-1 & -3 \\ 2 & 1 & -2a-1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a+1) \cdot (2a-1) \cdot (-2a-1) + 1 \cdot (-3) \cdot 2 + (-3) \cdot 2 \cdot 1 -$$

$$-(-3) \cdot (2a-1) \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot (-2a-1) - (a+1) \cdot (-3) \cdot 1 =$$

$$= -(a+1)(4a^2 - 1) - 6 - 6 + 6(2a-1) + 2(2a+1) + 3(a+1) =$$

$$= (a+1)(-4a^2 + 1 + 3) - 12 + 12a - 6 + 4a + 2 =$$

$$= 4(a+1)(1-a^2) + 16a - 16 = -4(a+1)(a-1)(a+1) + 16(a-1) =$$

$$= (a-1)(-4(a+1)^2 + 16) = (a-1)(-4a^2 - 8a - 4 + 16) =$$

$$= 4(a-1)(-a^2 - 2a + 3) = -4(a-1)(a+3)(a-1) = -4(a-1)^2(a+3) \implies$$

$$\implies \det A = 0 \iff -4(a-1)^2(a+3) \iff \begin{cases} a = -3 \\ a = 1. \end{cases}$$

Det finns alltså en lösning om $a \neq -3$ eller $a \neq 1$. Om $a = -3$ får vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} -2x + \ \ y - 3z \ \ \ \ = 1 \\ \ \ 2x - 7y - 3z + \ = 5 \\ \ \ 2x + \ \ y + 5z \ \ \ \ = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x + \ \ y - 3z = 1 \\ \qquad - 6y - 6z = 6 \\ \qquad\ \ 2y + 2z = -2 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -2x + y - 3z \qquad = 1 \\ \qquad\ \ y + \ \ z \qquad = -1 \\ \qquad\qquad\qquad 0 = 0 \end{cases}$$

här ser vi att det finns oändligt med lösningar. Om $a = 1$ får vi

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 1 \\ 2x + y - 3z = 5 \\ 2x + y - 3z = -3 \end{cases}$$

där vi ser att det inte finns någon lösningar eftersom vi har samma vänsterled ska vara lika med olika högerled.

8.11

Vektorerna bilder en bas om de är linjärt oberoende, och vi kan kontrollera detta linjära beroende genom att prega in vektorerna i en matris och sedan beräkna determinanten, eftersom vi vet att om determinanten är nollskild måste vektorerna/kolonnerna/raderna vara linjärt oberoende.

a)

Vi låter vektorerna vara kolonner i en matris, vilket ger oss determinanten, som vi vill ska vara nollskild,

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & x & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Om vi nu använder rad 2 för att subtrahera bort det första elementet i varje rad får vi

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & x & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1-x & -2x & 1-3x \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & x-3 & -5 & -7 \end{vmatrix}$$

Utveckling av kolonn 1 ger oss

$$\begin{vmatrix} 0 & 1-x & -2x & 1-3x \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & x-3 & -5 & -7 \end{vmatrix} = 0 + (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1-x & -2x & 1-3x \\ -1 & -2 & -3 \\ x-3 & -5 & -7 \end{vmatrix} + 0 + 0 =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1-x & -2x & 1-3x \\ -1 & -2 & -3 \\ x-3 & -5 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-x & -2x & 1-3x \\ 1 & 2 & 3 \\ x-3 & -5 & -7 \end{vmatrix}$$

Vi använder återigen rad 2 för att förenkla determinanten:

$$\begin{vmatrix} 1-x & -2x & 1-3x \\ 1 & 2 & 3 \\ x-3 & -5 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2x-2(1-x) & 1-3x-3(1-x) \\ 1 & 2 & 3 \\ x-3-(x-3) & -5-2(x-3) & -7-3(x-3) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1-2x & 2-3x \end{vmatrix}$$

Utveckling av kolonn 1:

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1-2x & 2-3x \end{vmatrix} = 0 + (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1-2x & 2-3x \end{vmatrix} + 0 =$$

$$= -\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1-2x & 2-3x \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1-2x & 2-3x \end{vmatrix} =$$

$$= 2(1 \cdot (2-3x) - 1 \cdot (1-2x)) = 2(2x-1+2-3x) = 2(1-x).$$

Det linjära beroendet uppstår om

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & x & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(1-x) = 0 \iff x = 1,$$

alltså vill vi att $x \neq 1$ för att vektorerna ska vara en bas.

b)

På samma sätt som i a), får vi determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 2 & 3 & x & 1 \\ 3 & x & 1 & 2 \\ x & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Subtraktion av rad 1 från nedanstående rader:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 2 & 3 & x & 1 \\ 3 & x & 1 & 2 \\ x & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 0 & -1 & x-6 & 1-2x \\ 0 & x-6 & -8 & 2-3x \\ 0 & 1-2x & 2-3x & 3-x^2 \end{vmatrix}$$

Vi förenklar detta ytterligare med rad 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 0 & -1 & x-6 & 1-2x \\ 0 & x-6 & -8 & 2-3x \\ 0 & 1-2x & 2-3x & 3-x^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 0 & -1 & x-6 & 1-2x \\ 0 & x-6-(x-6) & -8+(x-6)^2 & 2-3x+(1-2x)(x-6) \\ 0 & 1-2x-(1-2x) & 2-3x-(x-6)(1-2x) & 3-x^2-(1-2x)^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 0 & -1 & x-6 & 1-2x \\ 0 & 0 & -8+x^2-12x+36 & 2-3x+x-6-2x^2+12x \\ 0 & 0 & 2-3x+x-6-2x^2+12x & 3-x^2+1-4x+4x^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 0 & -1 & x-6 & 1-2x \\ 0 & 0 & x^2-12x+28 & -2x^2+10x-4 \\ 0 & 0 & -2x^2+10x-4 & 3x^2-4x+4 \end{vmatrix}$$

Utveckling av kolonn 1 två gånger ger

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 0 & -1 & x-6 & 1-2x \\ 0 & 0 & x^2-12x+28 & -2x^2+10x-4 \\ 0 & 0 & -2x^2+10x-4 & 3x^2-4x+4 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & x-6 & 1-2x \\ 0 & x^2-12x+28 & -2x^2+10x-4 \\ 0 & -2x^2+10x-4 & 3x^2-4x+4 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & x-6 & 1-2x \\ 0 & x^2-12x+28 & -2x^2+10x-4 \\ 0 & -2x^2+10x-4 & 3x^2-4x+4 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} x^2-12x+28 & -2x^2+10x-4 \\ -2x^2+10x-4 & 3x^2-4x+4 \end{vmatrix} + 0 + 0 =$$

$$= - \begin{vmatrix} x^2-12x+28 & -2x^2+10x-4 \\ -2x^2+10x-4 & 3x^2-4x+4 \end{vmatrix} =$$

$$= -((x^2-12x+28)(3x^2-4x+4) - (-2x^2+10x-4)(-2x^2+10x-4)) =$$

$$= (2x^2-10x+4)^2 - (x^2-12x+28)(3x^2-4x+4) =$$

$$= 4(x^2-5x+2)^2 - (x^2-12x+28)(3x^2-4x+4) =$$

$$= 4(x^4-5x^3+2x^2-5x^3+25x^2-10x+2x^2-10x+4) -$$

$$-(3x^4-4x^3+4x^2-36x^3+48x^2-48x+84x^2-112x+112)$$

$$= 4(x^4-10x^3+29x^2-20x+4) - (3x^4-40x^3+136x^2-160x+112) =$$

$$= 4x^4-40x^3+116x^2-80x+16-3x^4+40x^3-136x^2+160x-112 =$$

$$= x^4-20x^2+80x-96.$$

Det är uppenbart att $x = 2$ är en lösning, vilket tillåter oss att göra polynomdivision:

$$
\begin{array}{rl}
x^3 + 2x^2 - 16x + 48 & \\
\cline{1-1}
x^4 \quad - \quad 20x^2 + 80x - 96 & \underline{\,x - 2\,} \\
-x^3(x-2) & \\
\cline{1-1}
2x^3 - 20x^2 + 80x - 96 & \\
-2x^2(x-2) & \\
\cline{1-1}
-16x^2 + 80x - 96 & \\
-(-16x)(x-2) & \\
\cline{1-1}
48x - 96 & \\
-48(x-2) & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Alltså är

$$x^4 - 20x^2 + 80x - 96 = (x-2)(x^3 + 2x^2 - 16x + 48).$$

Denna är lite klurigare att gissa en rot till, men vi vet att, om det är ett heltal, måste det vara en faktor till $48/1$, vilket lämnar kandidaterna ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 8, ± 12, ± 16, ± 24, och ± 48. Detta är ganska många kandidater, men om man tänker lite kommer man att inse att $x = -6$ fungerar. Detta tillåter oss att polynomdividera igen:

$$
\begin{array}{rl}
x^2 - 4x + 8 & \\
\cline{1-1}
x^3 + 2x^2 - 16x + 48 & \underline{\,x + 6\,} \\
-x^2(x+6) & \\
\cline{1-1}
-4x^2 - 16x + 48 & \\
-(-4x)(x+6) & \\
\cline{1-1}
8x + 48 & \\
-8(x+6) & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Andragradspolynomet $x^2 - 4x + 8$ har inga reella rötter, och alltså kan vi konstatera att vektorerna utgör <u>inte</u> en bas när

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 2 & 3 & x & 1 \\ 3 & x & 1 & 2 \\ x & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (x+6)(x-2)(x^2 - 4x + 8) = 0,$$

vilket betyder att vektorerna är en bas när $x \neq -6$ och $x \neq 2$.

8.12

Att matriserna är inverterbara betyder att $\det \mathsf{A}, \det \mathsf{B} \neq 0$. Vi betraktar likheten

$$\mathsf{AB} = -\mathsf{BA} \implies \det(\mathsf{AB}) = \det(-\mathsf{BA}) = (-1)^n \det(\mathsf{BA}) \implies$$

$$\implies [\text{produktsatsen}] \implies \det \mathsf{A} \cdot \det \mathsf{B} = (-1)^n \det \mathsf{B} \cdot \det \mathsf{A} \implies$$

$$\implies [\det \mathsf{A}, \det \mathsf{B} \neq 0] \implies (-1)^n = 1,$$

vilket enbart gäller för jämna n. $\square$

8.13

En ortogonal matris, A, har egenskapen $A^t = A^{-1}$, och för determinanter gäller det att

$$\det A^t = \det A \quad \text{och} \quad \det A^{-1} = \frac{1}{\det A},$$

om A är ortogonal får vi då att

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \iff \det A^t = \frac{1}{\det A} \iff \det A = \frac{1}{\det A} \iff$$
$$\iff (\det A)^2 = 1 \iff \det A = \pm 1. \quad \square$$

8.14

Om

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

så fås $D(A^{(ij)})$ av att stryka rad i och kolonn j, vilket i en 2×2 matris bara motsvarar ett element:

$$D(A^{(11)}) = a_{22}, \quad D(A^{(12)}) = a_{21}, \quad D(A^{(21)}) = a_{12}, \quad D(A^{(22)}) = a_{11},$$

och alltså är

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)} \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} D(A^{(11)}) & (-1)^{1+2} D(A^{(21)}) \\ (-1)^{2+1} D(A^{(12)}) & (-1)^{2+2} D(A^{(22)}) \end{bmatrix} = \frac{1}{D(A)} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

På samma sätt för en 3×3 matris får man att, om

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

$$A^{-1} = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} D(A^{(11)}) & -D(A^{(21)}) & D(A^{(31)}) \\ -D(A^{(12)}) & D(A^{(22)}) & -D(A^{(32)}) \\ D(A^{(13)}) & -D(A^{(23)}) & D(A^{(33)}) \end{bmatrix},$$

där $D(A^{(ij)})$ är den 2×2 determinant man får av att stryka rad i och kolonn j.

a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \implies D(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2 \implies$$
$$\implies A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

b)

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 12 \\ 13 & 14 \end{bmatrix} \implies D(A) = 11 \cdot 14 - 12 \cdot 13 = -2 \implies$$
$$\implies A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 14 & -12 \\ -13 & 11 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -14 & 12 \\ 13 & -11 \end{bmatrix}$$

c)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \implies$$

$$\implies D(A) = 0 + 0 + 0 - 2 \cdot 3 \cdot 1 - 0 - 1 \cdot 1 \cdot 2 = -8,$$

och

$$D(A^{(11)}) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2,$$

$$D(A^{(12)}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1,$$

$$D(A^{(13)}) = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 3 = -3,$$

$$D(A^{(21)}) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 4 = -4,$$

$$D(A^{(22)}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2,$$

$$D(A^{(23)}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2,$$

$$D(A^{(31)}) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 6 = -6,$$

$$D(A^{(32)}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1,$$

$$D(A^{(33)}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 0 = 3 \implies$$

$$\implies A^{-1} = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} D(A^{(11)}) & -D(A^{(21)}) & D(A^{(31)}) \\ -D(A^{(12)}) & D(A^{(22)}) & -D(A^{(32)}) \\ D(A^{(13)}) & -D(A^{(23)}) & D(A^{(33)}) \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-8} \begin{bmatrix} -2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

8.15

Låt

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{v} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{w} = z_1\mathbf{e}_1 + z_2\mathbf{e}_2 + z_3\mathbf{e}_3,$$

där $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ är en ortonormerad bas. Bilda nu matrisen

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{bmatrix},$$

alltså matrisen där kolonnerna utgörs av vektorerna $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$. Det gäller då att

$$A^t = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix},$$

vilket är matrisen där raderna utgörs av vektorerna $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$. Matrismultiplikation är bara en massa skalärprodukter som utförs (för att få elementet på rad i och kolonn j vid en matrismultiplikation tar man skalärprodukten av rad i i den vänstra matrisen och kolonn j i den högra matrisen), vilket betyder att

$$A^t A = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{u} \,|\, \mathbf{u}) & (\mathbf{u} \,|\, \mathbf{v}) & (\mathbf{u} \,|\, \mathbf{w}) \\ (\mathbf{v} \,|\, \mathbf{u}) & (\mathbf{v} \,|\, \mathbf{v}) & (\mathbf{v} \,|\, \mathbf{w}) \\ (\mathbf{w} \,|\, \mathbf{u}) & (\mathbf{w} \,|\, \mathbf{v}) & (\mathbf{w} \,|\, \mathbf{w}) \end{bmatrix}.$$

Från kapitel 4 vet vi att

$$\pm V = \det A = \det A^t,$$

vilket betyder att

$$V^2 = (\pm V)^2 = (\det A)^2 = \det A^t \cdot \det A = [\text{produktsatsen}] =$$

$$= \det (A^t A) = \begin{vmatrix} (\mathbf{u} \,|\, \mathbf{u}) & (\mathbf{u} \,|\, \mathbf{v}) & (\mathbf{u} \,|\, \mathbf{w}) \\ (\mathbf{v} \,|\, \mathbf{u}) & (\mathbf{v} \,|\, \mathbf{v}) & (\mathbf{v} \,|\, \mathbf{w}) \\ (\mathbf{w} \,|\, \mathbf{u}) & (\mathbf{w} \,|\, \mathbf{v}) & (\mathbf{w} \,|\, \mathbf{w}) \end{vmatrix}. \quad \square$$

Kapitel 9

9.1

Vi undersöker vart basvektorerna $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ hamnar efter den linjära avbildning, sedan vet vi att matrisen för den linjära avbildningen kommer att ges av

$$\begin{bmatrix} \mathsf{F}(\mathbf{e}_1) & \mathsf{F}(\mathbf{e}_2) \end{bmatrix},$$

alltså kolonnerna utgörs av vad basvektorerna avbildas på.

a)

Vid spegling i x_1-axeln kommer $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ att avbildas på sig själv (eftersom den ligger redan på x_1-axeln) och $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ kommer att avbildas på $(0, -1)$. Detta betyder att vi får matrisen

$$\begin{bmatrix} \mathsf{F}(\mathbf{e}_1) & \mathsf{F}(\mathbf{e}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

b)

Rotation ett kvarts varv i positiv led innebär att $\mathbf{e}_1$ kommer att avbildas på $\mathbf{e}_2$, alltså $(0, 1)$, och $\mathbf{e}_2$ avbildas på $-\mathbf{e}_1$, $(-1, 0)$, vilket ger oss matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

c)

I planet har linjen $4x_1 + 3x_2 = 0$ normalvektorn $\tilde{\mathbf{n}} = (4, 3)$, som vid normering blir

$$\mathbf{n} = \frac{1}{5}(4, 3),$$

vilket betyder att den ortogonala projektionen av en vektor $\mathbf{u}$ på linjen kan skrivas som

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} - (\mathbf{n} \,|\, \mathbf{u})\mathbf{n}.$$

För basvektorerna får vi

$$\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 - (\mathbf{n} \,|\, \mathbf{e}_1)\mathbf{n} = (1, 0) - \frac{1}{5}((4, 3) \,|\, (1, 0))\frac{1}{5}(4, 3) = (1, 0) - \frac{4}{25}(4, 3) = \frac{1}{25}(9, -12),$$

$$\mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_2 - (\mathbf{n} \,|\, \mathbf{e}_2)\mathbf{n} = (0, 1) - \frac{1}{5}((4, 3) \,|\, (0, 1))\frac{1}{5}(4, 3) = (0, 1) - \frac{3}{25}(4, 3) = \frac{1}{25}(-12, 16),$$

vilket ger oss avbildningsmatrisen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1' & \mathbf{e}_2' \end{bmatrix} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{bmatrix}$$

d)

Vi gör likadant som för projektionen, men istället för att subtrahera $(\mathbf{n}\,|\,\mathbf{u})\mathbf{n}$, subtraherar vi istället $2(\mathbf{n}\,|\,\mathbf{u})\mathbf{n}$, vilket kommer att spegla vektorn i linjen. Avbildningen för basvektorerna:

$$\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 - 2(\mathbf{n}\,|\,\mathbf{e}_1)\mathbf{n} = (1,0) - 2\cdot\frac{1}{5}((4,3)\,|\,(1,0))\frac{1}{5}(4,3) = (1,0) - \frac{8}{25}(4,3) = \frac{1}{25}(-7,-24),$$

$$\mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_2 - 2(\mathbf{n}\,|\,\mathbf{e}_2)\mathbf{n} = (0,1) - 2\cdot\frac{1}{5}((4,3)\,|\,(0,1))\frac{1}{5}(4,3) = (0,1) - \frac{6}{25}(4,3) = \frac{1}{25}(-24,7),$$

vilket ger oss avbildningsmatrisen

$$\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1' & \mathbf{e}_2'\end{bmatrix} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix}-7 & -24\\ -24 & 7\end{bmatrix}$$

9.2

a)

Den normerade normalvektorn ges av $\mathbf{n} = (0,0,1)$, och vi får speglingen, precis som i föregående uppgift, med formeln

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} - 2(\mathbf{n}\,|\,\mathbf{u})\mathbf{n},$$

vilket för basvektorerna blir

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1' &= \mathbf{e}_1 - 2(\mathbf{n}\,|\,\mathbf{e}_1)\mathbf{n} = (1,0,0) - 2((0,0,1)\,|\,(1,0,0))(0,0,1) = \\
&= (1,0,0) - 0 = (1,0,0) = \mathbf{e}_1, \\
\mathbf{e}_2' &= \mathbf{e}_2 - 2(\mathbf{n}\,|\,\mathbf{e}_2)\mathbf{n} = (0,1,0) - 2((0,0,1)\,|\,(0,1,0))(0,0,1) = \\
&= (0,1,0) - 0 = (0,1,0) = \mathbf{e}_2, \\
\mathbf{e}_3' &= \mathbf{e}_3 - 2(\mathbf{n}\,|\,\mathbf{e}_3)\mathbf{n} = (0,0,1) - 2((0,0,1)\,|\,(0,0,1))(0,0,1) = \\
&= (1,0,0) - 2(0,0,1) = (0,0,-1) = -\mathbf{e}_3,
\end{aligned}$$

vilket ger oss avbildningsmatrisen

$$\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1' & \mathbf{e}_2' & \mathbf{e}_3'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}.$$

Alternativt hade man kunnat notera att speglingen sker i x_1x_2-planet, vilket betyder att det endast är x_3-koordinaten som kommer påverkas, och den kommer att negeras, vilket direkt ger en vad basvektorerna avbildas på, men formeln funkar också.

b)

Normerade normalvektorn: $x_1 + x_2 + x_3 = 0 \implies \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, och projektionen ges av samma formel som innan, vilket betyder att basvektorerna avbildas på följande vektorer:

$$\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 - (\mathbf{n}\,|\,\mathbf{e}_1)\mathbf{n} = (1,0,0) - \frac{1}{\sqrt{3}}((1,1,1)\,|\,(1,0,0))\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) =$$

$$= (1,0,0) - \frac{1}{3}(1,1,1) = \frac{1}{3}(2,-1,-1),$$

$$\mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_2 - (\mathbf{n}\,|\,\mathbf{e}_2)\mathbf{n} = (0,1,0) - \frac{1}{3}((1,1,1)\,|\,(0,1,0))(1,1,1) =$$

$$= (0,1,0) - \frac{1}{3}(1,1,1) = \frac{1}{3}(-1,2,-1),$$

$$\mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_3 - (\mathbf{n}\,|\,\mathbf{e}_3)\mathbf{n} = (0,0,1) - \frac{1}{3}((1,1,1)\,|\,(0,0,1))(1,1,1) =$$

$$= (0,0,1) - \frac{1}{3}(1,1,1) = \frac{1}{3}(-1,-1,2),$$

och alltså blir matrisen

$$\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1' & \mathbf{e}_2' & \mathbf{e}_3'\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

c)

Samma normalvektor som i b), vilket ger oss avbildningarna (tänk på att det är spegling nu):

$$\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 - 2(\mathbf{n}\,|\,\mathbf{e}_1)\mathbf{n} = (1,0,0) - 2\cdot\frac{1}{3}((1,1,1)\,|\,(1,0,0))(1,1,1) =$$

$$= (1,0,0) - \frac{2}{3}(1,1,1) = \frac{1}{3}(1,-2,-2),$$

$$\mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_2 - 2(\mathbf{n}\,|\,\mathbf{e}_2)\mathbf{n} = (0,1,0) - \frac{2}{3}((1,1,1)\,|\,(0,1,0))(1,1,1) =$$

$$= (0,1,0) - \frac{2}{3}(1,1,1) = \frac{1}{3}(-2,1,-2),$$

$$\mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_3 - 2(\mathbf{n}\,|\,\mathbf{e}_3)\mathbf{n} = (0,0,1) - \frac{2}{3}((1,1,1)\,|\,(0,0,1))(1,1,1) =$$

$$= (0,0,1) - \frac{2}{3}(1,1,1) = \frac{1}{3}(-2,-2,1),$$

och vi får då matrisen

$$\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1' & \mathbf{e}_2' & \mathbf{e}_3'\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

9.3

Vi undersöker vad basvektorerna avbildas på

$$\mathsf{F}(\mathbf{u}) = \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} - 2t\frac{d\mathbf{u}}{dt} \implies$$

$$\implies \mathsf{F}(1) = \frac{d^2}{dt^2}(1) - 2t\frac{d}{dt}(1) = 0 = (0,0,0,0),$$

$$\mathsf{F}(t) = \frac{d^2}{dt^2}(t) - 2t\frac{d}{dt}(t) = 0 - 2t \cdot 1 = -2t = (0,-2,0,0),$$

$$\mathsf{F}(t^2) = \frac{d^2}{dt^2}(t^2) - 2t\frac{d}{dt}(t^2) = 2 - 2t \cdot 2t = 2 - 4t^2 = (2,0,-4,0),$$

$$\mathsf{F}(t^3) = \frac{d^2}{dt^2}(t^3) - 2t\frac{d}{dt}(t^3) = 6t - 2t \cdot 3t^2 = 6t - 6t^3 = (0,6,0,-6),$$

vilket ger oss avbildningsmatrisen

$$\begin{bmatrix}\mathsf{F}(1) & \mathsf{F}(t) & \mathsf{F}(t^2) & \mathsf{F}(t^3)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

9.4

$$\begin{bmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{bmatrix}$$

Matsisen för F i den nya fås av att avbilda basvektorerna i den nya basen:

$$\mathsf{F}(\mathbf{e}_1') = \mathsf{F}(2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1'$$

$$\mathsf{F}(\mathbf{e}_2') = \mathsf{F}(3\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} = 2(3\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = 2\mathbf{e}_2'$$

$$\mathsf{F}(\mathbf{e}_3') = \mathsf{F}(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = 3(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3) = 3\mathbf{e}_3'$$

Alltså ges avbildningsmatrisen, i den nya basen, av

$$\begin{bmatrix}\mathsf{F}(\mathbf{e}_1') & \mathsf{F}(\mathbf{e}_2') & \mathsf{F}(\mathbf{e}_3')\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

9.5

Det finns ett antal sätt att göra denna uppgift. Man kan antingen bestämma avbildningsmatrisen, vilket lämpligen görs genom att välja en ortonormerad bas där linjen, om det är rotationen i rummet, är en av koordinataxlarna, då får man i planet avbildningasmatrisen

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

och i rummet, om z-axeln är linjen,

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sedan är det bara att beräkna determinanten av dessa, men detta är onödigt arbete. Ett annat sätt att göra uppgiften på är att konstatera att rotationsavbildningar är isometriska, vilket visserligen är ett senare delkapitel, men det spelar inte så stor roll, och alltså måste längden av alla vektorer som avbildas bevaras. Determinanten är ett mått på hur mycket en vektor skalas, då man avbildar den med matrisen, och alltså, om matrisen ska bevara längder, måste determinanten vara ± 1. Vidare behåller också rotationer orienteringen på vektorer (alltså de vänds inte), och därför måste determinanten vara positiv, vilket betyder att determinanten för alla rotationer är 1.

a)

1.

b)

1.

9.6

Avbildningarna är projektioner om $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. Linjen och planet ges, enligt Sats 1, av $N(\mathsf{P})$ och $V(\mathsf{P})$, respektive. Om vi kommer fram till att nollrummet till projektionerna har dimension 1 visar det både att projektionen är parallellt med en linje, och att värderummets dimension är två, vilket betyder att projektionen sker på ett plan.

a)

$$\mathsf{P} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \implies \mathsf{P}^2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1\cdot 1 + (-1)\cdot(-3) + (-2)\cdot 1 & 1\cdot(-1) + (-1)\cdot(-1) + (-2)\cdot 1 & 1\cdot(-2) + (-1)\cdot(-6) + (-2)\cdot 4 \\ (-3)\cdot 1 + (-1)\cdot(-3) + (-6)\cdot 1 & (-3)\cdot(-1) + (-1)\cdot(-1) + (-6)\cdot 1 & (-3)\cdot(-2) + (-1)\cdot(-6) + (-6)\cdot 4 \\ 1\cdot 1 + 1\cdot(-3) + 4\cdot 1 & 1\cdot(-1) + 1\cdot(-1) + 4\cdot 1 & 1\cdot(-2) + 1\cdot(-6) + 4\cdot 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -6 & -2 & -12 \\ 2 & 2 & 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \mathsf{P}. \quad \square$$

För att hitta nollrummet betraktar vi

$$\mathsf{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \iff \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - x_3 = 0 \\ -\frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - 3x_3 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ -3x_1 - x_2 - 6x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ - 4x_2 - 12x_3 = 0 \\ 2x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff [x_3 = t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = x_2 + 2x_3 = -t \\ x_2 = -3x_3 = -3t \\ x_3 = t \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

vilket är linjen vi söker. För att bestämma planet kan vi ta två linjärt oberoende kolonner i projektionsmatrisen, exempelvis kolonn 1 och 2, och sedan förenkla ekvationen

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & x_1 \\ -3 & -1 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1) \cdot x_3 + (-1) \cdot x_2 \cdot 1 + x_1 \cdot (-3) \cdot 1 - x_1 \cdot (-1) \cdot 1 - (-1) \cdot (-3) \cdot x_3 - 1 \cdot x_2 \cdot 1 =$$

$$= -x_3 - x_2 - 3x_1 + x_1 - 3x_3 - x_2 = -2x_1 - 2x_2 - 4x_3 \iff x_1 + x_2 + 2x_3 = 0,$$

vilket är planet vi projicerar på.

b)

$$\mathsf{P} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \implies \mathsf{P}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \cdot (-1) + 1 \cdot 4 + (-3) \cdot 2 & -1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-3) \cdot (-1) & -1 \cdot (-3) + 1 \cdot 6 + (-3) \cdot 4 \\ 4 \cdot (-1) + (-1) \cdot 4 + 6 \cdot 2 & 4 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 6 \cdot (-1) & 4 \cdot (-3) + (-1) \cdot 6 + 6 \cdot 4 \\ 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 4 + 4 \cdot 2 & 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 4 \cdot (-1) & 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 6 + 4 \cdot 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 6 \\ -1 & 4 & \end{bmatrix} = \mathsf{P}. \quad \square$$

Här får vi nollrummet

$$\mathsf{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \iff \begin{cases} -x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 6x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_2 - 6x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff [x_3 = t] \iff \begin{cases} x_1 = x_2 - 3x_3 = -t \\ x_2 = 2x_3 = 2t \\ x_3 = t \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

som beskriver linjen. Vi har återigen en matris med rang 2, vilket betyder att vi kan få planet genom att välja två linjärt oberoende kolonner, 1 och 2 duger, och sedan betrakta ekvationen

$$0 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & x_1 \\ 4 & -1 & x_2 \\ 2 & -1 & x_3 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot (-1) \cdot x_3 + 1 \cdot x_2 \cdot 2 + x_1 \cdot 4 \cdot (-1) - x_1 \cdot (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 4 \cdot x_3 - (-1) \cdot x_2 \cdot (-1) =$$

$$= x_3 + 2x_2 - 4x_1 + 2x_1 - 4x_3 - x_2 = -2x_1 + x_2 - 3x_3,$$

vilket betyder att planet som sökes är

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0.$$

9.7

Vektorerna är ortogonala, men inte normerade. Efter normering har vi vektorerna

$$\frac{1}{2}(1,1,1,1) \quad \text{och} \quad \frac{1}{2}(1,-1,1,-1),$$

vilket motiverar oss att bilda matrisen

$$B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

och, eftersom vi har en ortonormerad bas, kan vi med hjälp av anmärkningen som står på samma sida bilda matrisen för den ortogonala projektion genom att beräkna

$$BB^t = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1+1 & 1-1 & 1+1 & 1-1 \\ 1-1 & 1+1 & 1-1 & 1+1 \\ 1+1 & 1-1 & 1+1 & 1-1 \\ 1-1 & 1+1 & 1-1 & 1+1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9.8

Vi börjar med att bestämma en bas för $N(C)$.

$$Cx = 0 \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 \qquad\quad + 3x_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_2 - 6x_3 \qquad\quad = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 3x_3 \qquad\quad = 0 \end{cases} \iff [x_3 = s,\ x_4 = t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -x_2 - 2x_3 - x_4 = s - t \\ x_2 = -3x_3 = -3s \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vektorerna $(-1,0,0,1)$ och $(1,-3,1,0)$ utgör alltså en bas för $N(C)$. Vi arbetar gärna med ortonormerade baser, så vi tillämpar därför Gram-Schmidt:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,0,1) \implies$$

$$\implies \mathbf{e}_2 \parallel (1,-3,1,0) - \frac{(\mathbf{e}_1 \,|\, (1,-3,1,0))}{(\mathbf{e}_1 \,|\, \mathbf{e}_1)}\mathbf{e}_1 = (1,-3,1,0) - (\mathbf{e}_1 \,|\, (1,-3,1,0))\mathbf{e}_1 =$$

$$= (1,-3,1,0) - \frac{1}{\sqrt{2}}((-1,0,0,1) \,|\, (1,-3,1,0))\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,0,1) =$$

$$= (1,-3,1,0) - \frac{1}{2}(-1+0+0+0)(-1,0,0,1) =$$

$$= \frac{1}{2}(2,-6,2,0) + \frac{1}{2}(-1,0,0,1) = \frac{1}{2}(1,-6,2,1) \parallel (1,-6,2,1) \implies$$

$$\implies \mathbf{e}_2 = \frac{(1,-6,2,1)}{|(1,-6,2,1)|} = \frac{1}{\sqrt{1+36+4+1}}(1,-6,2,1) = \frac{1}{\sqrt{42}}(1,-6,2,1).$$

På samma sätt som i föregående uppgift bildar vi nu matrisen

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{42}} \\ 0 & -\frac{6}{\sqrt{42}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{42}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{42}} \end{bmatrix}$$

Vi får nu projektionsmatrisen av

$$BB^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{42}} \\ 0 & -\frac{6}{\sqrt{42}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{42}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{42}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{42}} & -\frac{6}{\sqrt{42}} & \frac{2}{\sqrt{42}} & \frac{1}{\sqrt{42}} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{42} & 0-\frac{6}{42} & 0+\frac{2}{42} & -\frac{1}{2}+\frac{1}{42} \\ 0-\frac{6}{42} & 0+\frac{36}{42} & 0-\frac{12}{42} & 0-\frac{6}{42} \\ 0+\frac{2}{42} & 0-\frac{12}{42} & 0+\frac{4}{42} & 0+\frac{2}{42} \\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{42} & 0-\frac{6}{42} & 0+\frac{2}{42} & \frac{1}{2}+\frac{1}{42} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{42}\begin{bmatrix} 21+1 & -6 & 2 & -21+1 \\ -6 & 36 & -12 & -6 \\ 2 & -12 & 4 & 2 \\ -21+1 & -6 & 2 & 21+1 \end{bmatrix} = \frac{1}{42}\begin{bmatrix} 22 & -6 & 2 & -20 \\ -6 & 36 & -12 & -6 \\ 2 & -12 & 4 & 2 \\ -20 & -6 & 2 & 22 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{21}\begin{bmatrix} 11 & -3 & 1 & -10 \\ -3 & 18 & -6 & -3 \\ 1 & -6 & 2 & 1 \\ -10 & -3 & 1 & 11 \end{bmatrix}$$

9.9

$$S = E - 2BB^t.$$

I denna formel är B en kolonnmatris, i form av en normerad normalvektor, vilket kan ses som en ortonormerad bas för ett underrum med dimension 1. Från tidigare uppgifter vet vi att den ortogonala projektionsmatrisen ges av BB^t, om B har kolonner som utgör en ortonormerad bas. För att spegla en vektor tar man vektor minus 2 gånger projektionen av vektorn på normalen, alltså

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} - 2(\mathbf{n} \,|\, \mathbf{u})\mathbf{n},$$

vilket på matrisform då kommer att bli

$$\mathbf{u}' = E\mathbf{u} - 2BB^t\mathbf{u} = (E - 2BB^t)\mathbf{u},$$

där vi avläser att avbildningsmatrisen är just det som formeln föreslog.

9.10

a)

Man kontrollerar snabbt att determinanten är 1, vilket betyder att det är en rotation, och dessutom kan man skriva

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix},$$

vilket är rotationsmatrisen för rotation $-\pi/4$ radianer.

b)

För denna matris är determinanten -1, och alltså är det en spegling. Vi tittar därför på ekvationen

$$Sx = x \iff (E - S)x = \mathbf{0},$$

där

$$S = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{bmatrix} \implies E - S = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 8 & -12 \\ -12 & 18 \end{bmatrix} = \frac{2}{13}\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{bmatrix},$$

vilket ger oss ekvationsysstemet

$$\begin{cases} 4x_1 - 6x_2 = 0 \\ -6x_1 + 9x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 0 \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Där vi kan avläsa att nollrummet till $E - S$ utgörs av linjen

$$2x_1 - 3x_2 = 0 \iff 2x_1 = 3x_2,$$

vilket då är den linje som avbildningen speglar i.

9.11

a)

Man kan kontrollera att matrisen har determinanten 1, vilket visar att det är en rotation. På samma sätt som i den föregående uppgiftens b)-del får vi den geometriska tolkningen genom att bestämma nollrummet till $\mathsf{E} - \mathsf{A}$, vilket är samma sak som att lösa ekvationen $\mathsf{A}x = x$, där A är matrisen i uppgiften.

$$\mathsf{A}x = x \iff \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 8 & 4 & 1 \\ 4 & -7 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 9x_1 \\ 8x_1 + 4x_2 + \ \ x_3 = 9x_2 \\ -4x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 9x_3 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -8x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 0 \\ 8x_1 - 5x_2 + \ \ x_3 = 0 \\ -4x_1 + 7x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -8x_1 - \ \ 4x_2 + \ \ 8x_3 = 0 \\ \qquad - \ \ 9x_2 + \ \ 9x_3 = 0 \\ \qquad\quad 18x_2 - 18x_3 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 \qquad = 0 \\ \qquad\quad x_2 - \ \ x_3 \qquad = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 0 \end{cases} \iff [x_3 = 2t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -x_2/2 + x_3 = -t + 2t = t \\ x_2 = x_3 = 2t \\ x_3 = 2t \end{cases}$$

Avbildningen är alltså en rotation kring linjen $t(1,2,2)$. För att bestämma rotaionsvinkeln väljer vi en vektor som är ortogonal mot rotationsaxeln, exempelvis $\mathbf{v} = (2,-1,0)$.

$$\mathsf{F}(\mathbf{v}) = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 8 & 4 & 1 \\ 4 & -7 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ -15 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix},$$

och vinkeln fås sedan av, som det står på sidan till vänster,

$$\cos\theta = \frac{(\mathbf{v} \mid \mathsf{F}(\mathbf{v}))}{|\mathbf{v}||\mathsf{F}(\mathbf{v})|} = \frac{\frac{1}{3}((2,-1,0) \mid (2,4,-5))}{|(2,-1,0)||(2,4,-5)|} =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{4-4-0}{|(2,-1,0)||(2,4,-5)|} = 0 \implies \theta = \pm\frac{\pi}{2}.$$

Vilken riktning rotationen sker åt fås av att beräkna kryssprodukten

$$\mathbf{v} \times \mathsf{F}(\mathbf{v}) = (2,-1,0) \times \frac{1}{3}(2,4,-5) = \frac{1}{3}(5,10,10) = \frac{5}{3}(1,2,2).$$

Eftersom denna vektor har samma riktning som linjens riktningsvektor är sker rotationen moturs sett från spetsen på $(1,2,2)$. Sammanfattningsvis svarar avbildningen mot en rotation kring linjen $t(1,2,2)$, $\pi/2$ radianer sett från spetsen på linjens riktningsvektor, $(1,2,2)$.

b)

Återigen är det en rotation eftersom determinanten är 1. Vi tillämpar samma algoritm som ovan:

$$\mathsf{A}x = x \iff \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} \quad\quad x_2 \quad\quad = x_1 \\ \quad\quad\quad\quad x_3 = x_2 \\ x_1 \quad\quad\quad\quad = x_3 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -x_1 + x_2 \quad\quad = 0 \\ \quad\quad - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 \quad\quad - x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x_1 + x_2 \quad\quad = 0 \\ \quad\quad - x_2 + x_3 = 0 \\ \quad\quad x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 - x_2 \quad\quad = 0 \\ \quad\quad x_2 - x_3 \quad = 0 \\ \quad\quad\quad\quad 0 = 0 \end{cases} \iff [x_3 = t] \iff \begin{cases} x_1 = x_2 = t \\ x_2 = x_3 = t \\ x_3 = t \end{cases}$$

Alltså beskriver matrisen en rotation kring linjen $t(1,1,1)$. Vi väljer en vektor som är ortogonal mot denna riktningsvektor för att bestämma vinkeln, och riktningen. En sådan vektor är $\mathbf{v} = (1,-1,0)$.

$$\mathsf{F}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vinkeln ges nu av

$$\cos\theta = \frac{(\mathbf{v} \mid \mathsf{F}(\mathbf{v}))}{|\mathbf{v}||\mathsf{F}(\mathbf{v})|} = \frac{((1,-1,0) \mid (-1,0,1))}{|(1,-1,0)||(-1,0,1)|} = \frac{-1-0+0}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \implies \theta = \pm\frac{2\pi}{3}.$$

För att avgöra åt vilket håll rotationen sker betraktar vi kryssprodukten

$$\mathbf{v} \times \mathsf{F}(\mathbf{v}) = (1,-1,0) \times (-1,0,1) = (-1,-1,-1),$$

vilket är i motsatt riktning från linjens riktningsvektor $(-1,-1,-1)$, och alltså är rotationsvinkel $-2\pi/3$. Sammanfattningsvis tolkas avbildningsmatrisen som en rotation $-2\pi/3$ radianer kring linjen $t(1,1,1)$ sett från spetsen på vektorn $(1,1,1)$.

9.12

a)

Man kan kontrollera att determinanten är 1, vilket betyder att det är en rotaionsmatris. Vi gör därför som i 9.11.

$$\mathsf{A}x = x \iff \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} -6x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7x_1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 7x_2 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 7x_3 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -13x_1 + \ \ 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 10x_2 + 6x_3 = 0 \\ 3x_1 + \ \ 6x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -13x_1 + \quad 2x_2 + \ \ 3x_3 = 0 \\ \quad\quad - 126x_2 + 84x_3 = 0 \\ \quad\quad\quad 84x_2 - 56x_3 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -13x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ \quad\quad - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ \quad\quad\quad 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -13x_1 + 2x_2 + 3x_3 \quad = 0 \\ \quad\quad - 3x_2 + 2x_3 \quad = 0 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad 0 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff [x_3 = 3t] \iff \begin{cases} x_1 = (2x_2 + 3x_3)/13 = t \\ x_2 = 2x_3/3 = 2t \\ x_3 = 3t \end{cases}$$

Matrisen är därmed en rotation kring linjen $t(1,2,3)$. En ortogonal vektor till riktningsvektorn $(1,2,3)$ är $\mathbf{v} = (2,-1,0)$, och

$$\mathsf{F}(\mathbf{v}) = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -14 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Detta ger oss rotationsvinkeln

$$\cos\theta = \frac{(\mathbf{v} \,|\, \mathsf{F}(\mathbf{v}))}{|\mathbf{v}||\mathsf{F}(\mathbf{v})|} = \frac{((2,-1,0) \,|\, (-2,1,0))}{|(2,-1,0)||(-2,1,0)|} = \frac{-4-1+0}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = -1 \implies \theta = \pm\pi.$$

Eftersom π radianer är ett halvt varv spelar det ingen roll om det är plus eller minus, och alltså vilket håll som rotationen sker åt, vilket betyder att direkt kan fastställa den geometriska tolkningen för matrisen som en rotation ett halvt varv runt linjen $t(1,2,3)$.

b)

I detta fall blir determinanten -1, vilket betyder att det är en rotation åtföljd av en spegling (Sats 3). Vi undersöker denna matris, genom att betrakta ekvationen

$$\mathsf{S}x = x \iff \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 7 & -6 & 6 \\ -6 & 2 & 9 \\ 6 & 9 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 7x_1 - 6x_2 + 6x_3 = 11x_1 \\ -6x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 11x_2 \\ 6x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 11x_3 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -4x_1 - 6x_2 + 6x_3 = 0 \\ -6x_1 - 9x_2 + 9x_3 = 0 \\ 6x_1 + 9x_2 - 9x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0 \\ -2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 \quad = 0 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad 0 = 0 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad 0 = 0 \end{cases}$$

Ur detta kan vi avläsa att matrisen motsvarar en spegling i planet

$$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0.$$

Om man istället vill ta reda på linjen som man först roterar kring betraktar man istället ekvationen

$$\mathsf{S}x = -x \iff \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 7 & -6 & 6 \\ -6 & 2 & 9 \\ 6 & 9 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 7x_1 - 6x_2 + 6x_3 = -11x_1 \\ -6x_1 + 2x_2 + 9x_3 = -11x_2 \\ 6x_1 + 9x_2 + 2x_3 = -11x_3 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 18x_1 - \ \ 6x_2 + \ \ 6x_3 = 0 \\ -6x_1 + 13x_2 + \ \ 9x_3 = 0 \\ 6x_1 + \ \ 9x_2 + 13x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 6x_1 - \ \ 2x_2 + \ \ 2x_3 = 0 \\ -6x_1 + 13x_2 + \ \ 9x_3 = 0 \\ 6x_1 + \ \ 9x_2 + 13x_3 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 6x_1 - \ \ 2x_2 + \ \ 2x_3 = 0 \\ \qquad 11x_2 + 11x_3 = 0 \\ \qquad 11x_2 + 11x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 \qquad = 0 \\ \qquad x_2 + x_3 \qquad = 0 \\ \qquad\qquad 0 = 0 \end{cases} \iff [x_3 = -3t] \iff$$

$$\begin{cases} x_1 = (x_2 - x_3)/3 = 2t \\ x_2 = -x_3 = 3t \\ x_3 = -3t \end{cases}$$

Här ser vi att linjen vi roterar kring beskrivs av $t(2, 3, -3)$ (notera att detta är normalvektorn till planet).

Varför dessa grejer blir som de blir kommer att tydliggöras i nästa kapitel med egenvärden och egenvektorer.

9.13

a)

Om A är en spegling så måste det gälla att $A^2 = E$, alltså A är sin egna invers, men en spegling är också en isometri, vilket betyder att A måste vara en ortogonal matris. Alltså är

$$AA^t = A^2 = E \implies \underbrace{A^2}_{=E} A^t = A \implies A^t = A. \quad \square$$

b)

För spegling i ett plan kan vi enkelt visa påståendet genom att konstruera avbildningsmatrisen. Låt

$$B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},$$

där $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, vara planets enhetsnormal. Enligt (9.15) får vi avbildningsmatrisen

$$A = E - 2BB^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & 1 - 2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & 1 - 2c^2 \end{bmatrix} \implies$$

$$\implies \det A = \begin{vmatrix} 1 - 2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & 1 - 2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & 1 - 2c^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2a^2 + 1) \cdot (-2b^2 + 1) \cdot (-2c^2 + 1) + (-2ab) \cdot (-2bc) \cdot (-2ac) + (-2ac)(-2ab)(-2bc) -$$

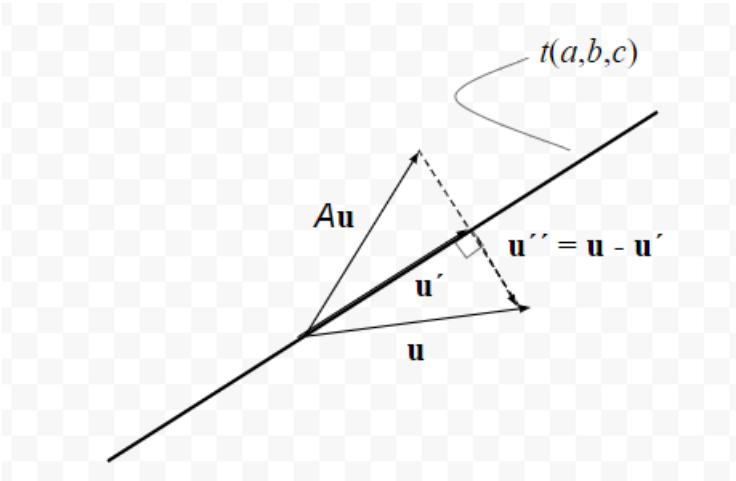
$$-(-2ac)\cdot(-2b^2+1)\cdot(-2ac)-(-2bc)\cdot(-2bc)\cdot(-2a^2+1)-(-2c^2+1)\cdot(-2ab)\cdot(-2ab)=$$
$$=-(2a^2-1)(2b^2-1)(2c^2-1)-8a^2b^2c^2-8a^2b^2c^2+$$
$$+4a^2c^2(2b^2-1)+4b^2c^2(2a^2-1)+4a^2b^2(2c^2-1)=$$
$$=-(4a^2b^2-2a^2-2b^2+1)(2c^2-1)-16a^2b^2c^2+$$
$$+8a^2b^2c^2-4a^2c^2+8a^2b^2c^2-4b^2c^2+8a^2b^2c^2-4a^2b^2=$$
$$=-(8a^2b^2c^2-4a^2b^2-4a^2c^2+2a^2-4b^2c^2+2b^2+2c^2-1)+8a^2b^2c^2-4a^2c^2-4b^2c^2-4a^2b^2=$$
$$=-2a^2-2b^2-2c^2+1=1-2(a^2+b^2+c^2)=1-2\cdot 1=-1. \quad \square$$

På ett likartat, fast betydligt mindre numeriskt krävande, kan vi konstruera avbildningsmatrisen för en spegling i origo. För att spegla i origo behöver man helt enkelt bara negera vektorn, vilket betyder att

$$A=-E \implies \det A=\det(-E)=-1,$$

eftersom vi är i rummet. $\square$

Slutligen har vi bara fallet med en linje kvar. En godtycklig linje i rummet, som passerar genom origo (den måste passera genom origo för att speglingen ska vara en linjär avbildning) kan skrivas som $t(a,b,c)$. Av anledningar som snart blir uppenbara är riktningsvektorn (a,b,c) normerad, så $a^2+b^2+c^2=1$. För att konstruera avbildningsmatrisen betraktar vi först bilden nedan.



Här ser vi att

$$A\mathbf{u}=\mathbf{u}-2\mathbf{u}''=\mathbf{u}-2(\mathbf{u}-\mathbf{u}')=2\mathbf{u}'-\mathbf{u},$$

där $\mathbf{u}'$ är den ortogonala projektionen av $\mathbf{u}$ på linjen. Projektionsmatrisen för den ortogonala projektionen på det underrum som linjen genereras ges av BB^t, där B är samma matris som ovan, fast nu med linjens riktningsvektor istället för planets normal. Detta betyder att

$$A\mathbf{u}=2\mathbf{u}'-\mathbf{u}=2BB^t\mathbf{u}-E\mathbf{u} \implies A=2BB^t-E.$$

Detta ger oss determinanten, eftersom A är en 3×3 matris,

$$\det A=\det(2BB^t-E)=\det\left(-(E-2BB^t)\right)=-\det(E-2BB^t)=$$

$$= -(1 - 2(a^2 + b^2 + c^2)) = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1.$$

Eftersom vi har samma matris som för spegling i ett plan (gånger en konstant) kunde vi direkt säga vad determinanten har för värde, och eftersom detta värde är 1 är vi klara. $\square$

Det finns säkert ett snyggare sätt att göra denna uppgift på, som inte bygger på att man konstruerar dem exakta avbildningsmatriserna och beräknar determinanterna, men detta fungerar, och jag orkar inte sitta här och tänka ut detta bättre sätt.

Kapitel 10

10.1

Om vi antar att projektionen sker på ett plan, så kommer alla vektorer som redan ligger i planet att projiceras på sig själv, vilket följer direkt av att

$$P^2 = P,$$

och alltså måste 1 vara ett egenvärde till en projektion. Ett annat alternativ är att om en vektor är ortogonal mot projektionsplanet, så kommer projektionen att vara nollvektorn, vilket betyder att 0 också är ett egenvärde. Detta kan också ses av att en projektion måste ha ett nollrum med dimension > 0, och alltså måste projektionen också ha 0 som egenvärde (ekvationen $P\mathbf{u} = \mathbf{0} = \lambda \cdot \mathbf{0}$ har icke-triviala lösningar). Man kan även få fram detta genom att titta på

$$P^2 = P \implies P^2\mathbf{u} = P\mathbf{u} \implies P^2\mathbf{u} - P\mathbf{u} = \mathbf{0} \implies P(P - E)\mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

För speglingen är det likartat. Om vi igen antar att speglingen sker i ett plan, så kommer alla vektorer som ligger i planet att avbildas på sig själva, alltså är ett egenvärde 1. Vidare kommer en vektor som är ortogonal mot planet vi speglar i helt enkelt vändas, vilket betyder att speglingar också har egenvärdet -1. Detta kan fås ur sambandet

$$S^2 = E \implies S^2\mathbf{u} = E\mathbf{u} \implies S^2\mathbf{u} - E\mathbf{u} = \mathbf{0} \implies (S - E)(S + E)\mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

10.2

Låt alla matriser betecknas med A. Vi ställer upp det karakteristiska polynomet:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E),$$

och letar efter nollställen. Sedan sätter vi in eventuella nollställen (egenvärden) som vi hittar i

$$(A - \lambda E)x = \mathbf{0},$$

och löser för x, vilket ger oss egenvektorerna.

a)

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 6 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(-2-\lambda) + 12 =$$
$$= -(10 + 5\lambda - 2\lambda - \lambda^2) + 12 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2),$$

vilket ger oss egenvärdena

$$p(\lambda) = 0 \iff \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2, \end{cases}$$

och egenvektorerna

$$\underline{\lambda_1 = 1}: \quad (A - 1 \cdot E)x = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 5-1 & 6 \\ -2 & -2-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 4x_1 + 6x_2 = 0 \\ -2x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \quad = 0 \\ \qquad\qquad 0 = 0 \end{cases} \iff [x_2 = 2t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -3x_2/2 = -3t \\ x_2 = 2t \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\lambda_2 = 2}: \quad (A - 2 \cdot E)x = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 5-2 & 6 \\ -2 & -2-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 \quad = 0 \\ \qquad\qquad 0 = 0 \end{cases} \iff [x_2 = t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -2x_2 = -2t \\ x_2 = t \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi har alltså egenvärdena 1 och 2, samt egenvektorerna $t(-3, 2)$ och $t(-2, 1)$.

b)

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) + 9 =$$

$$= 2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 + 9 = \lambda^2 - 3\lambda + 11 = (\lambda - \frac{3}{2})^2 + \frac{35}{4}.$$

Detta polynom saknar reella rötter, vilket betyder att reella egenvärden saknas.

c)

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)^3 + 1 - 1 + (2-\lambda) - (2-\lambda) - (2-\lambda) =$$

$$= (2-\lambda)((2-\lambda)^2 - 1) = (2-\lambda)(4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) =$$

$$= (2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-3) = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3).$$

Där vi enkelt avläser egenvärdena

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 3. \end{cases}$$

Detta ger oss egenvektorerna

$$\underline{\lambda_1 = 1}: \quad (A - 1 \cdot E)x = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 2-1 & -1 & 1 \\ -1 & 2-1 & 1 \\ -1 & 1 & 2-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 - x_2 + \ x_3 \quad = 0 \\ \qquad\qquad 2x_3 \quad = 0 \\ \qquad\qquad\qquad 0 = 0 \end{cases} \iff [x_2 = t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = x_2 - x_3 = t \\ x_2 = t \\ x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\lambda_2 = 2}: \quad (\mathsf{A} - 2 \cdot \mathsf{E})\mathsf{x} = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 2-2 & -1 & 1 \\ -1 & 2-2 & 1 \\ -1 & 1 & 2-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = x_3 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff [x_3 = t] \iff x_1 = x_2 = x_3 = t \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\lambda_3 = 3}: \quad (\mathsf{A} - 3 \cdot \mathsf{E})\mathsf{x} = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 2-3 & -1 & 1 \\ -1 & 2-3 & 1 \\ -1 & 1 & 2-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \iff [x_3 = t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 = x_3 = t \\ x_3 = t \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi har alltså egenvärdena 1, 2, och 3, med motsvarande egenvektorer $t(1,1,0)$, $t(1,1,1)$, och $t(0,1,1)$.

d)

$$p(\lambda) = \det(\mathsf{A} - \lambda \mathsf{E}) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = [\text{utveckla kolonn 3}] =$$

$$= 0 + 0 + (-1)^{3+3} \cdot (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-\lambda(4-\lambda)+4) =$$

$$= -(\lambda - 2)(-4\lambda + \lambda^2 + 4) = -(\lambda - 2)^3.$$

Egenvärdena ges av att

$$p(\lambda) = 0 \iff \lambda_1 = 2.$$

Egenvektornerna:

$$\underline{\lambda_1 = 1}: \quad (\mathsf{A} - 2 \cdot \mathsf{E})\mathsf{x} = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 0-2 & 1 & 0 \\ -4 & 4-2 & 0 \\ -2 & 1 & 2-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -2x_1 + \ \ x_2 = 0 \\ -4x_1 + 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + \ \ x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x_1 + x_2 \quad = 0 \\ \qquad\qquad 0 = 0 \\ \qquad\qquad 0 = 0 \end{cases} \iff [x_2 = 2s,\ x_3 = t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = x_2/2 = s \\ x_2 = s \\ x_3 = t \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Där vi avläser egenvektorerna $s(1, 2, 0)$ och $t(0, 0, 1)$.

10.3

Låt x vara en egenvektor till den inverterbara matrisen A, med egenvärde λ. Då gäller det att

$$Ax = \lambda x \iff x = A^{-1}(\lambda x) = \lambda A^{-1}x \iff A^{-1}x = \lambda^{-1}x. \quad \square$$

10.4

Antag att

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & \dots & A_n \end{bmatrix}$$

uppfyller att

$$\sum A_j = 1 \iff \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1.$$

Det karakteristiska polynomet för A ges av

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \det\left((A - \lambda E)^t\right) = \det(A^t - \lambda E^t) = \det(A^t - \lambda E),$$

där

$$A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \dots \\ A_n \end{bmatrix}$$

A och A^t har alltså samma egenvärden, så om vi visar att A^t har egenvärdet 1 kommer även A att ha det. Låt

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} \implies A^t x = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + a_{21} + \dots + a_{n1} \\ \dots \\ a_{1n} + a_{2n} + \dots + a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum A_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot x,$$

vilket visar att x är en egenvektor till A^t, med egenvärdet 1, vilket betyder att även A har egenvärdet 1. $\square$

10.5

a)

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) - 2z(t) \\ y'(t) = 2x(t) - 2z(t) \\ z'(t) = -2x(t) + y(t) + z(t) \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{=A} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}.$$

Om vi kan hitta egenvärden och egenvektorer till A, så ges lösningen av (10.6). Vi bildar därför det karakteristiska polynomet:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -2 \\ 2 & -\lambda & -2 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda(1-\lambda)^2 + 4 - 8 + 4\lambda - 2(1-\lambda) + 4(1-\lambda) =$$

$$= -\lambda(1-\lambda)^2 - 4 + 4\lambda + 2(1-\lambda) =$$

$$= -\lambda(1-\lambda)^2 - 2(1-\lambda) = -(1-\lambda)(\lambda - \lambda^2 + 2) =$$

$$= -(\lambda-1)(\lambda^2 - \lambda - 2) = -(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2).$$

Här avläser vi egenvärdena ur

$$p(\lambda) = 0 \iff \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_2 = 2, \end{cases}$$

vilket ger oss egenvektorerna

$$\underline{\lambda_1 = -1}: \quad (A - (-1)\cdot E)x = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 1+1 & 1 & -2 \\ 2 & 0+1 & -2 \\ -2 & 2 & 1+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2x + y - 2z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \\ -2x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y - 2z = 0 \\ 0 = 0 \\ 3y = 0 \end{cases} \iff [z = t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = -y/2 + z = t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\lambda_2 = 1}: \quad (A - 1\cdot E)x = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 1-1 & 1 & -2 \\ 2 & 0-1 & -2 \\ -2 & 2 & 1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} y - 2z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + y = 0 \\ y - 2z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -x+y \qquad = 0 \\ \qquad y-2z = 0 \\ \qquad y-2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x+y \qquad\quad = 0 \\ \qquad y-2z \quad = 0 \\ \qquad\qquad\quad 0 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff [z=t] \begin{cases} x = y = 2t \\ y = 2z = 2t \\ z = t \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\lambda_3 = 2}: \quad (A - 2 \cdot E)x = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 1-2 & 1 & -2 \\ 2 & 0-2 & -2 \\ -2 & 2 & 1-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -x + \ \ y - 2z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \\ -2x + 2y - \ \ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + y - 2z = 0 \\ \qquad\qquad -6z = 0 \\ \qquad\qquad 3z = 0 \end{cases} \iff [y = t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = y - 2z = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi har alltså egenvektorerna

$$\mathbf{e}_1 = (1,0,1) \quad , \quad \mathbf{e}_2 = (2,2,1) \quad , \quad \mathbf{e}_3 = (1,1,0),$$

vilket ger oss lösningen

$$\mathbf{u}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{e}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{e}_2 + c_3 e^{\lambda_3 t}\mathbf{e}_3 \iff$$

$$\iff \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{t} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b)

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \iff c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} c_1 + 2c_2 + c_3 = 2 \\ \qquad 2c_2 + c_3 = 1 \\ c_1 + \ \ c_2 \qquad = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 + \ \ c_2 \qquad = 1 \\ c_1 + 2c_2 + c_3 = 2 \\ \qquad 2c_2 + c_3 = 1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} c_1 + \ \ c_2 \qquad = 1 \\ \qquad c_2 + c_3 = 1 \\ \qquad 2c_2 + c_3 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 + c_2 \qquad = 1 \\ \qquad c_2 + c_3 = 1 \\ \qquad c_2 \qquad = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 1, \end{cases}$$

vilket ger oss lösningen

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

10.6

$$\begin{cases} x'(t) = \quad x(t) \ - \ y(t) + 4z(t) \\ y'(t) = \ 3x(t) + 2y(t) - \ z(t) \\ z'(t) = 2x(t) + \ y(t) + \ z(t) \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{=A} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}.$$

Vi försöker återigen hitta egenvärden och egenvektorer till A, så att vi kan använda (10.6). Karakteristiska polynomet:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(1-\lambda)(2-\lambda)(1+\lambda) + 2 + 12 - 8(2-\lambda) - 3(1+\lambda) + (1-\lambda) =$$

$$= -(1-\lambda)(2-\lambda)(1+\lambda) + 14 - 16 + 8\lambda - 3 - 3\lambda + 1 - \lambda =$$

$$= -(1-\lambda)(2-\lambda)(1+\lambda) - 4 + 4\lambda = -(1-\lambda)(2-\lambda)(1+\lambda) - 4(1-\lambda) =$$

$$= -(1-\lambda)((2-\lambda)(1+\lambda) + 4) = -(1-\lambda)(2 + 2\lambda - \lambda - \lambda^2 + 4) =$$

$$= -(\lambda-1)(\lambda^2 - \lambda - 6) = -(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-3),$$

där egenvärdena ges av

$$p(\lambda) = 0 \iff \begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_2 = 3, \end{cases}$$

vilket ger oss egenvektorerna

$$\underline{\lambda_1 = -2}: \quad (A - (-2)\cdot E)x = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 1+2 & -1 & 4 \\ 3 & 2+2 & -1 \\ 2 & 1 & -1+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 3x - \ y + 4z = 0 \\ 3x + 4y - \ z = 0 \\ 2x + \ y + \ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x - \ y + 4z = 0 \\ \quad 5y - 5z = 0 \\ \quad 5y - 5z = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 3x - y + 4z \quad = 0 \\ \quad y - \ z \quad = 0 \\ \quad 0 = 0 \end{cases} \iff [z = t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = (y - 4z)/3 = -t \\ y = z = t \\ z = t \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\lambda_2 = 1}: \quad (A - 1\cdot E)x = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 1-1 & -1 & 4 \\ 3 & 2-1 & -1 \\ 2 & 1 & -1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \ - y + 4z = 0 \\ 3x + y - \ z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y - 2z = 0 \\ \ - y + 4z = 0 \\ 3x + y - \ z = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2x+y-2z=0 \\ \quad -y+4z=0 \\ \quad -y+4z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+y-2z \quad =0 \\ \quad -y+4z \quad =0 \\ \qquad\qquad 0=0 \end{cases} \iff$$

$$\iff [z=t] \begin{cases} x=-y/2+z=-t \\ y=4z=4t \\ z=t \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\lambda_3 = 3}: \quad (A-3\cdot E)x = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 1-3 & -1 & 4 \\ 3 & 2-3 & -1 \\ 2 & 1 & -1-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -2x-y+4z=0 \\ 3x-y-\ \ z=0 \\ 2x+y-4z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x-\ \ y+\ \ 4z \quad =0 \\ 6x-5y+10z \quad =0 \\ \qquad\qquad 0=0 \end{cases} \iff [z=t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x=-y/2+2z=t \\ y=2z=2t \\ z=t \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi har alltså egenvektorerna

$$\mathbf{e}_1 = (-1,1,1) \quad , \quad \mathbf{e}_2 = (-1,4,1) \quad , \quad \mathbf{e}_3 = (1,2,1),$$

vilket ger oss lösningen

$$\mathbf{u}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{e}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{e}_2 + c_3 e^{\lambda_3 t}\mathbf{e}_3 \iff$$

$$\iff \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{t} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Begynnelsevärden ger oss ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \iff c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -c_1-\ \ c_2+\ \ c_3=4 \\ c_1+4c_2+2c_3=1 \\ c_1+\ \ c_2+\ \ c_3=0 \end{cases} \iff \begin{cases} -c_1-\ \ c_2+\ \ c_3=4 \\ 3c_2+3c_3=5 \\ 2c_3=4 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} c_1=-4-c_2+c_3=-4+1/3+2=-5/3 \\ c_2=5/3-c_3=5/3-2=-1/3 \\ c_3=2. \end{cases}$$

Detta betyder att lösningen är

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = -\frac{5}{3}e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}e^{t} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} + 2e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi är dock bara intresserade av

$$x(t) = \frac{5}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{t} + 2e^{3t} \implies$$

$$\implies x(t) \cdot e^{-3t} = \frac{5}{3}e^{-5t} + \frac{1}{3}e^{-2t} + 2 \to 0 + 0 + 2 = 2, \text{ då } t \to \infty.$$

10.7

a)

$$\det(\mathsf{A} - \lambda \mathsf{E}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

Om man utvecklar denna determinant längs kolonn i kommer man att stryka två element $a_{ii} - \lambda$ och $a_{jj} - \lambda$ (eftersom man stryker kolonn i och rad j för att beräkna den relevanta underdeterminanten), så länge man inte är på huvuddiagonalen (då är $j = i$), där man endast stryker $a_{ii} - \lambda$. Alltså kommer alla underdeterminanter som inte är längs huvuddiagonalen att bidra med, som högst, λ^{n-2}-termer, och alltså måste λ^{n-1}-termen komma från huvuddigonalen, eller mer specifikt av produkten av alla element på huvuddiagonalen, alltså:

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda),$$

på samma sätt som i b)-uppgiften nedan ($\lambda_i = a_{ii}$) kommer man, om man utvecklar denna produkt, få

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda) =$$

$$= (-1)^n \lambda^n + ((-1)^{n-1} a_{11} + (-1)^{n-1} a_{22} + \cdots + (-1)^{n-1} a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn} =$$

$$= (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn},$$

där vi ser att koefficienten framför är $(-\lambda)^{n-1}$ är

$$a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \operatorname{tr} \mathsf{A}. \quad \square$$

b)

Det karakteristiska polynomet för en $n \times n$ matris kommer att ha n egenvärden/rötter (om man inkluderar multiplicitet), beteckna dessa rötter med λ_1, λ_2, ..., λ_n. Vi kan då skriva det karakteristiska polynomet som en faktor av alla nollställen:

$$p(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda),$$

detta skrivsätt tar också hänsyn till att högstagradstermen har koefficienten $(-1)^n$. För att få λ^{n-1}-termen tänker vi lite kombinatoriskt. Vi måste ha $n - 1$ λ, vilket betyder att vi för varje term i koefficienten måste välja $-\lambda$, ur faktorn $\lambda_k - \lambda$, $n - 1$ gånger, vilket betyder att vi får

$$(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda) =$$

$$= (-1)^n \lambda^n + ((-1)^{n-1}\lambda_1 + (-1)^{n-1}\lambda_2 + \cdots + (-1)^{n-1}\lambda_n)\lambda^{n-1} + \cdots + \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n,$$

alltså är koefficienten framför λ^{n-1}

$$(-1)^{n-1}\lambda_1 + (-1)^{n-1}\lambda_2 + \cdots + (-1)^{n-1}\lambda_n = (-1)^{n-1}(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n),$$

och framför $(-\lambda)^{n-1}$ blir den då

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \operatorname{tr} A. \quad \square$$

c)

Från b) vet vi att

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\operatorname{tr} A\,\lambda^{n-1} + \cdots + \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n \implies$$

$$\implies p(0) = \det(A - 0 \cdot E) = \det A = 0 + 0 + \cdots + \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n. \quad \square$$

10.8

Vi letar efter egenvärden och egenvektorer, och om det finns tre linjärt oberoende egenvektorer, eller, det mer strikta kravet, tre olika egenvärden, är matrisen diagonaliserbar. Matrisen T ges av att bilda en matris vars kolonner är egenvektorerna.

a)

Egenvärdena ges av

$$0 = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 2 & -4-\lambda & 3 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(1-\lambda)^2(4+\lambda) - 18 - 12 + 6(4+\lambda) + 6(1-\lambda) + 6(1-\lambda) =$$

$$= -(\lambda-1)^2(\lambda+4) - 30 + 24 + 6\lambda + 12 - 12\lambda = -(\lambda-1)^2(\lambda+4) + 6 - 6\lambda =$$

$$= -(\lambda-1)((\lambda-1)(\lambda+4) + 6) = -(\lambda-1)(\lambda^2 + 4\lambda - \lambda - 4 + 6) =$$

$$= -(\lambda-1)(\lambda^2 + 3\lambda + 2) = -(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+2) \implies \begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = 1. \end{cases}$$

Eftersom vi har tre olika egenvärden kan vi direkt säga att A är diagonaliserbar. Egenvektorerna:

$$\underline{\lambda_1 = -2}: \quad (A - (-2)\cdot E)x = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 1+2 & -3 & 3 \\ 2 & -4+2 & 3 \\ 2 & -2 & 1+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff [x_2 = t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = x_2 - x_3 = t \\ x_2 = t \\ x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\lambda_2 = -1}: \quad (A - (-1)\cdot E)x = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 1+1 & -3 & 3 \\ 2 & -4+1 & 3 \\ 2 & -2 & 1+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \iff [x_3 = t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = 3(x_2 - x_3)/2 = 0 \\ x_2 = x_3 = t \\ x_3 = t \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\lambda_3 = 1}: \quad (A - 1\cdot E)x = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 1-1 & -3 & 3 \\ 2 & -4-1 & 3 \\ 2 & -2 & 1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff [x_3 = t] \iff x_1 = x_2 = x_3 = t \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi kan nu bilda matrisen T med hjälp av dessa egenvektorer. Om vi väljer $t = 1$ blir

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

Egenvärdena ges av

$$0 = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -1 & -1 \\ 8 & 2-\lambda & 1 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(3+\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) + 2 - 0 - 2(2-\lambda) + 8(1-\lambda) + 0 =$$

$$= -(3+\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) + 2 - 4 + 2\lambda + 8 - 8\lambda =$$

$$= -(\lambda+3)(\lambda-2)(\lambda-1) + 6 - 6\lambda = -(\lambda-1)((\lambda+3)(\lambda-2)+6) =$$

$$= -(\lambda-1)(\lambda^2 - 2\lambda + 3\lambda - 6 + 6) = -(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda) =$$

$$= -\lambda(\lambda-1)(\lambda+1) \implies \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 1. \end{cases}$$

Återigen är denna matris diagonaliserbar eftersom vi har tre olika egenvärden. Egenvektorerna:

$$\underline{\lambda_1 = -1}: \quad (A - (-1)\cdot E)x = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} -3+1 & -1 & -1 \\ 8 & 2+1 & 1 \\ -2 & 0 & 1+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 8x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ - x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff [x_3 = t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -(x_2 + x_3)/2 = t \\ x_2 = -3x_3 = -3t \\ x_3 = t \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\lambda_2 = 0}: \quad (A - 0\cdot E)x = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 8 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -3x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 8x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -3x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ - 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff [x_3 = 2t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -(x_2 + x_3)/3 = t \\ x_2 = -5x_3/2 = -5t \\ x_3 = 2t \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\lambda_3 = 1}: \quad (A - 1\cdot E)x = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} -3-1 & -1 & -1 \\ 8 & 2-1 & 1 \\ -2 & 0 & 1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -4x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 8x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ - x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff [x_3 = t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -x_3 = -t \\ x_3 = t \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi bildar nu matrisen T genom att låta egenvektorerna vara kolonner ($t = 1$):

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -5 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

c)

Egenvärdena ges av

$$0 = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 4 \\ 4 & -7-\lambda & 8 \\ 6 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(1-\lambda)(7+\lambda)(7-\lambda) - 144 - 112 + 24(7+\lambda) + 12(7-\lambda) + 56(1-\lambda) =$$

$$= -(1-\lambda)(49-\lambda^2) - 256 + 168 + 24\lambda + 84 - 12\lambda + 56 - 56\lambda =$$

$$= -(1-\lambda)(49-\lambda^2) + 52 - 44\lambda = -(49 - \lambda^2 - 49\lambda + \lambda^3) + 52 - 44\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 3 = -(\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 3\lambda^2 - 6\lambda - 3) =$$

$$= -(\lambda(\lambda^2 + 2\lambda + 1) - 3(\lambda^2 + 2\lambda + 1)) = -(\lambda - 3)(\lambda^2 + 2\lambda + 1) =$$

$$= -(\lambda - 3)(\lambda + 1)^2 \implies \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 3. \end{cases}$$

Det är inte säkert att denna matris är diagonaliserbar eftersom vi bara har två egenvärden, därför behöver vi beräkna egenvektorerna:

$$\underline{\lambda_1 = -1}: \quad (A - (-1)\cdot E)x = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 1+1 & -3 & 4 \\ 4 & -7+1 & 8 \\ 6 & -7 & 7+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 - 6x_2 + 8x_3 = 0 \\ -7x_2 + 8x_3 + 6x_{21} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 - 6x_2 + 8x_3 = 0 \\ 6x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \iff [x_3 = t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = 3x_2/2 - 2x_3 = t \\ x_2 = 2x_3 = 2t \\ x_3 = t \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\lambda_2 = 3}: \quad (A - (-1)\cdot E)x = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 1-3 & -3 & 4 \\ 4 & -7-3 & 8 \\ 6 & -7 & 7-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 - 10x_2 + 8x_3 = 0 \\ -7x_2 + 4x_3 + 6x_{21} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ -16x_2 + 16x_3 = 0 \\ -16x_2 + 16x_3 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 & = 0 \\ \qquad\quad x_2 - \ x_3 & = 0 \\ & 0 = 0 \end{cases} \iff [x_3 = 2t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -3x_2/2 + 2x_3 = t \\ x_2 = x_3 = 2t \\ x_3 = 2t \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Eftersom egenvektorerna endast spänner upp ett tvådimensionellt underrum är matrisen ej diagonaliserbar.

10.9

Matrisen är diagonaliserbar, vilket betyder att vi kan skriva

$$D = T^{-1}AT \iff A = TDT^{-1},$$

där D är en diagonal matris med egenvärdena som element, och T utgörs av egenvektorerna. Alltså

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \tilde{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Eftersom gudarna har varit barmhärtiga mot oss är egenvektorerna ortogonala, vilket betyder att $\tilde{T}$ kan bli en ortogonal matris, om vi normerar egenvektorerna:

$$T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Denna matris är ortogonal, $T^{-1} = T^t$, vilket betyder att

$$A = TDT^t = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3\sqrt{3} & 0 & -3\sqrt{3} \\ 4\sqrt{2} & -4\sqrt{2} & 4\sqrt{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 18 & -6 & 0 \\ -6 & 12 & -6 \\ 0 & -6 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

10.10

Om A är diagonaliserbar kan den skrivas som

$$A = TDT^{-1},$$

där

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

där $\lambda_1, ..., \lambda_n \geq 0$ är A:s egenvärden.

$$A^2 = (TDT^{-1})^2 = TDT^{-1}TDT^{-1} = TDEDT^{-1} = TD^2T^{-1},$$

där

$$D^2 = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & \lambda_n^2 \end{bmatrix}.$$

Alltså om vi låter

$$B = TD^{1/2}T^{-1},$$

där

$$D^{1/2} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{1/2} & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & \lambda_n^{1/2} \end{bmatrix},$$

så kommer

$$B^2 = TDT^{-1} = A,$$

och det är tillåtet att ta roten ur alla egenvärden eftersom de är icke-negativa. □

10.11

Alla matriser är symmetriska, så spektralsatsen garanterar att de går att diagonalisera med en ortogonal matris. Alltså är det bara att bestämma egenvärden och egenvektorer, och sedan, om det behövs, Gram-Schmidt:a egenvektorerna för att de ska bilda en ortonormerad bas.

a)

Egenvärden:

$$0 = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 4 \\ 4 & 13-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (7-\lambda)(13-\lambda) - 16 = 91 - 7\lambda - 13\lambda + \lambda^2 - 16 = \lambda^2 - 20\lambda + 75 =$$

$$= (\lambda - 5)(\lambda - 15) \implies \begin{cases} \lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = 15. \end{cases}$$

Egenvektorer:

$$\underline{\lambda_1 = 5}: \quad (A - 5 \cdot E)x = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 7-5 & 4 \\ 4 & 13-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 0 \\ 4x_1 + 8x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff [x_2 = t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -2x_2 = -2t \\ x_2 = t \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\lambda_2 = 15}: \quad (A - 15 \cdot E)x = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 7-15 & 4 \\ 4 & 13-15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -8x_1 + 4x_2 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff [x_2 = 2t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = x_2/2 = t \\ x_2 = 2t \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi har alltså egenvektorerna $t(-2, 1)$ och $t(1, 2)$. Dessa är ortogonala, och alltså behöver vi bara normera dem, vilket ger oss den ortogonala matrisen

$$T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

b)

Egenvärden:

$$0 = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 0-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda(1+\lambda)(1-\lambda) + 0 + 0 - 4(1-\lambda) - 0 + 4(1+\lambda) =$$

$$= \lambda(1-\lambda^2) - 4 + 4\lambda + 4 + 4\lambda = \lambda(1 - \lambda^2 + 8) =$$

$$= -\lambda(\lambda+3)(\lambda-3) \implies \begin{cases} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 3. \end{cases}$$

Egenvektorer:

$$\underline{\lambda_1 = -3}: \quad (A - (-3) \cdot E)x = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} -1+3 & 0 & 2 \\ 0 & 1+3 & -2 \\ 2 & -2 & 0+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2x_1 + 2x_3 = 0 \\ 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff [x_3 = 2t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -x_3 = -2t \\ x_2 = x_3/2 = t \\ x_3 = 2t \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\lambda_2 = 0}: \quad (A - 0 \cdot E)x = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -x_1 \qquad + 2x_3 \qquad = 0 \\ \qquad x_2 - 2x_3 \qquad = 0 \\ \qquad\qquad\qquad 0 = 0 \end{cases} \iff [x_3 = t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = 2x_3 = 2t \\ x_2 = 2x_3 = 2t \\ x_3 = t \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\lambda_3 = 3}: \quad (A - 3 \cdot E)x = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} -1-3 & 0 & 2 \\ 0 & 1-3 & -2 \\ 2 & -2 & 0-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -4x_1 \qquad + 2x_3 = 0 \\ \qquad - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -2x_1 \qquad + \ x_3 = 0 \\ \qquad - \ x_2 - \ x_3 = 0 \\ \qquad - 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -2x_1 \qquad + x_3 \qquad = 0 \\ \qquad x_2 + x_3 \qquad = 0 \\ \qquad\qquad 0 = 0 \end{cases} \iff [x_3 = 2t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = x_3/2 = t \\ x_2 = -x_3 = -2t \\ x_3 = 2t \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Dessa egenvektorer, $t(-2, 1, 2)$, $t(2, 2, 1)$, och $t(1, -2, 2)$, ger, efter normering, den ortogonala matrisen

$$T = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

c)

Egenvärden:

$$0 = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0-\lambda \end{vmatrix} = [\text{utveckla kolonn } 1] =$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot (-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} + 0 + 0 + (-1)^{4+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda(-\lambda^3 + 0 + 0 - 0 + \lambda - 0) - (0 + 0 + \lambda^2 - 1 - 0 - 0) =$$

$$= \lambda^4 - \lambda^2 - \lambda^2 + 1 = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 - 1)^2 = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1)^2 \implies \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 1. \end{cases}$$

Egenvektorer:

$$\underline{\lambda_1 = -1}: \quad (A-(-1)\cdot E)x = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 0+1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0+1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0+1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 \qquad\qquad + x_4 = 0 \\ \qquad x_2 + x_3 \qquad = 0 \\ \qquad x_2 + x_3 \qquad = 0 \\ x_1 \qquad\qquad + x_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 \qquad\qquad + x_4 \qquad = 0 \\ \qquad x_2 + x_3 \qquad\qquad = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff [x_3 = s,\ x_4 = t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -x_4 = -t \\ x_2 = -x_3 = -s \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\lambda_2 = 1}: \quad (A - 1\cdot E)x = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 0-1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0-1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -x_1 \qquad\qquad + x_4 = 0 \\ \qquad - x_2 + x_3 \qquad = 0 \\ \qquad\quad x_2 - x_3 \qquad = 0 \\ x_1 \qquad\qquad - x_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 \qquad\qquad - x_4 \qquad = 0 \\ \qquad x_2 - x_3 \qquad\qquad = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff [x_3 = s,\ x_4 = t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = x_4 = t \\ x_2 = x_3 = s \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi har här fyra egenvektorer, $t(-1,0,0,1)$, $s(0,-1,1,0)$, $t(1,0,0,1)$, och $s(0,1,1,0)$, som är ortogonala mot varandra, vilket betyder att vi bara behöver normera dem för att kunna bilda vår ortogonala matris. Efter att man har gjort detta får man:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

10.12

a)

Antag att matrisen A^tA har egenvektorn $x \neq \mathbf{0}$, med egenvärdet λ. Eftersom A är inverterbar betyder det också att

$$Ax = \mathbf{0} \iff x = \mathbf{0}.$$

Med detta får vi att

$$A^tAx = \lambda x \implies x^t(A^tAx) = x^t\lambda x \implies (Ax)^t(Ax) = \lambda x^t x \implies$$
$$\implies |Ax|^2 = \lambda|x|^2 \implies [x \neq \mathbf{0}] \implies \lambda = \frac{|Ax|^2}{|x|^2} > 0. \quad \square$$

b)

På samma sätt som i 10.10 vet vi att det existerar en symmetrisk matris B, så att

$$B^2 = A^tA.$$

Detta beror på att A^tA är symmetrisk, och kan därför diagonaliseras med en ortogonal matris T:

$$A^tA = TDT^t \implies B = TD^{1/2}T^t \implies$$
$$\implies B^2 = TD^{1/2}T^tTD^{1/2}T^t = TD^{1/2}D^{1/2}T^t = TDT^t = A^tA.$$

B är också symmetrisk eftersom ($D^{1/2}$ är symmetrisk då den bara har element på huvuddiagonalen)

$$B^t = (TD^{1/2}T^t)^t = (T^t)^t(TD^{1/2})^t = T(D^{1/2})^tT^t = TD^{1/2}T^t = B.$$

Det är återigen tillåtet att ta roten ur alla egenvärden eftersom de är positiva. Det som återstår nu är att visa att B är unik. Antag att vi har två symmetriska matriser med positiva egenvärden, B och C, sådana att

$$B^2 = C^2 = A^tA.$$

B och C är symmetriska, vilket betyder att de kan diagonaliseras med ortogonala matriser. Detta betyder att

$$T^tBT \quad \text{och} \quad Q^tAQ$$

är diagonala matriser. Eftersom B och C har positiva egenvärden betyder det också att deras egenvärden är den positiva roten ur egenvärdena till B^2 och C^2, respektive. Alltså har de samma egenvärden ($B^2 = C^2$), vilket betyder att

$$T^tBT = Q^tAQ = D,$$

där D är den diagonala matrisen med egenvärdena (inte samma matris som ovan). Att $B^2 = C^2$ innebär därför också att

$$T^tB^2T = D^2 \implies T^tC^2T = D^2.$$

Vidare, om vi har en egenvektor, x, till C^2 med egenvärdet λ^2, så är x också en egenvektor till C, med egenvärdet λ, eftersom

$$C^2x = \lambda^2x \implies Cx = \lambda^2(C^{-1}x) = [\text{övning } 10.3] = \lambda^2 \cdot \lambda^{-1}x = \lambda x.$$

C är inverterbar eftersom alla egenvärden är positiva och dess determinant är därför nollskild (det är också nödvändigt att matrisen är symmetrisk, men det orkar jag inte gå in på). Detta innebär att

$$T^tC^2T = D^2 \implies T^tCT = D = T^tBT,$$

vilket betyder att

$$B = C. \quad \square$$

c)

Låt

$$Q = A(A^tA)^{-1/2},$$

och

$$B = (A^tA)^{1/2},$$

då är

$$QB = A(A^tA)^{-1/2}(A^tA)^{1/2} = AE = A.$$

Vi behöver nu visa att Q är ortogonal, och att B är symmetrisk. Eftersom A^tA är symmetrisk och har positiva egenvärden, kan vi skriva

$$A^tA = TDT^t \implies (A^tA)^{1/2} = TD^{1/2}T^t \quad \text{och} \quad (A^tA)^{-1/2} = TD^{-1/2}T^t,$$

där T är en ortogonal matris och

$$D^\alpha = \begin{bmatrix} \lambda_1^\alpha & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & \lambda_n^\alpha \end{bmatrix}, \quad \lambda_i > 0,\ i = 1, ..., n.$$

Speciellt gäller det att

$$TD^{-1}T^t = (A^tA)^{-1}.$$

Det visades i b) att B är symmetrisk, och på samma sätt visas det att $TD^{-1/2}T$ är symmetrisk. För att visa att Q är ortogonal betraktar vi

$$QQ^t = A(A^tA)^{-1/2}(A(A^tA)^{-1/2})^t = ATD^{-1/2}T^t(ATD^{-1/2}T^t)^t =$$

$$= ATD^{-1/2}T^t(TD^{-1/2}T^t)^tA^t = ATD^{-1/2}T^tTD^{-1/2}T^tA^t = ATD^{-1/2}ED^{-1/2}T^tA^t =$$

$$= ATD^{-1}T^tA^t = A(A^tA)^{-1}A^t = AA^{-1}(A^t)^{-1}A^t = EE = E. \quad \square$$

10.13

$$\begin{cases} a_{k+1} = a_k + 2b_k \\ b_{k+1} = 2a_k + b_k \end{cases} \iff \mathbf{u}_{k+1} = \begin{bmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{=A} \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matrisen A är symmetrisk, och vi kan därför diagonalisera den med en ortogonal matris, enligt spektralsatsen, vilket betyder att vi kan skriva

$$A = TDT^t,$$

men vi har också rekursionsformeln

$$\mathbf{u}_{k+1} = A\mathbf{u}_k = A^2\mathbf{u}_{k-1} = ... = A^{k+1}\mathbf{u}_0 \implies \mathbf{u}_k = A^k\mathbf{u}_0,$$

där

$$A^k = TDT^t \cdots TDT^t = TD^kT^t.$$

Alltså vill vi diagonalisera matrisen A. Egenvärdena ges av

$$0 = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 4 =$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda+1)(\lambda-3) \implies \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 3. \end{cases}$$

Egenvektorer:

$$\underline{\lambda_1 = -1}: \quad (A - (-1)\cdot E)x = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 1+1 & 2 \\ 2 & 1+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff [x_2 = t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -x_2 = -t \\ x_2 = t \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\lambda_2 = 3}: \quad (A - 3\cdot E)x = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 1-3 & 2 \\ 2 & 1-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff [x_2 = t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = x_2 = t \\ x_2 = t \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Detta ger oss den ortogonala, och även symmetriska, matrisen

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

och

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

vilket betyder att

$$\mathbf{u}_{10} = \begin{bmatrix} a_{10} \\ b_{10} \end{bmatrix} = A^{10}\mathbf{u}_0 = TD^{10}T^t\mathbf{u}_0 = TD^{10}T\mathbf{u}_0 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^{10} & 0 \\ 0 & 3^{10} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2\cdot 3^{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2\cdot 3^{10} \\ -1 + 2\cdot 3^{10} \end{bmatrix}.$$

Alltså är

$$a_{10} = 2\cdot 3^{10} + 1 = 118099 \quad \text{och} \quad b_{10} = 2\cdot 3^{10} - 1 = 118097.$$

10.14

$$\begin{cases} x_{n+1} = \quad x_n - 4y_n - 3z_n \\ y_{n+1} = -3x_n + 2y_n + 3z_n \\ x_{n+1} = -4x_n - 4y_n + 2z_n \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ -3 & 2 & 3 \\ -4 & -4 & 2 \end{bmatrix}}_{=A} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Återigen har vi att

$$\mathbf{u}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} = A\mathbf{u}_{n-1},$$

vilket kommer att förenklas till, enligt (10.21),

$$\mathbf{u}_n = c_1\lambda_1^n\mathbf{e}_1 + c_2\lambda_2^n\mathbf{e}_2 + c_3\lambda_3^n\mathbf{e}_3,$$

där $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ är egenvektorer med $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ som egenvärden. Vi beräknar där dessa egenvärden och egenvektorer.

$$0 = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & -3 \\ -3 & 2-\lambda & 3 \\ -4 & -4 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda)^2 + 48 - 36 - 12(2-\lambda) - 12(2-\lambda) + 12(1-\lambda) =$$

$$= -(\lambda-1)(\lambda-2)^2 + 12 - 48 + 24\lambda + 12 - 12\lambda =$$

$$= -(\lambda-1)(\lambda-2)^2 + 12\lambda - 24 = -(\lambda-2)((\lambda-1)(\lambda-2) - 12) =$$

$$= -(\lambda-2)(\lambda^2 - 2\lambda - \lambda + 2 - 12) = -(\lambda-2)(\lambda^2 - 3\lambda - 10) =$$

$$= -(\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-5) \implies \begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 5. \end{cases}$$

Egenvektorer:

$$\underline{\lambda_1 = -2}: \quad (A - (-2)\cdot E)x = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 1+2 & -4 & -3 \\ -3 & 2+2 & 3 \\ -4 & -4 & 2+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 0 \\ -3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \\ -4x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x_1 - \ 4x_2 - 3x_3 \quad = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 0 \\ \quad -28x_2 \qquad\quad = 0 \end{cases} \iff [x_3 = t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = 4x_2/3 + x_3 = t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = t \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\lambda_2 = 2}: \quad (A - 2 \cdot E)x = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 1-2 & -4 & -3 \\ -3 & 2-2 & 3 \\ -4 & -4 & 2-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 0 \\ -3x_1 \qquad\quad + 3x_3 = 0 \\ -4x_1 - 4x_2 \qquad\quad = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + \ x_2 \qquad\quad = 0 \\ -x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 0 \\ -x_1 \qquad\quad + \ x_3 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + \ x_2 \qquad\quad = 0 \\ \quad - 3x_2 - 3x_3 = 0 \\ \quad\ x_2 + \ x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 \qquad\quad = 0 \\ \qquad x_2 + x_3 \quad = 0 \\ \qquad\qquad\quad 0 = 0 \end{cases} \iff [x_3 = t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -x_2 = t \\ x_2 = -x_3 = -t \\ x_3 = t \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\lambda_3 = 5}: \quad (A - 2 \cdot E)x = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 1-5 & -4 & -3 \\ -3 & 2-5 & 3 \\ -4 & -4 & 2-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -4x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 0 \\ -3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ -4x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -4x_1 - 4x_2 - \ 3x_3 \quad = 0 \\ \qquad\qquad\quad 21x_3 \quad = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0 = 0 \end{cases} \iff [x_2 = t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -x_2 - 3x_3/4 = -t \\ x_2 = t \\ x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ur detta finner vi egenvektorerna

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 1) \quad , \quad \mathbf{e}_2 = (1, -1, 1) \quad , \quad \mathbf{e}_3 = (-1, 1, 0),$$

vilket betyder att

$$\mathbf{u}_n = c_1 \lambda_1^n \mathbf{e}_1 + c_2 \lambda_2^n \mathbf{e}_2 + c_3 \lambda_3^n \mathbf{e}_3 \iff$$

$$\iff \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} = c_1 (-2)^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 2^n \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 5^n \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

och

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \iff c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} c_1 + c_2 - c_3 = 3 \\ \quad - c_2 + c_3 = 2 \\ c_1 + c_2 \qquad = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 + c_2 \qquad = 1 \\ \quad - c_2 + c_3 = 2 \\ c_1 + c_2 - c_3 = 3 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} c_1 + c_2 \qquad = 1 \\ \quad - c_2 + c_3 = 2 \\ \qquad\quad - c_3 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = 1 - c_2 = 5 \\ c_2 = -2 + c_3 = -4 \\ c_3 = -2. \end{cases}$$

Detta ger oss lösningen

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} = 5 \cdot (-2)^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 4 \cdot 2^n \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot 5^n \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \implies$$

$$\implies y_n = -4 \cdot 2^n \cdot (-1) - 2 \cdot 5^n \cdot 1 = 2^{n+2} - 2 \cdot 5^n \implies$$

$$\implies y_n \cdot 5^{-n} = \frac{2^{n+2}}{5^n} - 2 \to 0 - 2 = -2, \text{ då } n \to \infty.$$

10.15

Vi diagonaliserar matrisen A, och sedan får vi $A^k = TDT^{-1} \cdots TDT^{-1} = TD^kT^{-1}$. Egenvärden:

$$0 = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -6 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(7-\lambda)(2+\lambda)+18 = -(14+7\lambda-2\lambda-\lambda^2)+18 =$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 4) \implies \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 4. \end{cases}$$

Egenvärden:

$$\underline{\lambda_1 = 1}: \quad (A - 1 \cdot E)x = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 7-1 & -6 \\ 3 & -2-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 6x_1 - 6x_2 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff [x_2 = t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = x_2 = t \\ x_2 = t \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\lambda_2 = 4}: \quad (A - 1 \cdot E)x = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 7-4 & -6 \\ 3 & -2-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 3x_1 - 6x_2 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff [x_2 = t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = 2x_2 = 2t \\ x_2 = t \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Detta betyder att vår matris, T, är

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vi behöver också bestämma inversen till denna matris, vilket görs snabbt med Cramers regel (se övning 8.14):

$$\det T = -1 \implies T^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vi har också diagonalmatrisen

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Vi kan nu beräkna A^k:

$$A^k = TD^kT^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 4^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4^k & -4^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+2\cdot 4^k & 2-2\cdot 4^k \\ -1+4^k & 2-4^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 4^k - 1 & 2-2\cdot 4^k \\ 4^k - 1 & 2-4^k \end{bmatrix}.$$

10.16

$$\begin{cases} x''(t) + 3x(t) + 2y(t) = 0 \\ y''(t) + 2x(t) + 3y(t) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x''(t) = -3x(t) - 2y(t) \\ y''(t) = -2x(t) - 3y(t) \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{bmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}}_{=A} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}.$$

Egenvärden:

$$0 = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -2 \\ -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (3+\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 + 6\lambda + 9 - 4 =$$

$$= \lambda^2 + 6\lambda + 5 = (\lambda+5)(\lambda+1) \implies \begin{cases} \lambda_1 = -5 \\ \lambda_2 = -1. \end{cases}$$

Egenvektorer:

$$\underline{\lambda_1 = -5}: \quad (A - (-5)\cdot E)x = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} -3+5 & -2 \\ -2 & -3+5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff [x_2 = t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = x_2 = t \\ x_2 = t \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\lambda_2 = -1}: \quad (A - (-1)\cdot E)x = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} -3+1 & -2 \\ -2 & -3+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff [x_2 = t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -x_2 = -t \\ x_2 = t \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Den allmänna lösningen till detta system av differentialekvationer får vi av formeln (10.31), eftersom vi endast har negativa egenvärden,

$$\mathbf{u}(t) = c_1 \sin(k_1 t + \delta_1)\mathbf{e}_1 + c_2 \sin(k_2 t + \delta_2)\mathbf{e}_2,$$

där

$$k_1 = \sqrt{-\lambda_1} = \sqrt{-(-5)} = \sqrt{5} \quad , \quad k_2 = \sqrt{-\lambda_2} = \sqrt{-(-1)} = 1,$$

och

$$\mathbf{e}_1 = (1,1) \quad , \quad \mathbf{e}_2 = (-1,1).$$

Detta ger oss

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 \sin(\sqrt{5}t + \delta_1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \sin(t + \delta_2) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

10.17

$$\begin{bmatrix} u_1''(t) \\ u_2''(t) \\ u_3''(t) \end{bmatrix} = q^2 \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}}_{= A} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix}$$

Egenvärden:

$$0 = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(2+\lambda)^3 + 0 + 0 - 0 + (2+\lambda) + (2+\lambda) =$$

$$= -8 - 12\lambda - 6\lambda^2 - \lambda^3 + 4 + 2\lambda = -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 10\lambda - 4 =$$

$$= -(\lambda^3 + 4\lambda^2 + 2\lambda + 2\lambda^2 + 8\lambda + 4) = -(\lambda(\lambda^2 + 4\lambda + 2) + 2(\lambda^2 + 4\lambda + 2)) =$$

$$= -(\lambda+2)(\lambda^2 + 4\lambda + 2) = -(\lambda+2)(\lambda + 2 + \sqrt{2})(\lambda + 2 - \sqrt{2}) \implies \begin{cases} \tilde{\lambda}_1 = -2 - \sqrt{2} \\ \tilde{\lambda}_2 = -2 \\ \tilde{\lambda}_3 = -2 + \sqrt{2}. \end{cases}$$

Detta är dock egenvärdena för A, men vi vill ha egenvärdena för $q^2 A$, vilket vi får genom att bara multiplicera egenvärdena för A med q^2, $\lambda_k = q^2 \tilde{\lambda}_k$,

$$\begin{cases} \lambda_1 = -q^2(2 + \sqrt{2}) \\ \lambda_2 = -2q^2 \\ \lambda_3 = -q^2(2 - \sqrt{2}). \end{cases}$$

Egenvektorer:

$$\underline{\lambda_1 = -q^2(2+\sqrt{2})}: \quad q^2(A - (-2-\sqrt{2}) \cdot E)x = \mathbf{0} \iff$$

$$\iff \begin{bmatrix} -2+2+\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -2+2+\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -2+2+\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \sqrt{2}x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + \sqrt{2}x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + \sqrt{2}x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{2}x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + \sqrt{2}x_3 = 0 \\ x_2 + \sqrt{2}x_3 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \sqrt{2}x_1 + x_2 & = 0 \\ \qquad x_2 + \sqrt{2}x_3 & = 0 \\ & 0 = 0 \end{cases} \iff [x_3 = t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -x_2/\sqrt{2} = t \\ x_2 = -\sqrt{2}x_3 = -\sqrt{2}t \\ x_3 = t \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\lambda_2 = -2q^2}: \quad q^2(A - (-2) \cdot E)x = \mathbf{0} \iff$$

$$\iff \begin{bmatrix} -2+2 & 1 & 0 \\ 1 & -2+2 & 1 \\ 0 & 1 & -2+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \quad x_2 & = 0 \\ x_1 \qquad + x_3 & = 0 \\ \quad x_2 & = 0 \end{cases} \iff [x_3 = t] \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\lambda_3 = -q^2(2-\sqrt{2})}: \quad q^2(A - (-2-\sqrt{2}) \cdot E)x = \mathbf{0} \iff$$

$$\iff \begin{bmatrix} -2+2-\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -2+2-\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -2+2-\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -\sqrt{2}x_1 + \quad x_2 & = 0 \\ \quad x_1 - \sqrt{2}x_2 + \quad x_3 & = 0 \\ \qquad x_2 - \sqrt{2}x_3 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\sqrt{2}x_1 + x_2 & = 0 \\ \qquad - x_2 + \sqrt{2}x_3 & = 0 \\ \qquad x_2 - \sqrt{2}x_3 & = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -\sqrt{2}x_1 + x_2 & = 0 \\ \qquad - x_2 + \sqrt{2}x_3 & = 0 \\ & 0 = 0 \end{cases} \iff [x_3 = t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = x_2/\sqrt{2} = t \\ x_2 = \sqrt{2}x_3 = \sqrt{2}t \\ x_3 = t \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Nu ger (10.31) oss lösningen

$$\mathbf{u}(t) = c_1 \sin(k_1 t + \delta_1)\mathbf{e}_1 + c_2 \sin(k_2 t + \delta_2)\mathbf{e}_2 + c_3 \sin(k_3 t + \delta_3)\mathbf{e}_3,$$

där

$$\lambda_j = -k_j^2 \implies k_1 = q\sqrt{2+\sqrt{2}} \quad , \quad k_2 = q\sqrt{2} \quad , \quad k_3 = q\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

och

$$\mathbf{e}_1 = (1, -\sqrt{2}, 1) \quad , \quad \mathbf{e}_2 = (-1, 0, 1) \quad , \quad \mathbf{e}_3 = (1, \sqrt{2}, 1),$$

vilket betyder att

$$\mathbf{u}(t) = c_1 \sin(q\sqrt{2+\sqrt{2}}t + \delta_1) \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} +$$

$$+c_2 \sin\left(q\sqrt{2}t + \delta_2\right) \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} +$$

$$+c_3 \sin\left(q\sqrt{2-\sqrt{2}}t + \delta_3\right) \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

En sinussvängning har formen

$$A \sin(\omega t + \delta),$$

där ω är vinkelfrekvensen, och frekvensen är $\omega/(2\pi)$, vilket betyder att egenfrekvenserna ges av

$$\frac{k_j}{2\pi},$$

och motsvarande egensvängning beskrivs av termen

$$c_j \sin(k_j t + \delta j)\mathbf{e}_j.$$

10.18

a)

L är en symmetrisk operator om $(u \,|\, \mathsf{L}(v)) = (\mathsf{L}(u) \,|\, v)$.

$$(u \,|\, \mathsf{L}(v)) = \int_{-1}^{1} u(t)\mathsf{L}\big(v(t)\big)\,dt = \int_{-1}^{1} u\frac{d}{dt}\left((t^2-1)\frac{dv}{dt}\right)dt = [\text{partialintegration}] =$$

$$= \underbrace{\left[u \cdot (t^2-1)\frac{dv}{dt}\right]_{-1}^{1}}_{=\,0} - \int_{-1}^{1} \frac{du}{dt}(t^2-1)\frac{dv}{dt}\,dt = -\int_{-1}^{1}(t^2-1)\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}\,dt =$$

$$= [\text{partialintegration}] = -\underbrace{\big[(t^2-1)u \cdot v\big]_{-1}^{1}}_{=\,0} + \int_{-1}^{1}\frac{d}{dt}\left((t^2-1)\frac{du}{dt}\right)v\,dt =$$

$$= \int_{-1}^{1}\frac{d}{dt}\left((t^2-1)\frac{du}{dt}\right)v\,dt = \int_{-1}^{1}\mathsf{L}\big(u(t)\big)v(t)\,dt = (\mathsf{L}(u) \,|\, v). \quad \square$$

b)

$$\mathsf{L}(u) = ((t^2-1)u')' = (t^2-1)u'' + 2tu'.$$

Detta visar att L bevarar graden på polynom (u'' minskar graden med 2, men t^2 ökar graden med 2, och motsvarande för tu'). För att visa att Legendrepolynomen är egenfunktioner till differentialoperatorn behöver vi bara visa att

$$(\mathsf{L}(P_k) \,|\, u) = 0,$$

där $u(t)$ är ett godtyckligt polynom av grad $\leq k-1$. Om denna likhet uppfylls så är $\mathsf{L}(P_k)$ ortogonal mot alla polynom av grad $\leq k-1$, vilket, på grund av entydighet i ortogonala baser och sådant, betyder att $\mathsf{L}(P_k)$ måste vara en konstant gånger P_k (alltså definition av en egenfunktion). Vi vet att P_k är ortogonalt mot underrummet $\mathbf{P}_{k-1}$,

alltså är $(P_k \mid u) = 0$, där u är ett polynom av grad $\leq k-1$. Här kommer nu beviset: Låt u vara ett godtyckligt polynom av grad $\leq k-1$. Då gäller det att, på grund av symmetrin som visades i a),

$$(\mathsf{L}(P_k) \mid u) = (P_k \mid \mathsf{L}(u)) = 0,$$

där $\mathsf{L}(u)$ är ett polynom av grad $\leq k-1$, eftersom operatorn bevarar graden. $\square$

c)

Differentialoperatorn bevarar graden på polynom, vilket är anledningen till att vi bara behöver betrakta högstagradstermen. Vi behöver inte heller bry oss om eventuella konstanter framför högstagradstermen. Egenvärdet till P_k, som är ett polynom av grad k, kan därför fås genom att undersöka $\mathsf{L}(t^k)$.

$$\mathsf{L}(u) = \frac{d}{dt}\left((t^2-1)\frac{du}{dt}\right) = (t^2-1)\frac{d^2u}{dt^2} + 2t\frac{du}{dt} \implies$$

$$\implies \mathsf{L}(t^k) = (t^2-1)\frac{d^2}{dt^2}(t^k) + 2t\frac{d}{dt}(t^k) =$$

$$= (t^2-1)\cdot k(k-1)t^{k-2} + 2t\cdot kt^k = k(k-1)t^k - k(k-1)t^{k-2} + 2kt^k =$$

$$= k(k-1+2)t^k - k(k-1)t^{k-2} = k(k+1)t^k - k(k-1)t^{k-2},$$

där vi ser att koefficienten framför t^k är $k(k+1)$, vilket betyder att $\lambda_k = k(k+1)$.

Kapitel 11

11.1

a)

$$6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Alltså har den kvadratiska formen matrisen

$$B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix},$$

och vi diagonaliserar den genom att hitta egenvärden. Den ortonormerade basen kommer att ges av egenvektorerna. Egenvärden:

$$0 = \det(B - \lambda E) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(6-\lambda)(5-\lambda)(7-\lambda) + 0 + 0 - 4(5-\lambda) - 4(7-\lambda) - 0 =$$

$$= -(\lambda-6)(\lambda-5)(\lambda-7) - 48 + 8\lambda = -(\lambda-6)(\lambda^2 - 12\lambda + 35 - 8) =$$

$$= -(\lambda-6)(\lambda^2 - 12\lambda + 27) = -(\lambda-6)(\lambda-3)(\lambda-9) \implies \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 6 \\ \lambda_3 = 9. \end{cases}$$

Egenvektorer:

$$\underline{\lambda_1 = 3}: \quad (B - 3 \cdot E)x = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 6-3 & -2 & 2 \\ -2 & 5-3 & 0 \\ 2 & 0 & 7-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 \qquad = 0 \\ 2x_1 \qquad + 4x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x_1 + x_2 \qquad = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 \qquad + 2x_3 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -x_1 + x_2 \qquad = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x_1 + x_2 \qquad = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff [x_3 = -t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = x_2 = 2t \\ x_2 = -2x_3 = 2t \\ x_3 = -t \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\underline{\lambda_2 = 6}: \quad (B - 6 \cdot E)x = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 6-6 & -2 & 2 \\ -2 & 5-6 & 0 \\ 2 & 0 & 7-6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff [x_3 = 2t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -x_2/2 = -t \\ x_2 = x_3 = 2t \\ x_3 = 2t \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\underline{\lambda_3 = 9}: \quad (B - 9 \cdot E)x = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 6-9 & -2 & 2 \\ -2 & 5-9 & 0 \\ 2 & 0 & 7-9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ -3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ -2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ -2x_2 - x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff [x_3 = 2t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = x_3 = 2t \\ x_2 = -x_3/2 = -t \\ x_3 = 2t \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Normering ger oss den ortonormerade basen

$$\mathbf{e}_1' = \frac{1}{3}(2, 2, -1) \quad , \quad \mathbf{e}_2' = \frac{1}{3}(-1, 2, 2) \quad , \quad \mathbf{e}_3' = \frac{1}{3}(2, -1, 2),$$

vilket ger oss diagonalformen

$$3(x_1')^2 + 6(x_2')^2 + 9(x_3')^2,$$

där koefficienterna måste matcha med motsvarande egenvektor/basvektor.

b)

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{= B} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Egenvärden till den kvadratiska formen:

$$0 = \det(B - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$
\begin{aligned}
&= -(\lambda-1)^3 + 8 + 8 + 4(\lambda-1) + 4(\lambda-1) + 4(\lambda-1) = \\
&= -(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1) + 12\lambda + 4 = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda + 5 = \\
&= -(\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 5\lambda^2 - 10\lambda - 5) = -(\lambda-5)(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = \\
&= -(\lambda+1)^2(\lambda-5) \implies \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 5. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Egenvektorer:

$$
\underline{\lambda_1 = -1}: \quad (B - (-1)\cdot E)x = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 1+1 & 2 & 2 \\ 2 & 1+1 & 2 \\ 2 & 2 & 1+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff
$$

$$
\iff \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \iff x_1 + x_2 + x_3 = 0,
$$

detta är ett plan, och för att bilda en ortonormerad bas av egenvektorer behöver vi välja två vektorer i planet som är ortogonala mot varandra. En vektor som ligger i planet är $(-1, 1, 0)$, och en vektor som är ortogonal mot denna, som också ligger i planet, uppfyller

$$
\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 \qquad\quad = 0 \end{cases} \iff [x_3 = -2t] \iff \begin{cases} x_1 = -x_3/2 = t \\ x_2 = x_1 = t \\ x_3 = -2t, \end{cases}
$$

alltså kan vi välja vektorerna

$$
\mathbf{e}_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0) \quad \text{och} \quad \mathbf{e}_1' = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)
$$

till vår ortonormerade bas. Av uppenbara skäl kommer den tredje egenvektorn vara normalen till planet, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, men vi kan ändå beräkna den.

$$
\underline{\lambda_2 = 5}: \quad (B - 5\cdot E)x = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 1-5 & 2 & 2 \\ 2 & 1-5 & 2 \\ 2 & 2 & 1-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff
$$

$$
\iff \begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \iff
$$

$$
\iff \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ \qquad\quad -3x_2 + 3x_3 = 0 \\ \qquad\quad3x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 0 \\ \qquad\quad -x_2 + x_3 \qquad = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 0 \end{cases} \iff [x_3 = t] \iff
$$

$$
\iff \begin{cases} x_1 = (x_2 + x_3)/2 = t \\ x_2 = x_3 = t \\ x_3 = t \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \implies \mathbf{e}_3' = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1).
$$

I basen $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'$ får vi diagonalformen

$$
-(x_1')^2 - (x_2')^2 + 5(x_3')^2.
$$

11.2

Vi utnyttjar Sats 2. Speciellt har vi, eftersom $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$, att $|\mathbf{u}|=1$, vilket betyder att det minsta värdet på den kvadratiska formen ges av det minsta egenvärdet,

$$\lambda_1 = \min_{|\mathbf{u}|=1} \mathbf{q}(\mathbf{u}),$$

och det största värdet ges av det största egenvärdet,

$$\lambda_n = \max_{|\mathbf{u}|=1} \mathbf{q}(\mathbf{u}).$$

Detta betyder att allt vi behöver göra är att beräkna alla egenvärden, och sedan välja ut det största och minsta.

a)

$$3x_1^2+3x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3-2x_2x_3 \implies B=\begin{bmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix} \implies$$

$$\implies 0=\det(B-\lambda E)=\begin{vmatrix}3-\lambda & 2 & 2\\ 2 & 0-\lambda & -1\\ 2 & -1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=-\lambda(\lambda-3)^2-4-4+4\lambda+4(\lambda-3)+(\lambda-3)=$$

$$=-\lambda(\lambda^2-6\lambda+9)-23+9\lambda=-\lambda^3+6\lambda^2-23.$$

här är det tämligen uppenbart att rötterna är

$$\lambda_1=2-\frac{2(1+i\sqrt{3})}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}(-7+3i\sqrt{23})}}-\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})\sqrt[3]{\frac{1}{2}(-7+3i\sqrt{23})}\approx 1.7,$$

$$\lambda_2=2-\frac{2(1-i\sqrt{3})}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}(-7+3i\sqrt{23})}}-\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})\sqrt[3]{\frac{1}{2}(-7+3i\sqrt{23})}\approx 2.6,$$

$$\lambda_3=2+\frac{4}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}(-7+3i\sqrt{23})}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}(-7+3i\sqrt{23})}\approx 5.1,$$

vilket betyder att det största värdet är $\lambda_3\approx 5.1$, och det minsta är $\lambda_1\approx 1.7$. I den upplagan jag har (andra upplagan) är det fel i facit; det står att största värdet är 4 och minsta är -2. Men enligt WolframAlpha är dessa beräkningar korrekta.

Input interpretation

minimize	function	$3x^2+3z^2+4xy+4xz-2yz$
	domain	$x^2+y^2+z^2=1$

Global minimum

$\min\{3x^2+3z^2+4xy+4xz-2yz \mid x^2+y^2+z^2=1\}\approx -1.72545$ at $(x,y,z)\approx(-0.491296, 0.786436, 0.374362)$

Input interpretation

maximize	function	$3x^2 + 3z^2 + 4xy + 4xz - 2yz$
	domain	$x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Global maximum

$\max\{3x^2 + 3z^2 + 4xy + 4xz - 2yz \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \approx 5.12398$ at $(x, y, z) \approx (-0.75632, -0.172027, -0.631179)$

b)

Precis som i a) bestämmer vi egenvärden till matrisen som representerar den kvadratiska formen.

$$x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 \implies B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \implies$$

$$\implies 0 = \det(B - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 0-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2(\lambda-1) - 1 - 1 + \lambda + \lambda + (\lambda - 1) =$$

$$= -\lambda^2(\lambda-1) + 3(\lambda-1) = -(\lambda-1)(\lambda^2-3) \implies \begin{cases} \lambda_1 = -\sqrt{3} \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = \sqrt{3}. \end{cases}$$

Härur ser vi att det största värdet är $\sqrt{3}$, och det minsta är $-\sqrt{3}$.

11.3

$$2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 \geq a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).$$

Högerledet är en kvadratisk form, $\mathbf{q}(\mathbf{u})$, och $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = |\mathbf{u}|^2$, vilket betyder att a bör väljas som det minsta egenvärdet till den kvadratiska formen, eftersom då kommer vi precis att ha situationen

$$\frac{2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \geq \min_{\mathbf{u} \neq \mathbf{0}} \frac{\mathbf{q}(\mathbf{u})}{|\mathbf{u}|^2} = \lambda_1 = a.$$

Den kvadratiska formen representeras av matrisen

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \implies 0 = \det(B - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & 2 \\ 3 & 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(\lambda-2)^2(\lambda-3) + 12 + 12 - 4(2-\lambda) - 9(3-\lambda) - 4(2-\lambda) =$$

$$= -(\lambda^2 - 4\lambda + 4)(\lambda - 3) - 19 + 17\lambda = -(\lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda^2 + 12\lambda + 4\lambda - 12) - 19 + 17\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda - 7 = -(\lambda-7)(\lambda^2-1) \implies \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 7 \end{cases} \implies a = \lambda_1 = -1.$$

11.4

$$\mathbf{q}(\mathbf{u}) = 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3 - 3x_3^2 \implies B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \implies$$

$$\implies 0 = \det(B - \lambda E) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & 0-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda^2(\lambda+3) - 4 - 4 + 4\lambda + (3+\lambda) + 4\lambda =$$

$$= -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 5 + 9\lambda = -(\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 5\lambda^2 - 10\lambda + 5) = -(\lambda+5)(\lambda-1)^2 \implies \begin{cases} \lambda_1 = -5 \\ \lambda_2 = 1. \end{cases}$$

Rayleighkvoten blir

$$\lambda_1 = \min_{\mathbf{u}\neq\mathbf{0}} \frac{\mathbf{q}(\mathbf{u})}{|\mathbf{u}|^2},$$

eftersom $\lambda_1 < 0$ kommer $\mathbf{q}$ att bli minst när $|\mathbf{u}|^2$ är som störst, och vi har villkoret

$$|\mathbf{u}|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 4 \implies -5 = \min_{\mathbf{u}\neq\mathbf{0}} \frac{\mathbf{q}(\mathbf{u})}{4} \iff \min_{\mathbf{u}\neq\mathbf{0}} \mathbf{q}(\mathbf{u}) = -20.$$

11.5

Avståndet ges av

$$\sqrt{(x_1 - (-x_3))^2 + (x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)^2},$$

och diskriminanten är en kvadratisk form. Vidare, eftersom kvadratroten är strängt växande, kommer avståndet och diskriminanten anta sitt minsta värde i samma punkt, så vi kan bestämma formens minsta värde och sedan ta roten ur det.

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) = (x_1 + x_3)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 =$$

$$= x_1^2 + 2x_1x_3 + x_3^2 + x_2^2 - 2x_2x_1 + x_1^2 + x_3^2 - 2x_3x_2 + x_2^2 =$$

$$= 2x_1^2 + 2x_1^2 + 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 \implies$$

$$\implies B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \implies 0 = \det(B - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(\lambda-2)^3 + 1 + 1 - (2-\lambda) - (2-\lambda) - (2-\lambda) =$$

$$= -(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8) + 3\lambda - 4 = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4 =$$

$$= -(\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 4\lambda^2 + 8\lambda - 4) = -(\lambda-4)(\lambda-1)^2 \implies \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 4. \end{cases}$$

Eftersom vi är på enhetssfären vet vi att

$$1 = \lambda_1 = \min_{|\mathbf{u}|=1} \mathbf{q}(\mathbf{u}),$$

vilket betyder att avståndet ges av

$$\sqrt{\lambda_1} = 1.$$

11.6

A^tA är symmetrisk, vilket betyder att den definierar en kvadratisk form. Denna kvadratiska form kan beskrivas av

$$\mathbf{q}(x) = x^tA^tAx,$$

där $x = (x_1, ..., x_n)$. Enligt anmärkningen till Sats 2 kan vi skriva

$$\lambda_n = \mu = \max_{|x|=1} \mathbf{q}(x) = \max_{|x|=1} |x^tA^tAx|.$$

Eftersom transponatet inte ändrar längden på en vektor får vi att

$$\max_{|x|=1} |x^tA^t| = \max_{|x|=1} |(Ax)^t| = \max_{|x|=1} |Ax|.$$

Detta betyder att

$$\mu = \max_{|x|=1} |x^tA^tAx| = \max_{|x|=1} |(Ax)^tAx| = \max_{|x|=1} |(Ax)^t| \cdot \max_{|x|=1} |Ax| =$$

$$= \max_{|x|=1} |Ax| \cdot \max_{|x|=1} |Ax| = \left(\max_{|x|=1} |Ax|\right)^2 \iff \max_{|x|=1} |Ax| = \sqrt{\mu}. \quad \square$$

11.7

a)

$$17x_1^2 - 12x_1x_2 + 8x_2^2 = 20 \implies \mathbf{q}(\mathbf{x}) = 17x_1^2 - 12x_1x_2 + 8x_2^2 \implies B = \begin{bmatrix} 17 & -6 \\ -6 & 8 \end{bmatrix} \implies$$

$$\implies 0 = \det(B - \lambda E) = \begin{vmatrix} 17-\lambda & -6 \\ -6 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 17)(\lambda - 8) - 36 =$$

$$= \lambda^2 - 25\lambda + 136 - 36 = (\lambda - 5)(\lambda - 20) \implies \begin{cases} \lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = 20. \end{cases}$$

Eftersom båda egenvärdena är positiva och högerledet är positivt, beskriver ekvationen en ellips. Egenvektorer:

$$\underline{\lambda_1 = 5}: \quad (B - 5 \cdot E)x = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 17-5 & -6 \\ -6 & 8-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 12x_1 - 6x_2 = 0 \\ -6x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff [x_2 = 2t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = x_2/2 = t \\ x_2 = 2t \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\underline{\lambda_2 = 20}: \quad (B - 20 \cdot E)x = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 17-20 & -6 \\ -6 & 8-20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -3x_1 - 6x_2 = 0 \\ -6x_1 - 12x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff [x_2 = -t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -2x_2 = 2t \\ x_2 = -t \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

I det ortnormerade systemet som utgörs av egenvektorerna får vi ekvationen

$$5(x_1')^2 + 20(x_2')^2 = 20.$$

Längden på halvaxlarna får vi genom att sätta x_1 eller x_2 till 0 och sedan lösa ekvationen.

$$5(x_1')^2 + 0 = 20 \iff x_1' = \pm 2,$$

$$0 + 20(x_2')^2 = 20 \iff x_2' = \pm 1,$$

där vi kan avläsa att halvaxlarna har längderna 2 och 1. Riktningarna ges av egenvektorerna.

b)

$$37x_1^2 + 18x_1x_2 + 13x_2^2 = 200 \implies \mathbf{q}(\mathbf{x}) = 37x_1^2 + 18x_1x_2 + 13x_2^2 \implies B = \begin{bmatrix} 37 & 9 \\ 9 & 13 \end{bmatrix} \implies$$

$$\implies 0 = \det(B - \lambda E) = \begin{vmatrix} 37-\lambda & 9 \\ 9 & 13-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 37)(\lambda - 13) - 81 =$$

$$= \lambda^2 - 50\lambda + 481 - 81 = (\lambda - 10)(\lambda - 40) \implies \begin{cases} \lambda_1 = 10 \\ \lambda_2 = 40. \end{cases}$$

Återigen är det en ellips eftersom egenvärdena och högerledet är > 0. Egenvektorer:

$$\underline{\lambda_1 = 10}: \quad (B - 10 \cdot E)x = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 37-10 & 9 \\ 9 & 13-10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 27x_1 + 9x_2 = 0 \\ 9x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff [x_2 = 3t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -x_2/3 = -t \\ x_2 = 3t \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$\underline{\lambda_2 = 40}: \quad (B - 40 \cdot E)x = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 37-40 & 9 \\ 9 & 13-40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -3x_1 + 9x_2 = 0 \\ 9x_1 - 27x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff [x_2 = t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = 3x_2 = 3t \\ x_2 = t \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I egenvektorernas ortonormerade system blir ekvationen

$$10(x_1')^2 + 40(x_2')^2 = 200,$$

vilket ger oss halvaxlarna,

$$10(x_1')^2 + 0 = 200 \iff x_1' = \pm\sqrt{20} = \pm 2\sqrt{5},$$

$$0 + 40(x_2')^2 = 200 \iff x_1' = \pm\sqrt{5},$$

$2\sqrt{5}$ och $\sqrt{5}$, med riktningarna $(-1, 3)$ och $(3, 1)$.

11.8

Vi börjar med att beräkna egenvärdena.

$$3x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_2^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 = 1 \implies$$

$$\implies B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \implies 0 = \det(B - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 3-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(\lambda-3)^2(\lambda-6) + 4 + 4 - 4(3-\lambda) - (6-\lambda) - 4(3-\lambda) =$$

$$= -(\lambda^2 - 6\lambda + 9)(\lambda - 6) - 22 + 9\lambda = -(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 6\lambda^2 + 36\lambda - 54) - 22 + 9\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 36\lambda + 32 = -(\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda - 8\lambda^2 + 32\lambda - 32) =$$

$$= -(\lambda-8)(\lambda-2)^2 \implies \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 8. \end{cases}$$

Alla egenvärden positiva, och högerledet positivt, betyder att det är en ellipsoid, och eftersom vi har en dubbelrot bland egenvärdena är det en rotationsellipsoid. Rotationsaxeln kommer därför att ges av egenvektor till det enkla egenvärdet.

$$\underline{\lambda_2 = 8}: \quad (B - 8 \cdot E)x = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 3-8 & 1 & 2 \\ 1 & 3-8 & 2 \\ 2 & 2 & 6-8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 6x_2 - 3x_3 = 0 \\ -6x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff [x_3 = 2t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -x_2 + x_3 = t \\ x_2 = x_3/2 = t \\ x_3 = 2t \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

och alltså är rotationsaxelns riktning $(1, 1, 2)$.

11.9

a)

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_3 + 8x_2x_3 = 1 \implies$$

$$\implies B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \implies 0 = \det(B - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 4 \\ 3 & 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(\lambda-1)^3 + 0 + 0 - 9(1-\lambda) - 0 - 16(1-\lambda) =$$

$$= -(\lambda-1)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) - 25 + 25\lambda = -(\lambda-1)(\lambda^2 - 2\lambda + 1 - 25) =$$

$$= -(\lambda - 1)(\lambda + 4)(\lambda - 6) \implies \begin{cases} \lambda_1 = -4 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 6. \end{cases}$$

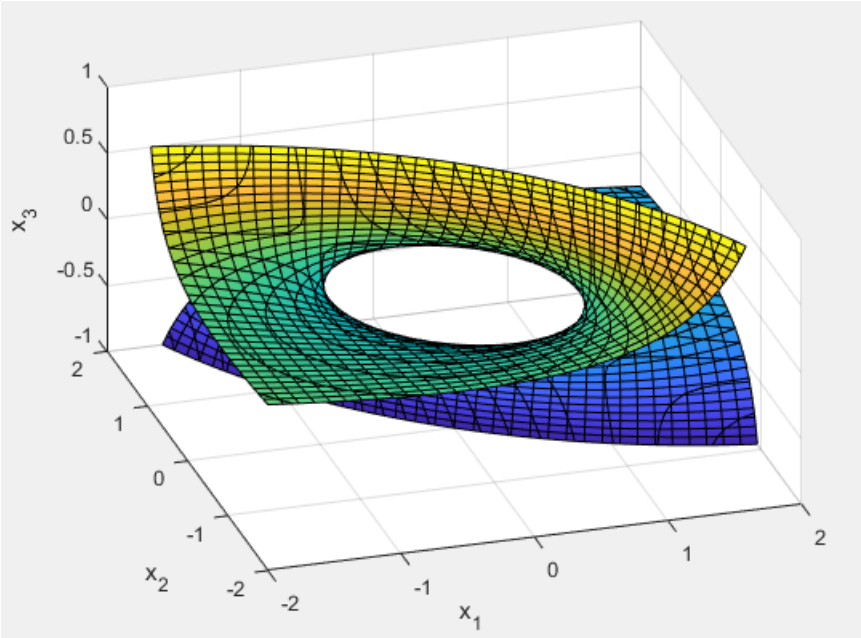
I det ortonomrerade systemet som utgörs av egenvektorerna kommer ekvationen att ta formen

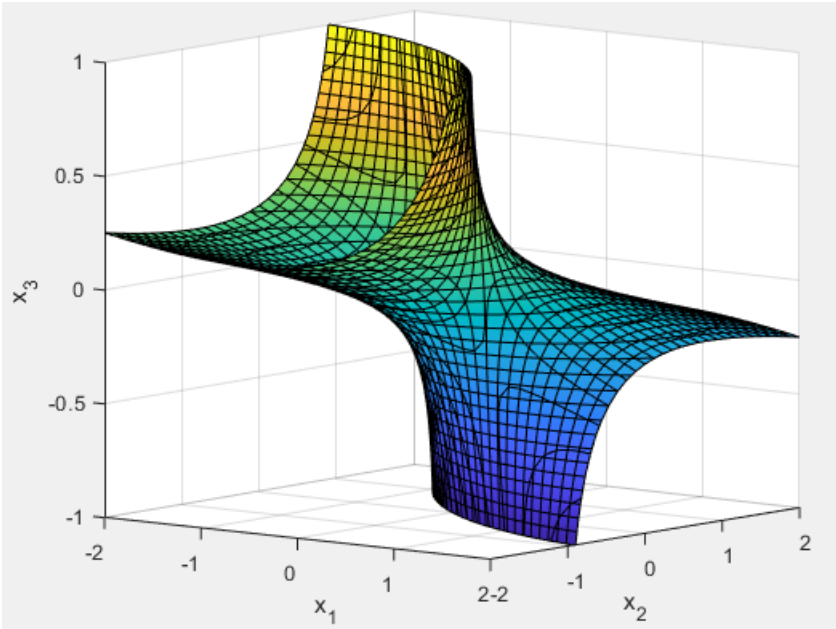
$$-4(x_1')^2 + (x_2')^2 + 6(x_3')^2 = 1,$$

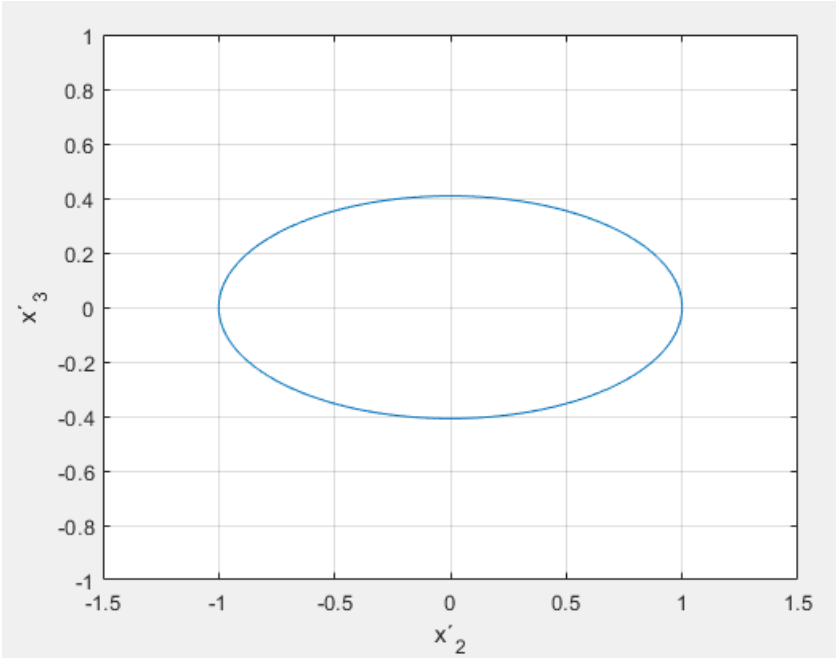
eftersom en koefficient är negativ och högerledet är positivt, beskriver ekvationen en enmantlad hyperboloid. Det minsta avståndet till origo ges av den lilla halvaxeln som tillhör den ellips som uppstår om man sätter $x_1' = 0$. Den ellipsen kommer, i det nya systemet, ha ekvationen

$$(x_2')^2 + 6(x_3')^2 = 1,$$

och utifrån våra tidigare kunskaper om ellipser vet vi att den mindre halvaxeln kommer att vara den längs x_3'-axeln. Alltså är vi intresserade av riktningsvektorn/egenvektorn till den koordinataxeln. Om det är svårt att visualisera detta i huvudet kanske följande figurer är till hjälp.







Vi vill nu bestämma denna linje/egenvektor och sedan undersöka i vilka punkter som den skär den kvadratiska formen/hyperboloiden. Dessa skärningspunkter kommer då att vara de som ligger närmast origo.

$$\underline{\lambda_3 = 6}: \quad (B - 6 \cdot E)x = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 1-6 & 0 & 3 \\ 0 & 1-6 & 4 \\ 3 & 4 & 1-6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -5x_1 \qquad\quad + 3x_3 = 0 \\ \qquad -5x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -5x_1 \qquad\quad + \ 3x_3 = 0 \\ \qquad -\ 5x_2 + \ 4x_3 = 0 \\ \qquad 20x_2 - 16x_3 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -5x_1 \qquad\quad + 3x_3 \qquad = 0 \\ \qquad -5x_2 + 4x_3 \qquad = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 0 \end{cases} \iff [x_3 = 5t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = 3x_3/5 = 3t \\ x_2 = 4x_3/5 = 4t \\ x_3 = 5t \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Linjens ekvation är $t(3,4,5)$. Insättning i den kvadratiska formen:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+6x_1x_3+8x_2x_3 = 1 \implies (3t)^2+(4t)^2+(5t)^2+6\cdot 3t\cdot 5t+8\cdot 4t\cdot 5t = 1 \iff$$

$$\iff 300t^2 = 1 \iff t = \pm\frac{1}{\sqrt{300}} = \pm\frac{1}{10\sqrt{3}},$$

vilket ger oss skärningspunkterna

$$(x_1, x_2, x_3) = \pm\frac{1}{10\sqrt{3}}(3,4,5).$$

b)

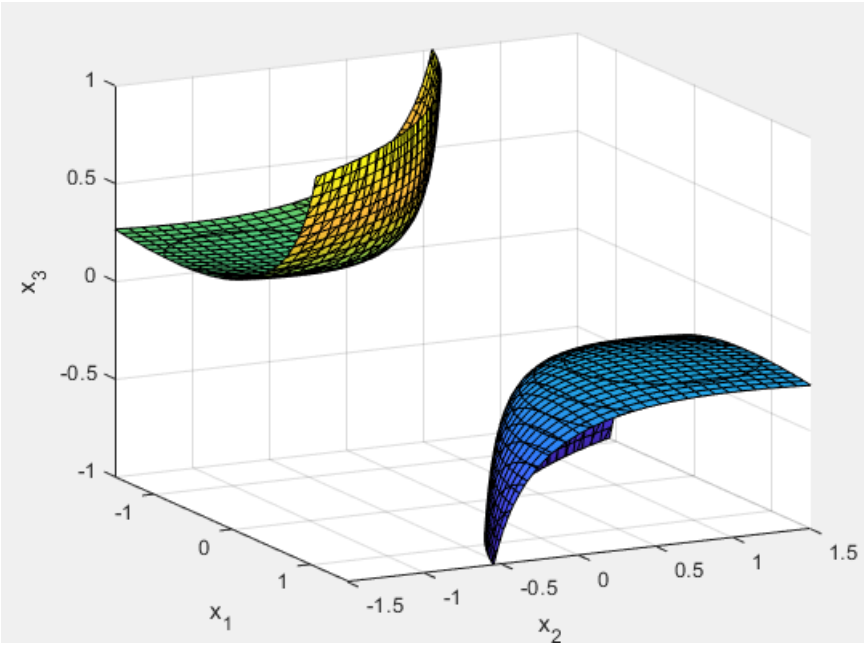
Vänsterledet är samma som i a), men högerledet är -1, istället för 1, och alltså får vi, efter koordinatbytet, ekvationen

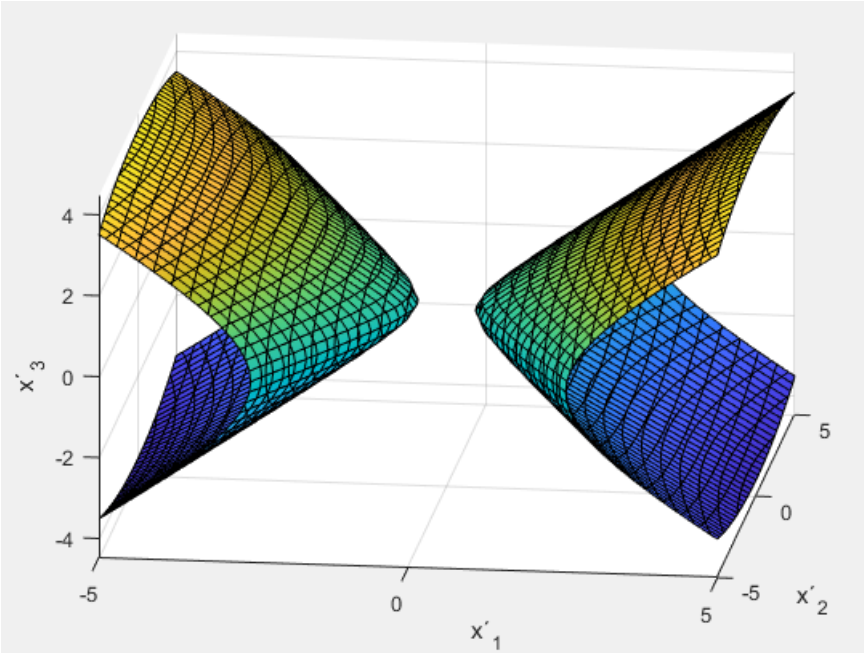
$$-4(x_1')^2 + (x_2')^2 + 6(x_3')^2 = -1,$$

där en negativ koefficient och ett negativt högerled indikerar att det är en tvåmantlad hyperboloid. Punkterna som ligger närmst origo är extrempunkterna på skålarna som bildas. Eftersom x_1' har den negativa koefficienten skär aldrig hyperboloiden $x_2'x_3'$-planet,

$$(x_2')^2 + 6(x_3')^2 = -1$$

har inga lösningar. x_1' är ortogonal mot $x_2'x_3'$-planet, vilket betyder att egenvektorn som tillhör x_1' kommer att skära extrempunkterna vi söker. Vi tar därför reda på denna egenvekor och sätter sedan in det vi kommer fram till i ekvationen, precis som i föregående uppgift.





$$\underline{\lambda_1 = -4}: \quad (B - (-4)\cdot E)x = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 1+4 & 0 & 3 \\ 0 & 1+4 & 4 \\ 3 & 4 & 1+4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 5x_1 \qquad\quad + 3x_3 = 0 \\ \qquad\quad 5x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 5x_1 \qquad\quad + \ \ 3x_3 = 0 \\ \qquad\quad 5x_2 + \ \ 4x_3 = 0 \\ \qquad\quad 20x_2 + 16x_3 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 5x_1 \qquad + 3x_3 \qquad = 0 \\ \qquad 5x_2 + 4x_3 \qquad = 0 \\ \qquad\qquad\qquad 0 = 0 \end{cases} \iff [x_3 = -5t] \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -3x_3/5 = 3t \\ x_2 = -4x_3/5 = 4t \\ x_3 = -5t \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Insättning av linjen $t(3, 4, -5)$ i den kvadratiska formen ger

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_3 + 8x_2x_3 = -1 \implies$$

$$\implies (3t)^2 + (4t)^2 + (-5t)^2 + 6 \cdot 3t \cdot -(5t) + 8 \cdot 4t \cdot (-5t) = -1 \iff$$

$$\iff -200t^2 = -1 \iff t = \pm\frac{1}{\sqrt{200}} = \pm\frac{1}{10\sqrt{2}},$$

och alltså är punkterna som ligger närmst origo:

$$(x_1, x_2, x_3) = \pm\frac{1}{10\sqrt{2}}(3, 4, -5).$$

11.10

a)

Kvadratkomplettering:

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3 = x_1^2 + 2x_1(x_2 - x_3) + 2x_2^2 - 2x_2x_3 - 2x_2x_3 =$$

$$= x_1^2 + 2x_1(x_2 - x_3) + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 + x_2^2 - x_3^2 - 2x_2x_3 = (x_1^2 + (x_2 - x_3))^2 + x_2^2 - x_3^2 - 2x_2x_3 =$$

$$= (x_1^2 + x_2 - x_3)^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 - 2x_3^2 = (x_1^2 + x_2 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 - 2x_3^2.$$

Eftersom alla kvadrater inte är positiva är den kvadratiska formen inte positivt definit.

b)

Kvadratkomplettering:

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 9x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3 =$$

$$= x_1^2 - 2x_1(x_2 - 2x_3) + x_2^2 - 4x_2x_3 + 4x_3^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_2x_3 =$$

$$= (x_1 - (x_2 - 2x_3))^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_2x_3 = (x_1 - x_2 + 2x_3)^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 + 4x_3^2 =$$

$$= (x_1 - x_2 + 2x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + 4x_3^2.$$

Denna är positivt definit eftersom alla kvadrater är positiva, och det finns tre stycken kvadrater.

c)

I denna deluppgift, och nästa, är kvadratkompletteringen ej systematiskt gjord, det vill säga när man exempelvis först kvadratkompletterar alla x_1-termer, sedan x_2, och sist x_3. Detta kan man se på att det finns mer än en kvadrat som har tre termer, och mer än två kvadrater som har två termer. Av denna anledning måste vi först ogöra kvadratkompletteringen, för att sedan kvadratkomplettera igen. Eftersom c) och d) delar dem två första kvadraterna förenklar jag dem separat.

$$(x_1+x_2+x_3)^2+(x_1-2x_2+x_3)^2=$$
$$=x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2+x_1^2+2x_1(-2x_2+x_3)+(-2x_2+x_3)^2=$$
$$=2x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+x_2^2+2x_2x_3+x_3^2-4x_1x_2+2x_1x_3+4x_2^2-4x_2x_3+x_3^2=$$
$$=2x_1^2+5x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3-2x_2x_3.$$

Alltså är

$$(x_1+x_2+x_3)^2+(x_1-2x_2+x_3)^2+(2x_1-x_3)^2=$$
$$=2x_1^2+5x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3-2x_2x_3+4x_1^2-4x_1x_3+x_3^2=$$
$$=6x_1^2+5x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2-2x_2x_3=$$
$$=6(x_1^2-\frac{1}{3}x_1x_2+\frac{1}{36}x_2^2)-\frac{1}{6}x_2^2+5x_2^2+3x_3^2-2x_2x_3=$$
$$=6(x_1-\frac{1}{6}x_2)^2+\frac{29}{6}(x^2-\frac{12}{29}x_2x_3+\frac{36}{29^2}x_3^2)-\frac{29}{6}\cdot\frac{36}{29^2}x_3^2+3x_3^2=$$
$$=6(x_1-\frac{1}{6}x_2)^2+\frac{29}{6}(x^2-\frac{6}{29}x_3)^2+\frac{81}{29}x_3^2.$$

Detta uttryck är positivt definit.

d)

$$(x_1+x_2+x_3)^2+(x_1-2x_2+x_3)^2+9(x_1+x_3)^2=$$
$$=2x_1^2+5x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3-2x_2x_3+9x_1^2+18x_1x_3+9x_3^2=$$
$$=11x_1^2+5x_2^2+11x_3^2-2x_1x_2+22x_1x_3-2x_2x_3=$$
$$=11(x_1^2-2x_1(\frac{1}{11}x_2-x_3)+(\frac{1}{11}x_2-x_3)^2)-11(\frac{1}{11}x_2-x_3)^2+5x_2^2+11x_3^2-2x_2x_3=$$
$$=11(x_1-(\frac{1}{11}x_2-x_3))^2-\frac{1}{11}x_2^2+2x_2x_3-11x_3^2+5x_2^2+11x_3^2-2x_2x_3=$$
$$=11(x_1-\frac{1}{11}x_2+x_3)^2+\frac{54}{11}x_2^2.$$

Denna kvadratiska form har visserligen bara positiva kvadrater, men eftersom antalet kvadrater inte är samma som antalet variabler är den inte positivt definit. Den är positivt semidefinit.

11.11

Enligt tröghetslagen är kvadratkomplettering entydig, och alltså om vi kvadratkompletterar båda formerna och ser att de har samma antal positiva/negativa kvadrater vet vi att det finns ett variabelbyte som kan överföra den ena på den andra.

a)

$$\mathbf{q}(x) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 =$$
$$= x_1^2 + 2x_1(2x_2 + x_3) + 4x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 - 3x_2^2 - 4x_2x_3 + 2x_3^2 =$$
$$= (x_1 + (2x_2 + x_3))^2 - 3x_2^2 - 4x_2x_3 + 2x_3^2 =$$
$$= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 3(x_2^2 + \frac{4}{3}x_2x_3 + \frac{4}{9}x_3^2) + \frac{4}{3}x_3^2 + 2x_3^2 =$$
$$= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 3(x_2 + \frac{2}{3}x_3)^2 + \frac{10}{3}x_3^2.$$
$$\mathbf{r}(y) = y_1^2 - 2y_2^2 + y_3^2 + 2y_1y_2 + 4y_1y_3 - 2y_2y_3 =$$
$$= y_1^2 + 2y_1(y_2 + 2y_3) + y_2^2 + 4y_2y_3 + 4y_3^2 - 3y_2^2 - 6y_2y_3 - 3y_3^2 =$$
$$= (y_1 + (y_2 + 2y_3))^2 - 3(y_2^2 + 2y_2y_3 + y_3^2) =$$
$$= (y_1 + (y_2 + 2y_3))^2 - 3(y_2 + y_3)^2 = (y_1 + y_2 + 2y_3)^2 - 3(y_2 + y_3)^2.$$

Eftersom vi har olika antal strängt positiva koefficienter finns det inte ett linjärt koordinatbyte mellan dessa kvadratiska former.

b)

$$\mathbf{q}(x) = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3 =$$
$$= 4x_1^2 - 4x_1(x_2 - x_3) + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 - x_2x_3 =$$
$$= (2x_1 - (x_2 - x_3))^2 - x_2x_3 = (2x_1 - x_2 + x_3)^2 - x_2x_3.$$

För att gå vidare här behöver vi göra ett koordinatbytet:

$$\begin{cases} x_1 = x_1' \\ x_2 = x_2' - x_3' \\ x_3 = x_2' + x_3' \end{cases} \implies (2x_1 - x_2 + x_3)^2 - x_2x_3 =$$

$$= (2x_1' - (x_2' - x_3') + (x_2' + x_3'))^2 - (x_2' - x_3')(x_2' + x_3') =$$
$$= (2x_1' + 2x_3')^2 - (x_2')^2 + (x_3')^2 = 4(x_1' + x_3')^2 - (x_2')^2 + (x_3')^2.$$

Detta variabelbyte råkade slutföra kvadratkompletteringen.

$$\mathbf{r}(y) = y_1^2 + 5y_2^2 - 4y_3^2 + 2y_1y_2 - 4y_1y_3 =$$
$$= y_1^2 + 2y_1(y_2 - 2y_3) + y_2^2 - 4y_2y_3 + 4y_3^2 + 4y_2^2 + 4y_2y_3 - 8y_3^2 =$$
$$= (y_1 + (y_2 - 2y_3))^2 + 4y_2^2 + 4y_2y_3 - 8y_3^2 =$$
$$= (y_1 + y_2 - 2y_3)^2 + 4(y_2^2 + y_2y_3 + \frac{1}{4}y_3^2) - y_3^2 - 8y_3^2 =$$
$$= (y_1 + y_2 - 2y_3)^2 + 4(y_2 + \frac{1}{2}y_3)^2 - 9y_3^2.$$

Dessa kvadratiska former har samma antal strängt positiva, och strängt negativa, koefficienter, vilket betyder att det existerar ett linjärt koordinatbyte $x = Ty$.

11.12

Vi kvadratkompletterar och tittar sedan på hur många koefficienter som är negativa och positiva, vilket kommer att informera oss om vilken yta ekvationerna beskriver.

a)

$$x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3 =$$
$$= x_1^2 - 2x_1(x_2 + x_3) + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 =$$
$$= (x_1 - (x_2 + x_3))^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 =$$
$$= (x_1 - x_2 - x_3)^2 + 2(x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2) - 2x_3^2 + x_3^2 =$$
$$= (x_1 - x_2 - x_3)^2 + 2(x_2 + x_3)^2 - x_3^2 = 1.$$

En negativ koefficient, två positiva, och ett positivt högerled indikerar att det är en enmantlad hyperboloid.

b)

$$2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 = 2(x_1^2 + x_1x_2 + \frac{1}{4}x_2^2) + \frac{1}{2}x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_2x_3 =$$
$$= 2(x_1 + \frac{1}{2}x_2)^2 + \frac{1}{2}(x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2) = 2(x_1 + \frac{1}{2}x_2)^2 + \frac{1}{2}(x_2 + 2x_3)^2 = 1.$$

Eftersom en av koefficienterna är 0, och 2 är positiva, är ytan en elliptisk cylinder. Man kan se det som att man har ekvationen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

där z kan vara vad som helst, då kommer man ju få en ellips för varje värde på z, och alltså blir det en elliptisk cylinder.

c)

$$x_1^2+2x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+6x_2x_3 = x_1^2+2x_1(x_2+2x_3)+x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2-x_2^2+2x_2x_3-2x_3^2 =$$
$$= (x_1 + (x_2 + 2x_3))^2 - (x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) - x_3^2 =$$
$$= (x_1+x_2+2x_3)^2 - (x_2-x_3)^2 - x_3^2 = 2 \iff -(x_1+x_2+2x_3)^2 + (x_2-x_3)^2 + x_3^2 = -2.$$

En negativ koefficient och ett negativt högerled säger att det är en tvåmantlad hyperboloid.

11.13

$$x_1^2 + (a+1)x_2^2 + (5a+4)x_3^2 + 4(a+1)x_2x_3 =$$
$$= x_1^2 + (a+1)(x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2) - 4(a+1)x_3^2 + (5a+4)x_3^2 =$$
$$= x_1^2 + (a+1)(x_2 + 2x_3)^2 + ax_3^2 = 1.$$

Detta uttryck är en hyperboloid om

$$a < 0 \quad \text{och} \quad a + 1 < 0 \implies a < -1,$$

eller

$$a < 0 \quad \text{eller} \quad a + 1 < 0 \implies a < -1 \implies -1 < a < 0.$$

Alltså är det en hyperboloid när alla koefficienter är skilda från 0, och en eller två är negativa. Dessa olikheter kan vi sammanfatta till att

$$a < 0, \ a \neq -1.$$

11.14

Om vi visar att matrisen har en motsvarande negativt definit kvadratisk form, så vet vi att alla egenvärden måste vara negativa. Detta följer ur tröghetslagen, eftersom antalet negativa koefficienter inte beror på val av koordinater och om vi väljer egenvektorerna som nya koordinater hade alla koefficienter blivit egenvärden, vilket betyder att de måste vara negativa.

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \implies$$

$$\implies x^t Bx = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 + 2x_2x_3 - 2x_3^2 + 2x_3x_4 - \cdots - 2x_{n-1}^2 + 2x_{n-1}x_n - 2x_n^2 =$$
$$= -x_1^2 - (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) - (x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) - \cdots - (x_{n-1}^2 - 2x_{n-1}x_n + x_n^2) - x_n^2 =$$
$$= -x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 - (x_2 - x_3)^2 - \cdots - (x_{n-1} - x_n)^2 - x_n^2.$$

Detta uttryck är dock inte systematiskt kvadratkompletterat - vi har $n+1$ kvadrattermer, vilket betyder att vi inte kan uttala oss om huruvida den kvadratiska formen är negativt definit eller inte. Från övning 6.8 vet vi att $x_1 - x_2, x_2 - x_3, ..., x_{n-1} - x_n$ är $n-1$ linjärt oberoende vektorer. Detta betyder att $x_1 - x_2, x_2 - x_3, ..., x_{n-1} - x_n, x_n$ är n linjärt oberoende vektorer, och vi kan därför utföra variabelbytet

$$x_k' = x_k - x_{k+1}, \ k = 1, .., n-1, \quad x_n' = x_n \implies$$
$$\implies -x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 - \cdots - (x_{n-1} - x_n)^2 - x_n^2 =$$
$$= -x_1^2 - (x_1')^2 - \cdots - (x_{n-1}')^2 - (x_n')^2.$$

Vi vill också uttrycka x_1 i den nya basen, och man inser snabbt att

$$x_1 = x_1' + \cdots + x_n',$$

vilket ger oss att

$$-x_1^2 - (x_1')^2 - \cdots - (x_{n-1}')^2 - (x_n')^2 =$$
$$= -(x_1' + \cdots + x_n')^2 - (x_1')^2 - \cdots - (x_{n-1}')^2 - (x_n')^2 = -\left(\sum_{k=1}^{n} x_k'\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} (x_k')^2.$$

Detta uttryck är uppenbart negativt definit, vilket, på grund av kvadratkompletterings entydighet och oberoende av koordinatval enligt tröghetslagen, visar att matrisen har en

motsvarande negativt definit kvadratisk form, och därmed endast negativa egenvärden. □

Man kan också bara kvadratkomplettera den kvadratiska formen:

$$-2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 + 2x_2x_3 - 2x_3^2 + 2x_3x_4 - \cdots - 2x_{n-1}^2 + 2x_{n-1}x_n - 2x_n^2 =$$

$$= -2(x_1^2 - x_1x_2 + \frac{1}{4}x_2^2) - (2 - \frac{1}{2})x_2^2 + 2x_2x_3 - 2x_3^2 + 2x_3x_4 - \cdots - 2x_{n-1}^2 + 2x_{n-1}x_n - 2x_n^2 =$$

$$= -2(x_1 - \frac{1}{2}x_2)^2 - \frac{3}{2}(x_2^2 - \frac{4}{3}x_2x_3 + \frac{4}{9}x_3^2) - (2 - \frac{2}{3})x_3^2 + 2x_3x_4 - \cdots - 2x_{n-1}^2 + 2x_{n-1}x_n - 2x_n^2 =$$

$$= -2(x_1 - \frac{1}{2}x_2)^2 - \frac{3}{2}(x_2 - \frac{2}{3}x_3)^2 - \frac{4}{3}(x_3^2 - \frac{3}{2}x_3x_4 + \frac{9}{16}x_4^2) - \cdots - 2x_{n-1}^2 + 2x_{n-1}x_n - 2x_n^2 =$$

$$= -2(x_1 - \frac{1}{2}x_2)^2 - \frac{3}{2}(x_2 - \frac{2}{3}x_3)^2 - \frac{4}{3}(x_3^2 - \frac{3}{4}x_4)^2 - \cdots - 2x_{n-1}^2 + 2x_{n-1}x_n - 2x_n^2 =$$

$$= \ldots =$$

$$= -2(x_1 - \frac{1}{2}x_2)^2 - \frac{3}{2}(x_2 - \frac{2}{3}x_3)^2 - \cdots - \frac{n}{n-1}(x_{n-1} - \frac{n-1}{n}x_n)^2 - (2 - \frac{n-1}{n})x_n^2 =$$

$$= -2(x_1 - \frac{1}{2}x_2)^2 - \frac{3}{2}(x_2 - \frac{2}{3}x_3)^2 - \cdots - \frac{n}{n-1}(x_{n-1} - \frac{n-1}{n}x_n)^2 - \frac{n+1}{n}x_n^2 =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k+1}{k}\left(x_k - \frac{k}{k+1}x_{k+1}\right)^2 - \frac{n+1}{n}x_n^2,$$

vilket är ett uttryck som innehåller n termer, och alltså har vi kvadratkompletterat den kvadratiska formen till något som uppenbarligen är negativt definit. □

11.15

Låt

$$B = \begin{bmatrix} 11 & -\pi & 0 \\ -\pi & 20 & -1 \\ 0 & -1 & 16 \end{bmatrix}.$$

För att ta reda på hur många egenvärden som är större än a, kvadratkompletteras den kvadratiska formen som hör till

$$B - aE,$$

och antalet positiva diagonalelement/koefficienter till kvadrater motsvarar antalet egenvärden som är $> a$. För att undersöka egenvärden som är $\geq a$, inkluderas även koefficienter som är 0 i räkningen.

a)

$$C = B - 10E = \begin{bmatrix} 1 & -\pi & 0 \\ -\pi & 10 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix} \implies$$

$$\implies x^t Cx = x_1^2 + 10x_2^2 + 6x_3^2 - 2\pi x_1x_2 - 2x_2x_3 =$$

$$= x_1^2 - 2\pi x_1x_2 + \pi^2x_2^2 + (10 - \pi^2)x_2^2 + 6x_3^2 - 2x_2x_3 =$$

$$= (x_1 - \pi x_2)^2 + (10 - \pi^2)(x_2^2 - \frac{2}{10 - \pi^2} x_2 x_3 + \frac{1}{(10 - \pi^2)^2} x_3^2) - \frac{1}{10 - \pi^2} x_3^2 + 6x_3^2 =$$

$$= (x_1 - \pi x_2)^2 + (10 - \pi^2)(x_2 - \frac{1}{10 - \pi^2} x_3)^2 + \frac{59 - 6\pi^2}{10 - \pi^2} x_3^2.$$

$59 - 6\pi^2 < 0$, men de andra koefficienterna är positiva, vilket betyder att det är två egenvärden som är ≥ 10.

b)

$$C = B - 15E = \begin{bmatrix} -4 & -\pi & 0 \\ -\pi & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \implies$$

$$\implies x^t C x = -4x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 - 2\pi x_1 x_2 - 2x_2 x_3 =$$

$$= -(4x_1^2 + 2\pi x_1 x_2 + \frac{\pi^2}{4} x_2^2) + (5 + \frac{\pi^2}{4}) x_2^2 - 2x_2 x_3 + x_3^2 =$$

$$= -(2x_1 + \frac{\pi}{2} x_2)^2 + (5 + \frac{\pi^2}{4})(x_2^2 - \frac{2}{5 + \frac{\pi^2}{4}} x_2 x_3 + \frac{1}{(5 + \frac{\pi^2}{4})^2} x_3^2) - \frac{1}{5 + \frac{\pi^2}{4}} x_3^2 + x_3^2 =$$

$$= -(2x_1 + \frac{\pi}{2} x_2)^2 + (5 + \frac{\pi^2}{4})(x_2 - \frac{1}{5 + \frac{\pi^2}{4}} x_3)^2 + \frac{4 + \frac{\pi^2}{4}}{5 + \frac{\pi^2}{4}} x_3^2 =$$

$$= -(2x_1 + \frac{\pi}{2} x_2)^2 + (5 + \frac{\pi^2}{4})(x_2 - \frac{4}{20 + \pi^2} x_3)^2 + \frac{16 + \pi^2}{20 + \pi^2} x_3^2.$$

Återigen är det en negativ och två positiva. Det är alltså 2 egenvärden som är > 15.

c)

$$C = B - 16E = \begin{bmatrix} -5 & -\pi & 0 \\ -\pi & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \implies$$

$$\implies x^t C x = -5x_1^2 + 4x_2^2 - 2\pi x_1 x_2 - 2x_2 x_3 =$$

$$= -5(x_1^2 + 2\frac{\pi}{5} x_1 x_2 + \frac{\pi^2}{25} x_2^2) + (4 + \frac{\pi^2}{5}) x_2^2 - 2x_2 x_3 =$$

$$= -5(x_1 + \frac{\pi}{5} x_2)^2 + (4 + \frac{\pi^2}{5})(x_2^2 - \frac{2}{4 + \frac{\pi^2}{5}} x_2 x_3 + \frac{1}{(4 + \frac{\pi^2}{5})^2} x_3^2) - \frac{1}{4 + \frac{\pi^2}{5}} x_3^2 =$$

$$= -5(x_1 + \frac{\pi}{5} x_2)^2 + (4 + \frac{\pi^2}{5})(x_2 - \frac{1}{4 + \frac{\pi^2}{5}} x_3)^2 - \frac{1}{4 + \frac{\pi^2}{5}} x_3^2 =$$

$$= -5(x_1 + \frac{\pi}{5} x_2)^2 + (4 + \frac{\pi^2}{5})(x_2 - \frac{5}{20 + \pi^2} x_3)^2 - \frac{5}{20 + \pi^2} x_3^2.$$

Nu är 2 av koefficienterna negativa, vilket betyder att endast 1 egenvärde är > 16.

11.16

Eftersom $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ är en bas i det linjära rummet, går det att uttrycka alla vektor med hjälp av dessa. Alltså

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n \quad \text{och} \quad \mathbf{y} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \beta_n\mathbf{e}_n.$$

Om vi därför definierar skalärprodukten som, förutsatt att alla koefficienter är reella,

$$(\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y}) = \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n,$$

kommer

$$(\mathbf{e}_i\,|\,\mathbf{e}_j) = 0\cdot 0 + \cdots + 1\cdot 0 + \cdots + 0\cdot 1 + \cdots + 0\cdot 0 = 0,$$

eftersom $\mathbf{e}_i$ har $\alpha_k = 0$, $k \neq i$, och $\alpha_i = 1$. Motsvarande för $\mathbf{e}_j$. Dessutom är

$$(\mathbf{e}_i\,|\,\mathbf{e}_i) = 0\cdot 0 + \cdots + \alpha_i\cdot\alpha_i + \cdots + 0\cdot 0 = \alpha_i^2 = 1^2 = 1,$$

vilket visar att $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ är en ortonormerad bas i skalärprodukten. Det återstår nu att visa att

$$(\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y}) = \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n$$

faktiskt definierar en skalärprodukt. Vi behöver därför, med $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$, samt $a, b \in \mathbb{R}$, kontrollera att

$$(a\mathbf{u} + b\mathbf{w}\,|\,\mathbf{v}) = a(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{v}) + b(\mathbf{w}\,|\,\mathbf{v}),$$

$$(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{v}) = (\mathbf{v}\,|\,\mathbf{u}),$$

och

$$(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{u}) > 0, \text{ då } \mathbf{u} \neq \mathbf{0}.$$

Med

$$\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n \quad \text{och} \quad \mathbf{v} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \beta_n\mathbf{e}_n$$

är det uppenbart att

$$(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{v}) = \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n = \beta_1\alpha_1 + \cdots + \beta_n\alpha_n = (\mathbf{v}\,|\,\mathbf{u}),$$

och

$$(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{u}) = \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2 > 0, \text{ då } \mathbb{R} \ni \alpha_i \neq 0,\ i = 1, ..., n.$$

Låt nu

$$\mathbf{w} = \gamma_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \gamma_n\mathbf{e}_n \implies$$

$$\implies (a\mathbf{u} + b\mathbf{w}\,|\,\mathbf{v}) = (a\alpha_1 + b\gamma_1)\beta_1 + \cdots + (a\alpha_n + b\gamma_n)\beta_n =$$

$$= a(\alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n) + b(\gamma_1\beta_1 + \cdots + \gamma_n\beta_n) = a(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{v}) + b(\mathbf{w}\,|\,\mathbf{v}).$$

Detta visar att den angivna skalärprodukten är en faktisk skalärprodukt, och att den gör basen $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ till en ortonormerad bas. □

Med komplexa koefficienter hade skalärprodukten

$$(\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y}) = \alpha_1\overline{\beta}_1 + \cdots + \alpha_n\overline{\beta}_n,$$

med beteckningar som ovan, dugt.