Kontinuerliga system

Markus Bolinder

Juli 2023

Förord

Jag har skrivit lösningar till alla uppgifter som var med på kursprogrammet under den kursomgång som jag läste kursen, inklusive alla parentesuppgifter och seminarieuppgifter. Vilka uppgifter som detta innefattar kan ses i figuren nedan. Det är även vissa uppgifter som redan har lösningar i övningsboken, men de är fortfarande med här (fast det står bara "Lösning finns redan."). Om jag känner mig tillräckligt uttråkad någon gång, eller om jag får nys om att efterföljande kursomgångar har många uppgifter på sitt kursprogram som inte är med här, kanske jag lägger till fler lösningar. Som vanligt med dessa saker, måste man ha i åtanke att det kan förekomma fel, och att dessa lösningar antagligen inte är någon helig graal till att förstå kursen helt.

I uppgifterna använder jag beteckningarna $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ för att beteckna positiva heltal, och $\mathbb{N} \cup \{0\}$ för att beteckna icke-negativa heltal. Anledningen till att jag poängterar hur 0 behandlas i båda fallen är för att det inte ska råda någon tvetydighet till följd av ens definition av dem naturliga talen (även om man brukar exkludera 0 från dem naturliga talen). I majoriteten av fallen kommer jag också att beteckna partiella derivator genom att ha en nedsänkt variabel intill funktionen (subscript). Alltså

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u_{xy} \quad \text{o.s.v.}$$

Så om man ser en nedsänkt variabel är det en partiell derivata - det enda man skulle kunna förväxla det med är index i en summa/serie, men det bör vara uppenbart när det är fallet.

0. {1, 2, 4, 6, 7}
1. {1, 3, 4, 5, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 18, 21, 22, 23, 25, 26}
3. {2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 29, 30, 32, 35, 39, 41, 42, 43, 45, 46, 49, 51, 55, 60, 62, 66, 69}
4. {1, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 14, 15, 16, 17, 20}
5. {1, 2, 4, 9, 10, 11, 12, 13, 20, 22, 23 24, 27, 28}
7. {1, 2, 3, 6, 8, 9, 10, 18, 20, 22}
Karakteristikhäfte. {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}
H. {1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 27, 28, 30, 31, 33, 36, 38, 39, 45, 47, 50, 51, 52, 55}
S. {1, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 20}
D. {1, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 17, 18, 22, 23, 24, 25, 27, 29, 30, 31, 34, 36, 41}

Innehåll

Kapitel 0

0.1

När vi deriverar med avseende på den ena variabeln är den andra en konstant, så om vi integrerar blir, det som i endimensionell analys, integrationskonstanten en funktion i den andra variabeln.

a)

Man ser direkt att svaret är $u(x, y) = \varphi(y)$, där φ är en godtycklig endimensionell funktion.

b)

Vi löser det som i endimensionell analys, vilket ger att $u(x, y) = Ae^{-y}$, men eftersom det är partiell derivata kan A bero på x. $u(x, y) = \varphi(x)e^{-y}$.

c)

På samma sätt som i b) får man direkt att $u(x, y) = \varphi(x)\cos y + \psi x \sin y$.

d)

Vi integrerar först en gång med avseende på den ena variabeln, vilket ger att

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \implies \frac{\partial u}{\partial x} = \tilde{\varphi}(x) \implies u(x, y) = \varphi(x) + \psi(y),$$

där φ är en primitiv till $\tilde{\varphi}$.

0.2

a)

Med variabelbytet

$$\begin{cases} \xi = x - ct, \\ \eta = x + ct \end{cases} \implies \begin{cases} \xi_x = \eta_x = 1, \\ \xi_t = -c, \\ \eta_t = c, \end{cases}$$

inför vi funktionen $v(\xi, \eta) = u(x, t)$. Kedjeregeln ger nu att

$$u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x = v_\xi + v_\eta \implies$$

$$\implies u_{xx} = (v_{\xi\xi}\xi_x + v_{\eta\xi}\eta_x) + (v_{\xi\eta}\xi_x + v_{\eta\eta}\eta_x) = [v_{\xi\eta} = v_{\eta\xi}] = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta},$$

och

$$u_y = v_\xi \xi_t + v_\eta \eta_t = cv_\xi - cv_\eta = c(v_\xi - v_\eta) \implies$$

$$\implies u_{yy} = c\left((v_{\xi\xi}\xi_t + v_{\eta\xi}\eta_t) - (v_{\xi\eta}\xi_t + v_{\eta\eta}\eta_t)\right) =$$

$$= c(cv_{\xi\xi} - cv_{\xi\eta} - (cv_{\xi\eta} - cv_{\eta\eta})) = c^2(v_{\xi\xi} - 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}).$$

Insättning:

$$0 = u_{tt} - c^2 u_{xx} = c^2(v_{\xi\xi} - 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}) - c^2(v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}) =$$

$$= -4c^2 v_{\xi\eta} \implies v_{\xi\eta} = 0. \quad \square$$

b)

$$v_{\xi\eta} = 0 \implies [0.1 \text{ d)}] \implies v(\xi, \eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta).$$

Eftersom $u(x,t) = v(\xi, \eta)$, så gäller det att

$$u(x,t) = \varphi(x - ct) + \psi(x + ct). \quad \square$$

c)

Man translaterar grafen åt höger eller vänster beroende på om man har $x + ct$ eller $x - ct$. Se facit för bilder.

0.4

Tanken är att man ska gissa sig fram till en lösning på dessa uppgifter, vilket kanske är tydligast i a), men man kan faktiskt räkna sig fram till saker också.

a)

Eftersom vi bara letar efter en lösning kan vi välja $u = 0$, som uppenbart uppfyller villkoren.

b)

$$\begin{cases} \Delta u = 1, & x^2 + y^2 < 1, \\ u = 0, & x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 1, & x^2 + y^2 < 1, \\ u = 0, & x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Vidare är $u_{xx} + u_{yy} = u_{xx} - i^2 u_{yy}$, vilket påminner om vågekvationen från 0.2, men med $c = i$. Alltså kan man tänka sig att om vi istället gör variabelbytet

$$\begin{cases} \xi = x - iy, \\ \eta = x + iy, \end{cases}$$

där $v(\xi, \eta) = u(x, y)$, så kommer vi få samma förenkling, men med $c = i$ istället. Alltså

$$1 = \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = -4i^2 v_{\xi\eta} \implies v_{\xi\eta} = \frac{1}{4} \implies$$

$$\implies v_\xi = \frac{1}{4}\eta + \tilde{\varphi}(\xi) \implies v(\xi, \eta) = \frac{1}{4}\xi\eta + \varphi(\xi) + \psi(\eta).$$

Man kontrollerar snabbt att $\xi\eta = x^2 + y^2$, vilket betyder att

$$u(x, y) = \frac{1}{4}(x^2 + y^2) + \varphi(x - iy) + \psi(x + iy).$$

Om $x^2 + y^2 = 1$ ska $u = 0$, vilket betyder att $\varphi(x - iy) + \psi(x + iy) = -1/4$, vilket man enkelt åstadkommer genom att välja, till exempel, $\varphi = \psi = -1/2$. Detta ger oss lösningen

$$u(x, y) = \frac{1}{4}(x^2 + y^2 - 1).$$

Detta variabelbyte är tydligen, dem så kallade, Wirtingerderivatorna, eller dem komplexa derivatorna, och dessa kan vara bra att kunna om man behöver bestämma en skalär potential på tentan och vill imponera på tentarättaren.

c)

Från funktionsteorin kommer vi ihåg att real- och imaginärdelen av en holomorf/analytisk är harmonisk ($\Delta u = 0$), och alltså kan vi underlätta vårt sökande genom att referera till vår kunskap om analytiska funktioner uttryckt i polära koordinater. Vi vet att $z = x + iy = [\text{pol. koord.}] = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$, och realdelen ser ut som en lämplig kandidat för att vara vårt svar. Att $x^2 + y^2 = 1 \iff r^2 = 1 \iff [r \geq 0] \iff r = 1$, vilket betyder att funktionen är $\cos\varphi$, d¨$r = 1$. Alltså är funktionen vi söker $u = r\cos\varphi$, vilket är realdelen av z, det vill säga $u(x, y) = x$.

d)

I syfte att göra på samma sätt som i föregående deluppgift skriver vi först $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi = 2r\sin\varphi \cdot r\cos\varphi|_{r=1}$. Om vi nu tittar på den holomorfa funktionen $z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$, ser vi att imaginärdelen, om vi skulle skriva den i polära koordinater är precis $2r\sin\varphi \cdot r\cos\varphi$, och därmed konstaterar vi att funktionen $u(x, y) = 2xy$ löser problemet.

0.6

a)

Sfärisk symmetri betyder att vi kan rotera allting i φ- eller θ-led utan att påverka lösningen. Detta motiverar att titta på problemet i sfäriska koordinater, eftersom då kommer alla derivator med avseende på θ eller φ att försvinna. I formelsamlingen ser vi att Laplaceoperatorn i sfäriska koordinater är

$$\Delta u = \frac{1}{r}(ru)_{rr} + \frac{1}{r^2}\Lambda u = \frac{1}{r}(ru)_{rr} + 0,$$

där $\Lambda u = 0$ eftersom Λ endast innehåller partiella derivator för φ och θ. Laplaces ekvation blir då ett endimensionellt problem i radiell led, där vi låter $u = u(r)$,

$$\frac{1}{r}(ru)'' = 0 \implies (ru)'' = 0 \implies (ru)' = B \implies ru = A + Br \implies u(r) = \frac{A}{r} + B.$$

Eftersom vi har skurit bort origo behöver $A \neq 0$, eftersom $r \neq 0$.

b)

På samma sätt som i a) letar vi efter en funktion $u = u(r)$, fast istället för att vi kan rotera fritt i rummet kan vi endast rotera kring z-axeln. Alltså är $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, inte $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ som i a). Att funktionen är cylindriskt symmetrisk betyder att vi sätter alla z- och θ-derivator till 0 i Laplaceoperatorn uttryck för cylindriska koordinater. Med detta blir Laplaces ekvation

$$\Delta u = \frac{1}{r}(ru_r)_r + 0 + 0 = \frac{1}{r}(ru')' = 0 \implies (ru')' = 0 \implies$$

$$\implies ru' = A \implies u' = \frac{A}{r} \implies u(r) = A\ln r + B.$$

Återigen behöver inte A vara 0, eftersom vi kar skurit bort z-axeln där $r = 0$.

0.7

Med vektorfältet $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ får vi att divergensen blir $\operatorname{div} \boldsymbol{r} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 1 + 1 + 1 = 3$. Eftersom integralen är till randen av ett slutet område kan vi direkt använda Gauss sats, vilket ger att

$$\oint_{\partial D} \boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_D \operatorname{div} \boldsymbol{r} \, dV = \int_D 3 \, dV = 3V = 3\mu(D). \quad \square$$

Kapitel 1

1.1

Vi konsulterar formelsamlingen och finner diffusionsekvationen $u_t - D\Delta u = k$, där k är produktionen av ämnet. Eftersom ämnet sönderfaller med en hastighet som är proportionell mot mängden av ämnet kan vi skriva $k = -cu$ (mängden minskar), vilket ger oss ekvationen $u_t - D\Delta u + cu = 0$.

1.3

Att staven är tunn betyder att vi kan räkna endimensionellt. I formelsamlingen hittar vi Fouriers lag som säger att värmeströmtätheten $\boldsymbol{j} = -\lambda\nabla u$. Eftersom det är endimensionellt är $\nabla u = u'(x)$, och $\boldsymbol{j} = j$, där $u(x) = T_0/(1+x^2)$. Alltså får vi att

$$j = \lambda\frac{2T_0 x}{(1+x^2)^2}.$$

1.4

I formelsamlingen hittar vi värmeledningsekvationen $u_t - a\Delta u = \frac{a}{\lambda}k$, där k är värmeproduktionen. Eftersom värme läcker kommer produktionen vara negativ och att den är proportionell mot stavens temperatur och omgivningens kan skrivas som $k = -C(u - T_0)$, där $C > 0$. Att det är en tunn stav betyder att $u = u(x,t)$ (endimensionellt) och då blir $\Delta u = u_{xx}$. Vidare kan vi låta $u = T$ för att tydligare illustrera att det handlar om värmeledning. Sammanställt får vi ekvationen

$$T_t - aT_{xx} = -\frac{a}{\lambda}C(T - T_0) \implies \frac{1}{a}T_t - T_{xx} + \frac{C}{\lambda}(T - T_0) = 0.$$

1.5

a)

Transversella svängningar beskrivs av vågekvationen: $u_{tt} - c^2\Delta u = \frac{f}{\rho}$. Eftersom det är en sträng är svängningarna endimensionella, så $u = u(x,t) \implies \Delta u = u_{xx}$. f är en drivande, yttre kraftfördelning (enhet N/m), som i detta fall är tyngdkraften, och ρ är strängens längddensitet/linjära densitet (massa per längdenhet). Eftersom tyngdkraften verkar på strängen vet vi att $f = -\rho g$ (för att den ska få rätt enhet). Detta betyder att $f/\rho = -g$, vilket ger oss ekvationen

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = -g.$$

b)

Motståendet representeras av att lägga till den negativ term i högerledet. Eftersom den ska vara proportionell mot hastigheten kan vi skriva den termen som $-au_t$, vilket ger oss ekvationen

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = -g - au_t \iff u_{tt} + au_t - c^2 u_{xx} = -g.$$

1.8

a)

Att normalderivatan är 0 på randen. Normalderivatan $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = \boldsymbol{n} \cdot \nabla u$, vilket tolkas som att den utåtriktade enhetsnormalen till området ska vara vinkelrät mot gradienten av funktionen - det sker alltså inget flöde ut ur området.

b)

Se facit. Men i stort sett handlar det om att kroppen är isolerad från omgivningen.

c)

Pilarna visar gradienten, så det är bara att leta efter alla delar av randen där pilarna är ortogonala mot den utåtriktade normalen till samma rand.

d)

Figuren visar nivåkurvor, och det gäller, vilket man givetvis kommer ihåg från flerdimensionell analys, att gradienten av en funktion är ortogonal mot nivåkurvor av samma funktion. Vi vill leta efter delar där gradienten är vinkelrät mot normalen till randen, vilket betyder att vi vill hitta nivåkurvor som pekar i samma riktning som normalen.

1.10

a)

Beteckna temperaturen med funktionen $T = T(x, y, z, t)$. Värmeledningsekvationen: $T_t - a\Delta T = \frac{a}{\lambda}k$, $\Delta T = T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}$. I detta fall är värmekällan den givna funktionen $k = Ae^{-\beta t}$, och för denna deluppgift ska sidornas temperatur vara konstant lika med omgivningens (Dirichletvillkor). Sammanställt får vi då ekvationen, med villkor,

$$\begin{cases} T_t - a\Delta T = \frac{a}{\lambda}Ae^{-\beta t}, \\ T(x, y, z, 0) = T_0, \quad T = T_0 \text{ på randen.} \end{cases}$$

b)

Vi antar att det är sidorna i z-led som totalisoleras. På grund av symmetri kommer alla z-derivator att försvinna eftersom det inte kan ske något flöde av värme i z-led. Detta betyder att vi kan beskriva temperaturen som en funktion av två rumsvariabler $T = T(x, y, t)$. Utöver detta är det samma ekvation, men $\Delta T = T_{xx} + T_{yy}$,

$$\begin{cases} T_t - a\Delta T = \frac{a}{\lambda}Ae^{-\beta t}, \\ T(x, y, 0) = T_0, \quad T = T_0 \text{ på alla sidor som inte är isolerade.} \end{cases}$$

c)

Vi antar nu att det är sidorna i y-led som totalisoleras. På samma sätt som i b) blir nu $T = T(x, t)$, och vi får

$$\begin{cases} T_t - aT_{xx} = \frac{a}{\lambda}Ae^{-\beta t}, \\ T(x, 0) = T_0, \quad T = T_0 \text{ på alla sidor som inte är isolerade.} \end{cases}$$

d)

När hela kuben är isolerad kommer temperaturen att bli rumsoberoende, $T = T(t) \implies \Delta T = 0$, vilket betyder att vi får problemet

$$\begin{cases} T_t - a\Delta T = \frac{a}{\lambda} A e^{-\beta t}, \\ T(0) = T_0 \end{cases} \implies \begin{cases} T'(t) = \frac{a}{\lambda} A e^{-\beta t}, \\ T(0) = T_0 \end{cases} \implies T(t) = T_0 + \frac{aA}{\lambda\beta}(1 - e^{-\beta t}).$$

1.11

Villkoren bestäms av värmeströmtätheten skalärt med enhetsnormalen till ytan (det beskriver hur mycket som strömmar ut genom kroppen), $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{j}$, och Fouriers lag ger att $\boldsymbol{j} = -\lambda \nabla T$. Vidare är $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{j} = -\lambda \boldsymbol{n} \cdot \nabla T = -\lambda \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{n}}$. Om vi tänker oss att den första kroppen är till vänster och den andra till höger kan vi säga att den första kroppen har sin del av begränsningsytan vid x^-, och den andra vid x^+. För den första kroppen har vi då randbeteendet $-\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{n}}$. Den andra kroppen har istället randbeteendet $-\lambda_2 \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{n}}$, där $\boldsymbol{n}_2$. Av fysikaliska skäl måste dessa randbeteenden vara lika, så vi har att

$$-\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{n}_1}(x^-, t) = -\lambda_2 \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{n}_2}(x^+, t).$$

Vi kikar sedan i boken på sida 27, och ser att $-\lambda \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{n}} = \alpha(T - T_0)$. I detta fall är T_0 temperaturen på andra sidan av begränsningsytan. Detta betyder att

$$-\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{n}}(x^-, t) = -\lambda_2 \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{n}}(x^+, t) = \alpha(T(x^-, t) - T(x^+, t)).$$

Detta blev jätteflummigt, men det kanske kan vara till viss hjälp ändå.

1.12

Säg att värmeövergångskoefficienten är α_0, vid $x = 0$, och låt även temperaturen vara T_0 där. Låt sedan temperaturen vara T_1 vid $x = L$, med värmeövergånskoefficienten α_1 där. Vi använder sambandet med Newtons avsvalningslag från sida 27 igen. Alltså gäller det att $-\lambda \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{n}}(0, t) = \alpha_0(T(0, t) - T_0)$ och $-\lambda \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{n}}(L, t) = \alpha_1(T(L, t) - T_1)$. Vi kan dessutom uttrycka dessa derivator mer explicit. Vid $x = 0$ pekar normalen åt vänster, så $\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{n}}(0, t) = -\frac{\partial T}{\partial x}(0, t)$ och $\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{n}}(L, t) = \frac{\partial T}{\partial x}(L, t)$ eftersom normalen där pekar åt höger (positiv x-riktning). Eftersom väggen är bred och hög kan vi anta att den går att beskriva med en rumsvariabel, det vill säga $T = T(x, t)$. Det sker inte heller någon värmeproduktion i väggen, så $k = 0$. Med detta blir värmeledningsekvationen $T_t - aT_{xx} = 0$. Eftersom väggen börjar vid temperaturen T_0 är det begynnelsevillkoret. Sammanställt får vi

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} - a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0, & 0 < x < L,\ t > 0, \\ \lambda \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = \alpha_0(T(0, t) - T_0), & t > 0, \\ -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(L, t) = \alpha_1(T(L, t) - T_1), & t > 0, \\ T(x, 0) = T_0, & 0 < x < L. \end{cases}$$

1.13

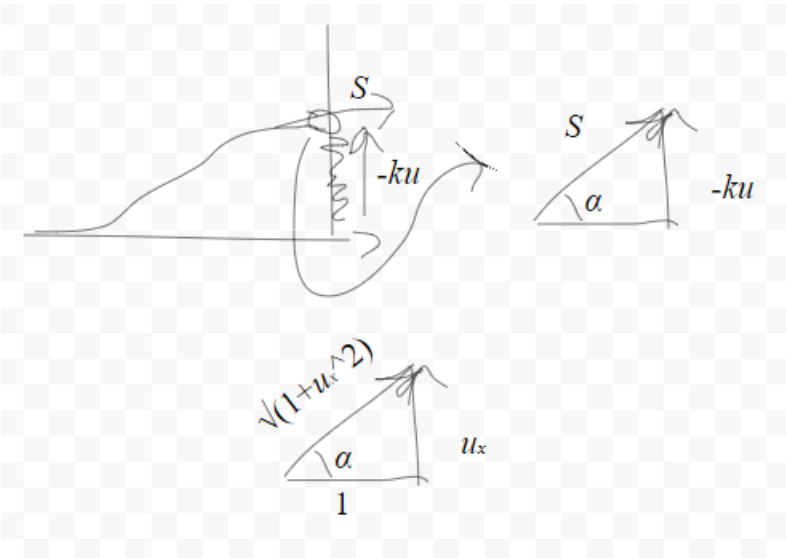
Se facit.

1.14

Eftersom strängen är fast inspänd vid $x = 0$ kan u endast ha värdet 0 där, vilket ger ett homogent Dirichletvillkor. Att en ring löper friktionsfritt är väldigt idealiserat, men man kan tänka sig att ringen tvingar strängen att vara horisontell vid $x = L$, det är alltså ett krav på att den inte lutar, vilket beskrivs av att derivatan är 0 - ett homogent Neumannvillkor. Vi har alltså att $u(0, t) = 0$ och $u_x(L, t) = 0$.

1.15

Situationen är densamma som i 1.14 vid $x = 0$.



Det som den förfärliga bilden är tänkt att illustrera är att spännkraften, S, är riktad tangentiellt med strängen, och att spännkraften är proportionell mot töjningen i strängen (Hookes lag, se sida 21 i boken), $-ku$. Med dessa två kan man bilda en triangel (den som pilen pekar på), och den triangeln är likformig med triangeln nedanför som beskriver hur om man går 1 i x-led kommer man att gå u_x i y-led. Pythagoras sats ger sedan att hypotenusan i den andra triangeln är $\sqrt{1 + u_x^2}$. Vi har alltså att

$$\sin\alpha = \frac{-ku}{S} = \frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2}} \approx u_x \implies ku + Su_x = 0.$$

Att $\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}} \approx u_x$ beror på att för små svängningar kan vi anta att $u_x^2 \approx 0$. Detta ger iallafall randvillkoren $u(0, t) = 0$ och $ku(L, t) + Su_x(L, t) = 0$.

1.18

Hookes lag ger att

$$\alpha u_x(x, 0) = F \implies [F \text{ konstant}] \implies \alpha u(x, 0) = Fx \implies u(x, 0) = \frac{Fx}{\alpha}.$$

Det är ingen integrationskonstant eftersom staven är fast inspänd. Att den är fast inspänd betyder också att vi har ett homogent Dirichletvillkor: $u(0, t) = 0$. Enligt resonemanget

på sida 33 i boken gäller det också att $u_x(L,t) = 0$. Slutligen, eftersom sträckkraften håller på tills $t = 0$ så har staven ingen begynnelsehastighet, varför $u_t(x,0) = 0$. I formelsamlingen hittar vi vågekvationen för longitudinella svängningar:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0.$$

Högerledet är 0 eftersom det är ingen yttre kraft som påverkar. Vi hittar också i formelbladet att $c^2 = \alpha/\rho_l$, och på sida 21 i boken nämns det att $\alpha = EA$.

1.21

a)

Enligt resonemanget på sida 30 i boken (exempel 1.4) är värmeströmtätheten $j(r) = \frac{q}{2\pi r}$. Detta beror på att värmemängden är konstant och på grund av rotationssymmetri måste den fördela sig lika längs en cirkel med radien r.

b)

Rotationssymmetrin i uppgiften gör att $T = T(r)$ och således att $\nabla T = T'(r)$. Fouriers lag säger att

$$j = -\lambda \nabla T \implies \frac{q}{2\pi r} = -\lambda T' \implies T(r) = A - \frac{q}{2\pi\lambda} \ln r.$$

Villkoret $T(R_0) = 0 \implies A = \frac{q}{2\pi\lambda} \ln R_0$. Alltså är

$$T(r) = \frac{q}{2\pi\lambda} \ln R_0 - \frac{q}{2\pi\lambda} \ln r = \frac{q}{2\pi\lambda} \ln \frac{R_0}{r}.$$

1.22

a)

Köttbullen är ett homogent klot, och den värms från alla riktningar, vilket betyder att sfärisk symmetri råder. Av denna anledningen kan vi säga att temperaturen endast beror på en radiell koordinat, alltså $u = u(r)$. Värmeledningsekvationen: $u_t - a\Delta u = \frac{a}{\lambda} k$, och k ges av värmetillförseln q. Vidare, eftersom det är ett stationärt tillstånd ($t \to \infty$), så är $u_t = 0$. Vi får då ekvationen $-a\Delta u = \frac{a}{\lambda} q \implies -\Delta u = \frac{q}{\lambda}$. När vi nu skriver ut Laplaceoperatorn i sfäriska koordinater sätter vi alla vinkelderivator till 0 (på grund av den sfäriska symmetrin). Vi får då ekvationen

$$-\left(\frac{1}{r}(ru)_{rr} + \frac{1}{r^2}\Lambda u\right) = [\Lambda u = 0] = -\frac{1}{r}(ru)'' = \frac{q}{\lambda}. \quad \square$$

b)

Newtons avsvalningslag (sida 27 i boken) ger att

$$-\lambda \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(R) = \alpha(u(R) - T_0).$$

Normalen till en sfär är bara en stråle som går rakt ut i radiell led, vilket betyder att normalderivatan är samma sak som derivatan i radiell led (d/dr). Detta ger oss följande villkor vid gränsytan

$$-\lambda u'(R) = \alpha(u(R) - T_0).$$

c)

Vi löser ekvationen från a).

$$-\frac{1}{r}(ru)'' = \frac{q}{\lambda} \implies (ru)'' = -\frac{q}{\lambda}r \implies (ru)' = A - \frac{q}{2\lambda}r^2 \implies$$
$$\implies ru = Ar + B - \frac{q}{6\lambda}r^3 \implies u(r) = A + \frac{B}{r} - \frac{q}{6\lambda}r^2.$$

Av fysikaliska skäl måste temperaturen i köttbullen vara begränsad, men då $r \to 0$ kommer B/r att växa obegränsat, vilket betyder att vi måste sätta $B = 0$. Vi får då den stationära temperaturfördelningen

$$u(r) = A - \frac{q}{6\lambda}r^2 \implies u'(r) = -\frac{q}{3\lambda}r.$$

Villkoret från b) ger nu att

$$-\lambda u'(R) = \alpha(u(R) - T_0) \implies -\lambda\left(-\frac{q}{3\lambda}R\right) = \alpha\left(A - \frac{q}{6\lambda}R^2 - T_0\right) \implies$$
$$\implies \frac{qR}{3\alpha} = A - \frac{q}{6\lambda}R^2 - T_0 \implies A = T_0 + \frac{qR}{3\alpha} + \frac{q}{6\lambda}R^2 \implies$$
$$\implies u(r) = T_0 + \frac{qR}{3\alpha} + \frac{q}{6\lambda}(R^2 - r^2).$$

Man ser också tydligt att temperaturen är som störst då $r = 0$, och avtar sedan.

1.23

a)

Även här råder rotationssymmetri, vilket betyder att $u = u(r)$, och därmed är Laplaceoperatorn i polära koordinater $\Delta u = \frac{1}{r}(ru_r)_r + 0 = \frac{1}{r}(ru')'$. Att vi tittar på nedböjningen innebär att vi tittar på en stationär deformation, och alltså sätter vi $u_{tt} = 0$ i vågekvationen. Vågekvationen för ett svängande membran:

$$u_{tt} - c^2\Delta u = \frac{f}{\rho} \implies \left[f = -q,\ c^2 = \frac{S}{\rho}\right] \implies -\frac{S}{\rho}\frac{1}{r}(ru')' = -\frac{q}{\rho} \implies (ru')' = \frac{q}{S}r \implies$$
$$\implies ru' = \frac{q}{2S}r^2 + A \implies u(r) = \frac{q}{4S}r^2 + A\ln r + B.$$

Av fysikaliska skäl måste u vara begränsad, med $\ln r$ är obegränsad nära 0, så $A = 0$. Vidare är membranet fast inspänt, vilket betyder att $u(1) = 0$. Vi får då ekvationen

$$\frac{q}{4S}\cdot 1^2 + B = 0 \implies B = -\frac{q}{4S} \implies u(r) = \frac{q}{4S}(r^2 - 1).$$

b)

Enda skillnaden från a) är att $f = -q(1 - r)$ nu, vilket ger oss att

$$-\frac{S}{\rho}\frac{1}{r}(ru')' = -\frac{q}{\rho}(1 - r) \implies (ru')' = \frac{q}{S}(r - r^2) \implies ru' = \frac{q}{S}\left(\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{3}r^3\right) + A \implies$$
$$\implies u(r) = \frac{q}{S}\left(\frac{1}{4}r^2 - \frac{1}{9}r^3\right) + A\ln r + B.$$

Av samma anledning som ovan måste $A = 0$ och $u(1) = 0$,

$$\frac{q}{S}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) + B = 0 \implies B = -\frac{q}{S}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) \implies u(r) = \frac{q}{S}\left(\frac{1}{4}(r^2 - 1) - \frac{1}{9}(r^3 - 1)\right).$$

1.25

Istället för att göra som boken gör vid klassificering kommer jag att använda ett annat sätt. Symbolen av en differentialoperator kan liknas vid Fouriertransformen, där alla derivator ersätts med $i\xi$. Alltså om vår differentialoperator är

$$T = \frac{\partial}{\partial x} + \sin y \frac{\partial^2}{\partial x^2} - x\frac{\partial^2}{\partial y^2} + x^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial z},$$

så kommer symbolen av T att vara

$$\sigma(x, y, z; \xi_1, \xi_2, \xi_3) = i\xi_1 + \sin y \cdot (i\xi_1)^2 - x(i\xi_2)^2 + x^2(i\xi_3)^2 - i\xi_3.$$

För att klassificera differentialoperatorer tittar man på huvudsymbolen, som är samma som symbolen, men man behåller endast derivatorna av högst ordning, så i detta fall blir huvudsymbolen

$$\sigma_0(x, y, z; \xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sin y \cdot (i\xi_1)^2 - x(i\xi_2)^2 + x^2(i\xi_3)^2.$$

Detta är en kvadratisk form och dess karaktär avgör differentialoperatorns karaktär. Om den kvadratisk formen är negativt eller positivt definit är operatorn elliptisk, om den är negativt eller positivt semidefinit är den parabolisk, och om den är indefinit är den hyperbolisk (jämför med huvudsymbolen för värmeledning/diffusionsekvationen, vågekvationen, och Laplaceoperatorn). Förhoppningsvis har er föreläsare introducerat er till detta sätt att klassificera differentialoperatorer eftersom det är mycket bättre än det boken babblar om.

I denna uppgift har vi operatorn

$$T = x\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2y\frac{\partial^2}{\partial y^2} + x\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \sin x\frac{\partial}{\partial x} + 2,$$

vilket betyder att symbolen är (om vi ersätter x-derivator med $i\xi$ och y-derivator med $i\eta$)

$$\sigma(x, y; \xi, \eta) = x(i\xi)^2 + (x + 2y)(i\eta)^2 - \sin x \cdot i\xi + 2,$$

vilket betyder att huvudsymbolen är

$$\sigma_0(x, y; \xi, \eta) = -x\xi^2 - (x + 2y)\eta^2.$$

Här ser man ganska tydligt att vi har ett antal fall som beror på $x + 2y$ och x. Om x och $x + 2y$ har samma tecken kommer huvudsymbolen att antingen vara positivt eller negativt definit, vilket betyder att operatorn är elliptisk då $x > 0$ och $x + 2y > 0$, eller $x < 0$ och $x + 2y < 0$. Om $x = 0$ och/eller $x + 2y = 0$, så kommer den kvadratiska formen att vara semidefinit, vilket betyder att operatorn är parabolisk. Slutligen, om de har olika tecken kommer operatorn att vara hyperbolisk eftersom formen är indefinit. Sammanställt har vi alltså situationen som står i facit.

1.26

$$u_{tt} - ((1-x)u_x)_x = u_{tt} - (1-x)u_{xx} + u_x = Tu,$$

där

$$T = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - (1-x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x},$$

vilket betyder att huvudsymbolen blir (t-derivator ersätts med $i\xi$ och x-derivator med $i\eta$)

$$\sigma_0(t, x; \xi, \eta) = -\xi^2 - (1-x)\eta^2.$$

Här har vi tydligt tre fall:

$$\begin{cases} 1-x > 0 \iff x > 1 \implies \sigma_0 \text{ negativt definit} \implies \text{elliptisk}, \\ 1-x = 0 \iff x = 1 \implies \sigma_0 \text{ negativt semidefinit} \implies \text{parabolisk}, \\ 1-x < 0 \iff x < 1 \implies \sigma_0 \text{ indefinit} \implies \text{hyperbolisk}. \end{cases}$$

Kapitel 3

3.2

Detta är halvperiodsutvecklingar av x. Cosinusserien motsvarar att man utvidgar x jämnt till intervallet $(-1, 1)$ och sinusserien motsvarar att man utvidgar udda till samma intervall. Koefficienterna får vi från formelsamlingen.

$$\alpha_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx,$$

$$\alpha_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{k\pi x}{L}\,dx,$$

$$\beta_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}\,dx,$$

där $f(x) = x$ och $L = 1$.

a)

$$\alpha_0 = \frac{1}{1}\int_0^1\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2},$$

$$\alpha_k = \frac{2}{1}\int_0^1 x\cos k\pi x\,dx, = [\text{partialintegration}] =$$

$$= 2\underbrace{\left[\frac{x}{k\pi}\sin k\pi x\right]_0^1}_{=0} - 2\int_0^1 \frac{1}{k\pi}\sin k\pi x\,dx = -2\left[-\frac{1}{k^2\pi^2}\cos k\pi x\right]_0^1 = \frac{2((-1)^k - 1)}{k^2\pi^2}.$$

b)

$$\beta_k = \frac{2}{1}\int_0^1 x\sin k\pi x\,dx = [\text{partialintegration}] =$$

$$= 2\left[-\frac{x}{k\pi}\cos k\pi x\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{-1}{k\pi}\cos k\pi x\,dx =$$

$$= -\frac{2}{k\pi}\cos k\pi + 2\underbrace{\left[\frac{1}{k^2\pi^2}\sin k\pi x\right]_0^1}_{=0} = \frac{2(-1)^{k+1}}{k\pi}.$$

3.3

Se anvisningen för hur funktionen ska utvidgas. När vi sedan utvecklar vår utvidgade funktion i en Fourierserie kommer alla cosinustermer att försvinna eftersom funktionen är udda. Detta betyder att, precis som anvisningen säger, funktionen kommer att ha Fourierserien

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega x,$$

där $\omega T = 2\pi$, och eftersom funktionen är 4-periodisk är $T = 4$, alltså är $\omega = \pi/2$, vilket ger Fourierserien

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{2}.$$

Ur formelsamlingen finner vi att

$$b_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin k\omega x \, dx.$$

Här är $f(x)$ den utvidgade funktionen, som är styckvis definierad:

$$f(x) = \begin{cases} -x-2, & -2 < x < -1, \\ x, & -1 < x < 1, \\ -x+2, & 1 < x < 2, \end{cases}$$

vilket betyder att

$$b_k = \frac{1}{4} \left(\int_{-2}^{-1} (-x-2) \sin \frac{k\pi x}{2} \, dx + \int_{-1}^{1} x \sin \frac{k\pi x}{2} \, dx + \int_{1}^{2} (-x+2) \sin \frac{k\pi x}{2} \, dx \right).$$

Härifrån är det en massa partialintegration som ska utföras:

$$-\int_{-2}^{-1} (x+2) \sin \frac{k\pi x}{2} \, dx = \left[\frac{2(x+2)}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{2} \right]_{-2}^{-1} - \int_{-2}^{-1} \frac{2}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{2} \, dx =$$

$$= \frac{2}{k\pi} \cos \frac{k\pi}{2} - \left[\frac{4}{k^2\pi^2} \sin \frac{k\pi x}{2} \right]_{-2}^{-1} = \frac{2}{k\pi} \cos \frac{k\pi}{2} + \frac{4}{k^2\pi^2} \sin \frac{k\pi}{2},$$

$$\int_{-1}^{1} x \sin \frac{k\pi x}{2} \, dx = \left[-\frac{2x}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{2} \right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} \frac{2}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{2} \, dx =$$

$$= -\frac{4}{k\pi} \cos \frac{k\pi}{2} + \left[\frac{4}{k^2\pi^2} \sin \frac{k\pi x}{2} \right]_{-1}^{1} = -\frac{4}{k\pi} \cos \frac{k\pi}{2},$$

$$-\int_{1}^{2} (x-2) \sin \frac{k\pi x}{2} \, dx = \left[\frac{2(x-2)}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{2} \right]_{1}^{2} - \int_{1}^{2} \frac{2}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{2} \, dx =$$

$$= \frac{2}{k\pi} \cos \frac{k\pi}{2} - \left[\frac{4}{k^2\pi^2} \sin \frac{k\pi x}{2} \right]_{1}^{2} = \frac{2}{k\pi} \cos \frac{k\pi}{2} + \frac{4}{k^2\pi^2} \sin \frac{k\pi}{2} \implies$$

$$\implies \frac{1}{4} \left(-\int_{-2}^{-1} (x+2) \sin \frac{k\pi x}{2} \, dx + \int_{-1}^{1} x \sin \frac{k\pi x}{2} \, dx - \int_{1}^{2} (x-2) \sin \frac{k\pi x}{2} \, dx \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{2}{k\pi} \cos \frac{k\pi}{2} + \frac{4}{k^2\pi^2} \sin \frac{k\pi}{2} - \frac{4}{k\pi} \cos \frac{k\pi}{2} + \frac{2}{k\pi} \cos \frac{k\pi}{2} + \frac{4}{k^2\pi^2} \sin \frac{k\pi}{2} \right) =$$

$$= \frac{2}{k^2\pi^2} \sin \frac{k\pi}{2} = b_k.$$

Vi ser att när k är jämnt är $b_k = 0$, alltså kan vi ersätta alla k med $2k+1$ utan att ändra informationen som förmedlas (om vi låter k börja från 0 istället för 1). Alltså är

$$b_k = \frac{2}{(2k+1)^2\pi^2} \sin \frac{(2k+1)\pi}{2} = \frac{2}{(2k+1)^2\pi^2} \sin \left(\pi(k + \frac{1}{2})\right) =$$

$$= \left[\sin\left(\pi(k+\frac{1}{2})\right) = (-1)^k\right] = \frac{2(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2}.$$

För att ta reda på γ_k tänker vi lite och kommer till insikt att vi bör bara kunna titta på intervallet $(0,1)$ för den Fourierserie vi har ovan, men vi måste också ta hänsyn till att funktionen vi är intresserad av är bara definierad på ett intervall med längd 1 - inte 4 - och av denna anledning kommer vi fram till att

$$\gamma_k = 4b_k = \frac{8(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2} = \frac{2(-1)^k}{(k+\frac{1}{2})^2\pi^2}.$$

När man har gjort kapitel H kan man ta fram γ_k mycket snabbare genom att bara projicera x på den ortogonala basen $\{\sin(\pi(k+\frac{1}{2})x)\}_{k=0}^{\infty}$ med projektionsformeln.

$$\gamma_k = \frac{(\sin(\pi(k+\frac{1}{2})x) \mid x)}{(\sin(\pi(k+\frac{1}{2})x) \mid \sin(\pi(k+\frac{1}{2})x))}.$$

3.5

Vi noterar att problemet har homogena Dirichletvillkor, och därför ansätter vi en lösning i form av en sinusserie:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\sin k\pi x,$$

insättning och derivering ger

$$0 = u_t - u_{xx} = \sum_{k=1}^{\infty}(u_k'(t) + k^2\pi^2 u_k(t))\sin k\pi x \implies [\text{entydighet}] \implies$$

$$\implies u_k'(t) + k^2\pi^2 u_k(t) = 0 \implies u_k(t) = c_k e^{-k^2\pi^2 t}.$$

Vi har att

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-k^2\pi^2 t}\sin k\pi x \implies u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin k\pi x = \sin \pi x + 2\sin 3\pi x \implies$$

$$\implies \begin{cases} c_1 = 1, \\ c_3 = 2, \\ c_k = 0, \ k \neq 1,3 \end{cases} \implies$$

$$\implies u(x,t) = e^{-\pi^2 t}\sin \pi x + 2e^{-9\pi^2 t}\sin 3\pi x.$$

Se facit för tolkning.

3.6

Vi har återigen homogena Dirichletvillkor (dock har vi en annan längd, så argumentet i sin blir annorlunda), varför vi ansätter lösningen

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\sin kx,$$

insättning i PDE:n:

$$0 = u_{tt} - u_{xx} = \sum_{k=1}^{\infty} (u_k''(t) + k^2 u_k(t)) \sin kx \implies [\text{entydighet}] \implies$$

$$\implies u_k''(t) + k^2 u_k(t) = 0 \implies u_k(t) = a_k \cos kt + b_k \sin kt.$$

Alltså är

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \sin kx \implies$$

$$\implies u_t(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-ka_k \sin kt + kb_k \cos kt) \sin kx \implies$$

$$\implies \begin{cases} u(x,0) = 3/10 \sin x, \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx = 3/10 \sin x, \\ \sum_{k=1}^{\infty} kb_k \sin kx = 0 \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{cases} a_1 = 3/10, \\ a_k = b_k = 0, \text{ annars} \end{cases} \implies$$

$$\implies u(x,t) = \frac{3}{10} \cos t \sin x.$$

Se facit för tolkning.

3.7

Lösning finns redan.

3.8

a)

I denna deluppgift är det homogena Dirichletvillkor, vilket betyder att vi ansätter en sinusserie som vår lösning:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin k\pi x,$$

insättning ger att

$$0 = u_t - u_{xx} = \sum_{k=1}^{\infty} (u_k'(t) + k^2\pi^2 u_k(t)) \sin k\pi x \implies [\text{entydighet}] \implies$$

$$\implies u_k'(t) + k^2\pi^2 u_k(t) = 0 \implies u_k(t) = c_k e^{-k^2\pi^2 t}.$$

Vi har nu att

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-k^2\pi^2 t} \sin k\pi x \implies u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin k\pi x = x.$$

Koefficienterna bestäms genom att utveckla x i en sinusserie:

$$c_k = \frac{2}{1}\int_0^1 x \sin k\pi x \, dx = [\text{partialintegration}] =$$

$$= 2\left[-\frac{x}{k\pi}\cos k\pi x\right]_0^1 - 2\int_0^1 -\frac{1}{k\pi}\cos k\pi x \, dx =$$

$$= -\frac{2}{k\pi}\cos k\pi + 2\underbrace{\left[\frac{1}{k^2\pi^2}\sin k\pi x\right]_0^1}_{=0} = \frac{2(-1)^{k+1}}{k\pi} \implies$$

$$\implies u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k\pi} e^{-k^2\pi^2 t}\sin k\pi x.$$

Se facit för tolkning.

b)

Nu är det istället homogena Neumannvillkor, och därför ansätter vi en cosinusserie:

$$u(x,t) = u_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\cos k\pi x.$$

När vi stoppar in detta i PDE:n får vi

$$0 = u_t - u_{xx} = u_0'(t) + \sum_{k=1}^{\infty}(u_k'(t) + k^2\pi^2 u_k(t))\cos k\pi x \implies [\text{entydighet}] \implies$$

$$\implies \begin{cases} u_0'(t) = 0, \\ u_k'(t) + k^2\pi^2 u_k(t) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} u_0(t) = c_0, \\ u_k = c_k e^{-k^2\pi^2 t}. \end{cases}$$

Vår lösning tar då formen

$$u(x,t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-k^2\pi^2 t}\cos k\pi x \implies u(x,0) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin k\pi x = x.$$

Det som står mellan oss och ett svar är en cosinusserieutveckling av x:

$$c_0 = \frac{1}{1}\int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2},$$

$$c_k = \frac{2}{1}\int_0^1 x\cos k\pi x \, dx = [\text{partialintegration}] =$$

$$= 2\underbrace{\left[\frac{x}{k\pi}\sin k\pi x\right]_0^1}_{=0} - 2\int_0^1 \frac{1}{k\pi}\sin k\pi x \, dx =$$

$$= -2\left[-\frac{1}{k^2\pi^2}\cos k\pi x\right]_0^1 = \frac{2(\cos k\pi - \cos 0)}{k^2\pi^2} = \frac{2((-1)^k - 1)}{k^2\pi^2} \implies$$

$$\implies u(x,t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2((-1)^k - 1)}{k^2\pi^2} e^{-k^2\pi^2 t} \cos k\pi x.$$

Om man vill kan man notera att $c_k = 0$ då k är jämnt, så om vi ersätter k med $2n+1$, där n går från 0 till ∞ kommer vi fortfarande att ha samma lösning, men uttryckt annorlunda:

$$u(x,t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2((-1)^{2n+1} - 1)}{(2n+1)^2\pi^2} e^{-(2n+1)^2\pi^2 t} \cos((2n+1)\pi x) =$$

$$= \frac{1}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)^2\pi^2} e^{-(2n+1)^2\pi^2 t} \cos((2n+1)\pi x).$$

Se facit för tolkning.

3.10

I y-led verkar inte så lätt att utveckla något i, men när vi riktar blicken lite nedåt ser vi att det är homogena Dirichletvillkor i x-led, vilket betyder att vi, med framgång, kan ansätta

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(y) \sin k\pi x \implies$$

$$\implies 0 = u_{xx} + u_{yy} = \sum_{k=1}^{\infty} (-k^2\pi^2 u_k(y) + u_k''(y)) \sin k\pi x \implies \text{[entydighet]} \implies$$

$$\implies u_k''(y) - k^2\pi^2 u_k(y) = 0 \implies u_k(y) = c_k e^{k\pi y} + d_k e^{-k\pi y} = a_k \cosh k\pi y + b_k \sinh k\pi y,$$

det är fördelaktigt att använda hyperboliska funktioner eftersom $\sinh 0 = 0$ och $\cosh 0 = 1$. Vår lösningen är nu

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cosh k\pi y + b_k \sinh k\pi y) \sin k\pi x \implies$$

$$\implies u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin k\pi x = 2\sin \pi x \implies \begin{cases} a_1 = 2, \\ a_k = 0, \ k \neq 1 \end{cases} \implies$$

$$\implies u(x,y) = 2\cosh \pi y \sin x + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sinh k\pi y \sin k\pi x \implies$$

$$\implies u(x,1) = 2\cosh \pi \sin x + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sinh k\pi \sin k\pi x = -\sin 2\pi x \implies$$

$$\implies \begin{cases} 2\cosh \pi + b_1 \sinh \pi = 0, \\ b_2 \sinh 2\pi = -1, \\ b_k = 0, \ k \neq 1, 2 \end{cases} \implies \begin{cases} b_1 = -\frac{2\cosh \pi}{\sinh \pi}, \\ b_2 = -\frac{1}{\sinh 2\pi}, \\ b_k = 0, \ k \neq 1, 2 \end{cases} \implies$$

$$\implies u(x,y) = 2\cosh \pi y \sin x - \frac{2\cosh \pi}{\sinh \pi} \sinh \pi y \sin \pi x - \frac{1}{\sinh 2\pi} \sinh 2\pi y \sin 2\pi x =$$

$$= 2\left(\cosh \pi y - \frac{\cosh \pi}{\sinh \pi} \sinh \pi y\right) \sin \pi x - \frac{\sinh 2\pi y}{\sinh 2\pi} \sin 2\pi x.$$

Se facit för tolkning.

3.11

Vi noterar att detta problem har homogena Neumannvillkor i x-led, vilket motiverar ansatsen

$$u(x,y) = u_0(y) + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(y)\cos kx \implies$$

$$\implies 0 = u_{xx} + u_{yy} = u_0''(y) + \sum_{k=1}^{\infty}(-k^2 u_k(y) + u_k''(y))\cos kx \implies \text{[entydighet]} \implies$$

$$\implies \begin{cases} u_0''(y) = 0, \\ u_k''(y) - k^2 u_k(y) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} u_0(y) = a_0 + b_0 y, \\ u_k(y) = a_k \cosh ky + b_k \sinh ky \end{cases} \implies$$

$$\implies u(x,y) = a_0 + b_0 y + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cosh ky + b_k \sinh ky)\cos kx \implies$$

$$\implies u(x,0) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx = \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \implies \begin{cases} a_0 = a_2 = 1/2, \\ a_k = 0,\ k \neq 0,2 \end{cases} \implies$$

$$\implies u(x,y) = \frac{1}{2} + b_0 y + \frac{1}{2}\cosh 2y \cos 2x + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sinh ky \cos kx \implies$$

$$\implies u(x,\pi) = \frac{1}{2} + \pi b_0 + \frac{1}{2}\cosh 2\pi \cos 2x + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sinh k\pi \cos kx = \cos 2x \implies$$

$$\implies \begin{cases} \frac{1}{2} + \pi b_0 = 0, \\ \frac{1}{2}\cosh 2\pi + b_2 \sinh 2\pi = 1, \\ b_k = 0,\ k \neq 0,2 \end{cases} \implies \begin{cases} b_0 = -\frac{1}{2\pi}, \\ b_2 = \frac{2-\cosh 2\pi}{2\sinh 2\pi}, \\ b_k = 0,\ k \neq 0,2 \end{cases} \implies$$

$$\implies u(x,y) = \frac{1}{2} - \frac{y}{2\pi} + \left(\frac{1}{2}\cosh 2y + \frac{2-\cosh 2\pi}{2\sinh 2\pi}\sinh 2y\right)\cos 2x$$

Se facit för tolkning.

3.12

Vi bryr oss inte om den partiella tidsderivatan, utan tittar istället på randvillkor, vilka vi ser är homogena Dirichletvillkor, så vi testar att ansätta en lösning på formen:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\sin k\pi x \implies$$

$$\implies 0 = u_{tt} + 2u_t - u_{xx} = \sum_{k=1}^{\infty}(u_k''(t) + 2u_k'(t) + k^2\pi^2 u_k(t))\sin k\pi x \implies \text{[entydighet]} \implies$$

$$\implies u_k''(t) + 2u_k'(t) + k^2\pi^2 u_k(t) = 0 \implies$$

$$\implies \text{karakteristiska ekvationen: } r^2 + 2r + k^2\pi^2 = 0 \implies r = -1 \pm \underbrace{\sqrt{1-k^2\pi^2}}_{<0,\ k\geq 1} =$$

$$= -1 \pm i\sqrt{k^2\pi^2} = -1 \pm i\omega_k \implies u_k(t) = e^{-t}(a_k \cos\omega_k t + b_k \sin\omega_k t) \implies$$

$$\implies u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-t}(a_k \cos\omega_k t + b_k \sin\omega_k t)\sin k\pi x \implies$$

$$\implies u_t(x,t) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(-e^{-t}(a_k \cos\omega_k t + b_k \sin\omega_k t) + e^{-t}(-\omega_k a_k \sin\omega_k t + \omega_k b_k \cos\omega_k t)\right)\sin k\pi x =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-t}\left((-a_k + \omega_k b_k)\cos\omega_k t + (-\omega_k a_k - b_k)\sin\omega_k t\right)\sin k\pi x \implies$$

$$\implies u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty}(-a_k + \omega_k b_k)\sin k\pi x = 0 \implies [\text{entydighet}] \implies b_k = \frac{a_k}{\omega_k},$$

och det andra begynnelsevillkoret ger att

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin k\pi x = 1,$$

vilket betyder att vi behöver utveckla funktionen 1 i en sinusserie. Detta görs med halvperiodsutecklingsformlerna:

$$a_k = \frac{2}{1}\int_0^1 1 \cdot \sin k\pi x\, dx = 2\left[-\frac{1}{k\pi}\cos k\pi x\right]_0^1 = -\frac{2}{k\pi}(\cos k\pi - \cos 0) =$$

$$= \frac{2(1-(-1)^k)}{k\pi} \implies b_k = \frac{2(1-(-1)^k)}{k\pi\omega_k}.$$

Det gäller också här att $a_k = 0$ om k är jämnt (och för b_k), vilket betyder att vi kan ersätta k med $2k+1$ i serien, och låta det nya k:et gå från 0 till ∞, vilket ger oss samma svar:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-t}(\cos\omega_k t + \frac{1}{\omega_k}\sin\omega_k t)\frac{2(1-(-1)^k)}{k\pi}\sin k\pi x =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-t}(\cos\omega_{2k+1} t + \frac{1}{\omega_{2k+1}}\sin\omega_{2k+1} t)\frac{4}{(2k+1)\pi}\sin((2k+1)\pi x),$$

där $\omega_k = \sqrt{k^2\pi^2 - 1}$. Se facit för tolkning.

3.13

Vår metod med att ansätta en lösning fungerar endast om vi har homogena randvillkor, så vi försöker hitta en hjälpfunktion som homogeniserar randvillkoren. Denna uppgift är tacksam eftersom den inhomogena delen har inget tidsberoende, så vi kan söka en endimensionell stationär lösning, $\tilde{u}(x)$. Denna stationära lösning ska uppfylla att $\tilde{u}(0) = 0$ och $\tilde{u}(1) = 1$. Om möjligt (vilket det är i detta fall) ska den också uppfylla att $\tilde{u}''(x) = 0$ eftersom då förblir PDE:n homogen.

$$\tilde{u}''(x) = 0 \implies \tilde{u}(x) = ax + b \implies [\tilde{u}(0) = 0,\ \tilde{u}(1) = 1] \implies a = 1,\ b = 0.$$

Vi bildar nu den nya funktionen

$$v(x,t) = u(x,t) - \tilde{u}(x).$$

Det gäller då att $v_t - v_{xx} = 0$, $v(0,t) = v(1,t) = 0$, och $v(x,0) = u(x,0) - \tilde{u}(x) = 0 - x = -x$. Alltså har vi det nya problemet

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = 0, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ v(0,t) = v(1,t) = 0, & t > 0, \\ v(x,0) = -x, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Homogena Dirichletvillkor motiverar ansatsen

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) \sin k\pi x \implies$$

$$0 = v_t - v_{xx} = \sum_{k=1}^{\infty} (v_k'(t) + k^2\pi^2 v_k(t)) \sin k\pi x \implies \text{[entydighet]} \implies$$

$$\implies v_k'(t) + k^2\pi^2 v_k(t) = 0 \implies v_k(t) = c_k e^{-k^2\pi^2 t} \implies$$

$$\implies v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-k^2\pi^2 t} \sin k\pi x \implies v(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin k\pi x = -x \implies$$

$$\implies c_k = \frac{2}{1} \int_0^1 -x \sin k\pi x \, dx = \text{[partialintegration]} =$$

$$= 2 \left[\frac{x}{k\pi} \cos k\pi x \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{1}{k\pi} \cos k\pi x \, dx =$$

$$= \frac{2}{k\pi} \cos k\pi - 2 \underbrace{\left[\frac{1}{k^2\pi^2} \sin k\pi x \right]_0^1}_{=0} = \frac{2(-1)^k}{k\pi} \implies$$

$$\implies v(x,t) = u(x,t) - \tilde{u}(x) = u(x,t) - x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{k\pi} e^{-k^2\pi^2 t} \sin k\pi x \implies$$

$$\implies u(x,t) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{k\pi} e^{-k^2\pi^2 t} \sin k\pi x.$$

Då $t \to \infty$ kommer exponentialtermerna att försvinna, och alltså går hela serien mot 0, vilket lämnar den stationära lösningen x (rimligt eftersom vi började med att ta fram en stationär lösning). Se facit för tolkning.

3.14

Lösning finns redan.

3.17

Vi börjar med att homogensiera problemet. Låt

$$v(x,t) = u(x,t) - \tilde{u}(x) \implies$$

$$\implies v_t - v_{xx} = 0 \implies (u-\tilde{u})_t - (u-\tilde{u})_{xx} = u_t - 0 - u_{xx} + \tilde{u}'' =$$

$$= u_t - u_{xx} + \tilde{u}'' = 2 + \tilde{u}'' = 0 \implies \tilde{u}(x) = -x^2 + ax + b \implies \tilde{u}'(x) = -2x + a.$$

Vi vill också att

$$\begin{cases} v_x(0,t) = 0, \\ v_x(1,t) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} u_x(0,t) - \tilde{u}'(0) = 0 - \tilde{u}'(0) = -a = 0, \\ u_x(1,t) - \tilde{u}(1) = -2 - (-2\cdot 1 + a) = -a = 0, \end{cases}$$

alltså uppfyller v det homogena problemet om $a = 0$. Eftersom b är fritt kan vi lika gärna välja $b = 0$. Vi betraktar nu problemet för $v(x,t) = u(x,t) + x^2$, som har begynnelsevillkoret $v(x,0) = u(x,0) + x^2 = x^2$. Problemet är alltså

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = 0, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ v_x(0,t) = v_x(1,t) = 0,\ t > 0, & \\ v(x,0) = x^2, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Homogena Neumannvillkor:

$$v(x,t) = v_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) \cos k\pi x \implies$$

$$\implies 0 = v_t - v_{xx} = v_0'(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (v_k'(t) + k^2\pi^2 v_k(t)) \cos k\pi x \implies \text{[entydighet]} \implies$$

$$\implies \begin{cases} v_0'(t) = 0, \\ v_k'(t) + k^2\pi^2 v_k(t) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} v_0(t) = c_0, \\ v_k(t) = c_k e^{-k^2\pi^2 t} \end{cases} \implies$$

$$\implies v(x,t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-k^2\pi^2 t} \cos k\pi x \implies v(x,0) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos k\pi x = x^2.$$

Vi får nu Fourierkoefficienterna genom att halvperiodsutveckla x^2 i en cosinusserie:

$$c_0 = \frac{1}{1}\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3},$$

$$c_k = \frac{2}{1}\int_0^1 x^2 \cos k\pi x\,dx = \text{[partialintegration]} =$$

$$= 2\underbrace{\left[\frac{x^2}{k\pi}\sin k\pi x\right]_0^1}_{=0} - 2\int_0^1 \frac{2x}{k\pi}\sin k\pi x\,dx = \text{[partialintegration]} =$$

$$= -2\left[-\frac{2x}{k^2\pi^2}\cos k\pi x\right]_0^1 + 2\int_0^1 -\frac{2}{k^2\pi^2}\cos k\pi x\,dx =$$

$$= \frac{4(\cos k\pi - 0)}{k^2\pi^2} - 4\underbrace{\left[\frac{1}{k^3\pi^3}\sin k\pi x\right]_0^1}_{=0} = \frac{4(-1)^k}{k^2\pi^2} \implies$$

$$\implies v(x,t) = u(x,t) + x^2 = \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2\pi^2} e^{-k^2\pi^2 t}\cos k\pi x \implies$$

$$\implies u(x,t) = -x^2 + \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2\pi^2} e^{-k^2\pi^2 t}\cos k\pi x.$$

Se facit för tolkning.

3.18

Vi vill korrigera u med en funktion som är 0 då $x = 0$ och e^{-t} då $x = 1$. En enkel sådan är $\tilde{u}(x,t) = xe^{-t}$. Om vi nu bildar funktionen $v = u - \tilde{u}$ kommer randvillkoren att homogeniseras, dock plockar vi upp en inhomogen del i PDE:n och begynnelsevillkoret.

$$v_t - v_{xx} = (u - xe^{-t})_t - (u - xe^{-t})_{xx} = u_t + xe^{-t} - u_{xx} + 0 = \underbrace{u_t - u_{xx}}_{=0} + xe^{-t} = xe^{-t}.$$

Begynnelsevillkoret blir

$$v(x,0) = u(x,0) - xe^{-0} = 0 - x = -x.$$

Med allt detta får vi problemet

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = xe^{-t}, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ v(0,t) = v(1,t) = 0, & t > 0, \\ v(x,0) = -x, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Se facit för hur man löser problemet.

3.19

Eftersom problemet är linjärt kan vi dela upp det i två delproblem och sedan använda superposition för att få hela lösningen.

$$\begin{cases} (u_A)_{xx} + (u_A)_{yy} = 0, & 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi, \\ u_A(x,0) = \sin x,\ u_A(x,\pi) = 0, & 0 < x < \pi, \\ u_A(0,y) = u_A(\pi,y) = 0, & 0 < y < \pi, \end{cases}$$

och

$$\begin{cases} (u_B)_{xx} + (u_B)_{yy} = 0, & 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi, \\ u_B(x,0) = u_B(x,\pi) = 0, & 0 < x < \pi, \\ u_B(0,y) = \sin y,\ u_B(\pi,y) = 0, & 0 < y < \pi. \end{cases}$$

Vi får sedan hela lösningen av att $u = u_A + u_B$. Av symmetriskäl kommer det också gälla att $u_A(x,y) = u_B(x,y)$, så vi behöver bara lösa det ena problemet. För delproblem A har vi homogena Dirichletvillkor, så vi ansätter en sinusserie:

$$u_A(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(y)\sin kx \implies$$

$$\implies 0 = (u_A)_{xx} + (u_A)_{yy} = \sum_{k=1}^{\infty}(-k^2 u_k(y) + u_k''(y))\sin kx \implies \text{[entydighet]} \implies$$

$$\implies u_k''(y) - k^2 u_k(y) = 0 \implies u_k(y) = a_k \cosh ky + b_k \sinh ky \implies$$

$$\implies u_A(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cosh ky + b_k \sinh ky)\sin kx \implies$$

$$\implies u_A(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx = \sin x \implies \begin{cases} a_1 = 1, \\ a_k = 0, \ k \neq 1 \end{cases} \implies$$

$$\implies u_A(x,y) = \cosh y \sin x + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sinh ky \sin kx \implies$$

$$\implies u_A(x,\pi) = \cosh \pi \sin x + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sinh k\pi \sin kx = 0 \implies$$

$$\implies \begin{cases} \cosh \pi + b_1 \sinh \pi = 0, \\ b_k \sinh k\pi = 0, \ k \neq 1 \end{cases} \implies \begin{cases} b_1 = -\frac{\cosh \pi}{\sinh \pi}, \\ b_k = 0, \ k \neq 1 \end{cases} \implies$$

$$\implies u_A(x,y) = \left(\cosh y - \frac{\cosh \pi}{\sinh \pi}\sinh y\right)\sin x.$$

På grund av symmetrin som nämndes ovan kan vi direkt säga att

$$u_B(x,y) = u_A(y,x) = \left(\cosh x - \frac{\cosh \pi}{\sinh \pi}\sinh x\right)\sin y,$$

vilket betyder att vår lösning tar formen

$$u = u_A + u_B = \left(\cosh y - \frac{\cosh \pi}{\sinh \pi}\sinh y\right)\sin x + \left(\cosh x - \frac{\cosh \pi}{\sinh \pi}\sinh x\right)\sin y.$$

Se facit för tolkning.

3.20

a)

För att vissa likheten räcker det med att visa att $u = u_A - xy(1-x)$ uppfyller att

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u(x,0) = 0, \ u(x,1) = x(x-1), \\ u(0,y) = u(1,y) = 0, \end{cases}$$

där u_A uppfyller

$$\begin{cases} \Delta u = -2y, \\ u(x,0) = u(x,1) = 0, \\ u(0,y) = u(1,y) = 0. \end{cases}$$

$$u(0,y) = u_A(0,y) - 0 \cdot y(1-0) = 0,$$

$$u_A(1,y) = u_A(1,y) - 1\cdot y(1-1) = 0,$$
$$u(x,0) = u_A(x,0) - x\cdot 0\cdot(1-x) = 0,$$
$$u(x,1) = u_A(x,1) - x\cdot 1\cdot(1-x) = 0 - x(1-x) = x(x-1),$$
$$\Delta u = \Delta(u_A - xy(1-x)) = \Delta u_A - \Delta(xy(1-x)) = -2y - ((xy(1-x))_{xx} + (xy(1-x))_{yy}),$$

och

$$xy(1-x) = xy - x^2y \implies (xy(1-x))_{xx} = 0 - 2y \text{ samt } (xy(1-x))_{yy} = 0 \implies$$
$$\implies -2y - ((xy(1-x))_{xx} + (xy(1-x))_{yy}) = -2y - (-2y+0) = 0.$$

Alla villkor är därmed uppfyllda och det gäller att $u_A - xy(1-x) = u_B$. □

b)

Trots att vi lade ner en massa arbete på a), är det nog lättast att bara lösa B-problemet direkt. Vi har homogena Dirichletvillkor i x-led, vilket motiverar ansatsen

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(y)\sin k\pi x \implies$$

$$\implies 0 = \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = \sum_{k=1}^{\infty}(-k^2\pi^2 u_k(y) + u_k''(y))\sin k\pi x \implies \text{[entydighet]} \implies$$

$$\implies u_k''(y) - k^2\pi^2 u_k(y) = 0 \implies u_k(y) = a_k\cosh k\pi y + b_k \sinh k\pi y \implies$$

$$\implies u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cosh k\pi y + b_k\sinh k\pi y)\sin k\pi x \implies$$

$$\implies u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin k\pi x = 0 \implies a_{k=0} \implies$$

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sinh k\pi y \sin k\pi x \implies u(x,1) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sinh k\pi \sin k\pi x = x(x-1).$$

Alltså behöver vi bara utveckla $x(x-1) = x^2 - x$ i en sinusserie för att få fram svaret:

$$b_k \sinh k\pi = \frac{2}{1}\int_0^1 (x^2 - x)\sin k\pi x\,dx = \text{[partialintegration]} =$$

$$= 2\underbrace{\left[-\frac{x^2-x}{k\pi}\cos k\pi x\right]_0^1}_{=0} - 2\int_0^1 -\frac{2x-1}{k\pi}\cos k\pi x\,dx = \text{[partialintegration]} =$$

$$= 2\underbrace{\left[\frac{2x-1}{k^2\pi^2}\sin k\pi x\right]_0^1}_{=0} - 2\int_0^1 \frac{2}{k^2\pi^2}\sin k\pi x\,dx = -4\left[-\frac{1}{k^3\pi^3}\cos k\pi x\right]_0^1 =$$

$$= \frac{4(\cos k\pi - \cos 0)}{k^3\pi^3} = \frac{4((-1)^k - 1)}{k^3\pi^3} \implies b_k = \frac{4((-1)^k-1)}{k^3\pi^3\sinh k\pi} \implies$$

$$\implies u_B(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4((-1)^k-1)}{k^3\pi^3}\frac{\sinh k\pi y}{\sinh k\pi}\sin k\pi x.$$

3.21

Fram till tiden $t = 0$ har staven nått en stationär temperaturfördelning, $\tilde{u}(x)$ som uppfyller den stationära värmeldeningsproblemet

$$\begin{cases} -\tilde{u}'' = 0, \\ \tilde{u}(0) = T_1,\ \tilde{u}(L) = T_0 \end{cases} \implies \tilde{u}(x) = ax + b \implies [\tilde{u}(0) = T_1,\ \tilde{u}(L) = T_0] \implies$$

$$\implies b = T_1,\ a = \frac{(T_0 - T_1)}{L}.$$

Vi har nu bestämt begynnelsetemperaturen för staven och behöver nu ställa upp hela problemet. Det handlar (uppenbarligen) om värmeledning, så vi vänder oss till värmeledningsekvationen, och eftersom det är en stav har vi bara en rumsvariabel ($u = u(x,t)$). För $t > 0$ hålls båda ändarna av staven vid temperaturen T_0, vilket representeras av Dirichletvillkoren $u(0,t) = u(L,t) = T_0$. Staven är isolerad och det sker ingen produktion, så högerledet i PDE:n är 0. Detta ger oss nu problemet

$$\begin{cases} u_t - au_{xx} = 0, & 0 < x < L,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) = T_0, & t > 0, \\ u(x,0) = \frac{T_0 - T_1}{L}x + T_1, & 0 < x < L. \end{cases}$$

För att lösa detta problem börjar vi med att homogenisera randvillkoren genom att införa en linjär (så att $\partial^2/\partial x^2$ av funktionen är 0), stationär funktion som uppfyller att den är T_0 när $x = 0$ och när $x = L$. En sådan är den konstanta funktionen T_0. Bilda nu

$$v(x,t) = u(x,t) - T_0 \implies v(0,t) = v(L,t) = 0,$$

och

$$v(x,0) = \frac{T_0 - T_1}{L}x + T_1 - T_0 = (T_0 - T_1)\frac{x - L}{L}.$$

$$\begin{cases} v_t - av_{xx} = 0, & 0 < x < L,\ t > 0, \\ v(0,t) = v(L,t) = 0, & t > 0, \\ v(x,0) = (T_0 - T_1)\frac{x-L}{L}, & 0 < x < L. \end{cases}$$

Homogena Dirichletvillkor:

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) \sin\frac{k\pi x}{L} \implies$$

$$\implies 0 = v_t - av_{xx} = \sum_{k=1}^{\infty}(v_k'(t) + a\frac{k^2\pi^2}{L^2}v_k(t)) \sin\frac{k\pi x}{L} \implies [\text{entydighet}] \implies$$

$$\implies v_k'(t) + a\frac{k^2\pi^2}{L^2}v_k(t) = 0 \implies v_k(t) = c_k e^{-ak^2\pi^2 t/L^2} \implies$$

$$\implies v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-ak^2\pi^2 t/L^2} \sin\frac{k\pi x}{L} \implies$$

$$\implies v(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\frac{k\pi x}{L} = (T_0 - T_1)\frac{x - L}{L} \implies$$

$$\implies c_k = \frac{2}{L}\int_0^L (T_0 - T_1)\frac{x-L}{L}\sin\frac{k\pi x}{L}\,dx = [\text{partialintegration}] =$$

$$= \frac{2(T_0-T_1)}{L}\left[-\frac{x-L}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{L}\right]_0^L - \frac{2(T_0-T_1)}{L}\int_0^L -\frac{1}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{L}\,dx =$$

$$= \frac{2(T_1-T_0)}{L}(0 - \frac{-L}{k\pi}\cos 0) + \frac{2(T_0-T_1)}{L}\underbrace{\left[\frac{L}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi x}{L}\right]_0^L}_{=0} = \frac{2(T_1-T_0)}{k\pi} \implies$$

$$\implies v(x,t) = u(x,t) - T_0 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(T_1-T_0)}{k\pi}e^{-ak^2\pi^2t/L^2}\sin\frac{k\pi x}{L} \implies$$

$$\implies u(x,t) = T_0 + (T_1-T_0)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k\pi}e^{-ak^2\pi^2t/L^2}\sin\frac{k\pi x}{L}.$$

3.22

Man måste typ veta att värmemängden, per tids- och volymsenhet som utvecklas i tråden är $k = q/A$, där A är trådens tvärsnittsarea. Insättning i värmeledningsekvationen, med homogena Dirichletvillkor (eftersom ändarna hålls vid temperaturen 0) och begynnelsetemperaturen 0, ger problemet

$$\begin{cases} u_t - au_{xx} = \frac{aq}{\lambda A} = ac, & 0 < x < L,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < L. \end{cases}$$

Vi homogeniserar högerledet genom att hitta en funktion som uppfyller att

$$\begin{cases} -a\tilde{u}''(x) = ac \implies \tilde{u}(x) = -\frac{1}{2}cx^2 + dx + b, \\ \tilde{u}(0) = 0 \implies b = 0, \\ \tilde{u}(L) = 0 \implies -\frac{1}{2}cL^2 + dL = 0 \implies d = \frac{c}{2}L. \end{cases}$$

Om vi nu sätter $v(x,t) = u(x,t) - \tilde{u}(x)$, får vi problemet

$$\begin{cases} v_t - av_{xx} = 0, & 0 < x < L,\ t > 0, \\ v(0,t) = v(L,t) = 0, & t > 0, \\ v(x,0) = 0 - \frac{c}{2}(-x^2 + Lx) = \frac{c}{2}(x^2 - Lx), & 0 < x < L. \end{cases}$$

Randvillkoren talar för en sinusserie som vår lösning, varför

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t)\sin\frac{k\pi x}{L} \implies [\text{samma steg som ovan i 3.21}] \implies$$

$$\implies v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-ak^2\pi^2t/L^2}\sin\frac{k\pi x}{L}.$$

På samma sätt som ovan får vi igen Fourierkoefficienterna genom att utveckla begynnelsevillkoret i en sinusserie:

$$c_k = \frac{2}{L}\int_0^L \frac{c}{2}(x^2 - Lx)\sin\frac{k\pi x}{L}\,dx = [\text{partialintegration}] =$$

$$= c\underbrace{\left[-\frac{x^2-Lx}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{L}\right]_0^L}_{=0} - c\int_0^L -\frac{2x-L}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{L}\,dx = [\text{partialintegration}] =$$

$$= c\underbrace{\left[\frac{2x-L}{k^2\pi^2}L\sin\frac{k\pi x}{L}\right]_0^L}_{=0} - c\int_0^L \frac{2L}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi x}{L}\,dx =$$

$$= cL^2\left[\frac{2}{k^3\pi^3}\cos\frac{k\pi x}{L}\right]_0^L = 2cL^2\frac{(-1)^k-1}{k^3\pi^3} = \frac{2qL^2}{\lambda A}\frac{(-1)^k-1}{k^3\pi^3} \implies$$

$$\implies v(x,t) = u(x,t) + \frac{c}{2}(x^2-Lx) = u(x,t) + \frac{q}{2\lambda A}(x^2-Lx) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2qL^2}{\lambda A}\frac{(-1)^k-1}{k^3\pi^3}e^{-ak^2\pi^2t/L^2}\sin\frac{k\pi x}{L} \implies$$

$$\implies u(x,t) = \frac{q}{2\lambda A}(Lx-x^2) + \frac{2qL^2}{\lambda A}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k-1}{k^3\pi^3}e^{-ak^2\pi^2t/L^2}\sin\frac{k\pi x}{L} =$$

$$= \begin{bmatrix} (-1)^k - 1 = 0,\ k \text{ jämn} \\ k \to 2k+1 \\ k:\ 0 \to \infty \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{q}{\lambda A}\frac{x(L-x)}{2} + \frac{2qL^2}{\lambda A}\sum_{k=0}^{\infty}\underbrace{\frac{(-1)^{2k+1}-1}{(2k+1)^3\pi^3}}_{(-1)^{2k+1}-1=-2}e^{-a(2k+1)^2\pi^2t/L^2}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{L} =$$

$$= \frac{q}{\lambda A}\frac{x(L-x)}{2} - \frac{4qL^2}{\lambda A}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3\pi^3}e^{-a(2k+1)^2\pi^2t/L^2}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{L}.$$

3.24

a)

Lösning finns redan.

b)

Vi har att

$$u(x,y) = 8T_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2}\frac{\sinh\frac{(2k+1)\pi y}{b}}{\sinh\frac{(2k+1)\pi h}{b}}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{b}.$$

Värmeströmtätheten ges av Fouriers lag:

$$\boldsymbol{j} = -\lambda\nabla u,$$

och speciellt utgör y-delen av värmeströmtätheten den komposant som är vinkelrät mot taket:

$$j_y = \boldsymbol{j}\cdot(0,1)|_{y=h} = -\lambda u_y|_{y=h} =$$

$$= -8\lambda T_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2} \frac{\cosh \frac{(2k+1)\pi y}{b}}{\sinh \frac{(2k+1)\pi h}{b}} \frac{(2k+1)\pi}{b} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{b} \Bigg|_{y=h} =$$

$$= -8\lambda T_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\pi b} \frac{\cosh \frac{(2k+1)\pi y}{b}}{\sinh \frac{(2k+1)\pi h}{b}} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{b} \Bigg|_{y=h} =$$

$$= -8\lambda T_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\pi b} \frac{\cosh \frac{(2k+1)\pi h}{b}}{\sinh \frac{(2k+1)\pi h}{b}} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{b} =$$

$$= -8\lambda T_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\pi b} \coth \frac{(2k+1)\pi h}{b} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{b}.$$

c)

Den totala värmeströmmen fås av att integrera den värmeström som flödar genom taket (det som beräknades i b), j_y), alltså av integralen

$$\int_0^b j_y(x,h)\,dx = \int_0^b -8\lambda T_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\pi b} \coth \frac{(2k+1)\pi h}{b} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{b}\,dx =$$

$$= \left[\text{vi struntar i konvergens och byter plats på } \sum / \int\right] =$$

$$= -8\lambda T_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\pi b} \coth \frac{(2k+1)\pi h}{b} \int_0^b \sin \frac{(2k+1)\pi x}{b}\,dx =$$

$$= -8\lambda T_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\pi b} \coth \frac{(2k+1)\pi h}{b} \left[-\frac{b}{(2k+1)\pi} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{b}\right]_0^b =$$

$$= -8\lambda T_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2} \coth \frac{(2k+1)\pi h}{b} (\cos 0 - \underbrace{\cos((2k+1)\pi)}_{=-1}) =$$

$$= -16\lambda T_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2} \coth \frac{(2k+1)\pi h}{b}.$$

3.25

Vi tar modellen från uppgift 1.1, och kompletterar med randvillkor, samt ett begynnelsevillkor. Att röret är slutet innebär att vi har homogena Neumannvillkor, och begynnelsevillkoret är, enligt uppgiften,

$$u(x,0) = q(x) = \begin{cases} q_0, & 0 < x < d, \\ 0, & d < x < L. \end{cases}$$

Vi har då diffusionsproblemet

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = -cu, & 0 < x < L,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = q(x), & 0 < x < L. \end{cases}$$

Vi har homogena Neumannvillkor och ansätter därför

$$u(x,t) = u_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \cos\frac{k\pi x}{L} \implies$$

$$\implies 0 = u_t + cu - u_{xx} =$$

$$= u_0'(t) + cu_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty}(u_k'(t) + cu_k(t) + D\frac{k^2\pi^2}{L^2}u_k(t))\cos\frac{k\pi x}{L} \implies \text{[entydighet]} \implies$$

$$\implies \begin{cases} u_0'(t) + cu_0(t) = 0, \\ u_k'(t) + (c + D\frac{k^2\pi^2}{L^2})u_k(t) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} u_0(t) = c_0 e^{-ct}, \\ u_k(t) = c_k e^{-(c+k^2\pi^2 D/L^2)t} \end{cases} \implies$$

$$\implies u(x,t) = c_0 e^{-ct} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-(c+k^2\pi^2 D/L^2)t} \cos\frac{k\pi x}{L} \implies$$

$$\implies u(x,0) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos\frac{k\pi x}{L} = q(x) \implies$$

$$\implies c_0 = \frac{1}{L}\int_0^L q(x)\,dx = \frac{1}{L}\int_0^d q_0\,dx = \frac{dq_0}{L},$$

$$c_k = \frac{2}{L}\int_0^L q(x)\cos\frac{k\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\int_0^d q_0\cos\frac{k\pi x}{L}\,dx = \frac{2q_0}{L}\left[\frac{L}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{L}\right]_0^d = \frac{2q_0}{k\pi}\sin\frac{k\pi d}{L},$$

vilket ger oss lösningen

$$u(x,t) = \frac{q_0 d}{L}e^{-ct} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2q_0}{k\pi}\sin\frac{k\pi d}{L}e^{-(c+k^2\pi^2 D/L^2)t}\cos\frac{k\pi x}{L}.$$

3.29

Lösning finns redan.

3.30

Det är vågekvationen för en svängande sträng som gäller för båda deluppgifterna, men eftersom randvillkoren är olika kommer vi att få olika egenvärden och egenfunktioner till operatorn. Vågekvationen (eftersom vi inte har en yttre kraftfördelning är högerledet 0):

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \implies u_{tt} + c^2 T u = u_{tt} + c^2\lambda_k u = u_{tt} + \omega_k^2 u = 0,$$

där $T = -d^2/dx^2$ är en differentialoperator med egenvärdena λ_k. Den näst sista likheten kan jämföras med differentialekvationen för harmonisk svängning, där koefficienten framför funktionen är vinkelfrekvensen i kvadrat. Eftersom $c^2 = S/\rho$ kan vi skriva resonansfrekvenserna som

$$f_k = \frac{\omega_k}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{c^2\lambda_k} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\lambda_k S}{\rho}}.$$

Dock är svaret i form av resonans<u>vinkel</u>frekvenserna, vilket inte är samma sak som resonansfrekvenserna, men det är bara att svara med ω_k istället för f_k.

$$\omega_k = \sqrt{\lambda_k c^2} = \sqrt{\frac{\lambda_k S}{\rho}}$$

a)

Att båda ändarna är fastspända innebär homogena Dirichletvillkor:

$$\begin{cases} u_{tt} + c^2 T u = 0, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0. \end{cases}$$

Vi vill nu hitta egenvärden till differentialoperatorn T, vilket betyder att vi vill lösa

$$\begin{cases} Tv = \lambda v, \\ v(0) = v(L) = 0. \end{cases}$$

Detta problem har vi använt lösningen till jättemånga gånger, och även löst explicit, så vi vet att $\lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{L^2}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Med detta får vi resonansfrekvenserna

$$\omega_k = \sqrt{\frac{\lambda_k S}{\rho}} = \sqrt{\frac{\frac{k^2\pi^2}{L^2} S}{\rho}} = \frac{k\pi}{L}\sqrt{\frac{S}{\rho}}.$$

b)

Vi får nu ett Dirichletvillkor, och ett Neumannvillkor, alltså

$$\begin{cases} u_{tt} + c^2 T u = 0, \\ u(0,t) = u_x(L,t) = 0. \end{cases}$$

Vilket betyder att vi ska lösa egenvärdesproblemet

$$\begin{cases} Tv = -v'' = \lambda v, \\ v(0) = v'(L) = 0. \end{cases}$$

Vi vet att minus andraderivatan är en Sturm-Liouville-operator, som, i detta fall, också har randvillkor på korrekt form. Alltså är T positivt semidefinit, och vi behöver bara undersöka $\lambda \geq 0$.

$$\lambda = 0 \implies -v'' = 0 \implies v(x) = ax + b \implies$$

$$\implies [v(0) = v'(L) = 0 \implies a = b = 0] \implies v(x) \equiv 0,$$

vilket inte är en giltig egenfunktion, så $\lambda = 0$ är inget egenvärde.

$$\lambda > 0 \implies -v'' = \lambda v \implies v(x) = a\cos(\sqrt{\lambda}x) + b\sin(\sqrt{\lambda}x),$$

här ger $v(0) = 0$ att $a = 0$.

$$v'(L) = b\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}L) \implies [b, \lambda \neq 0] \implies$$

$$\implies \sqrt{\lambda_k}L = -\frac{\pi}{2} + k\pi \implies \lambda_k = \frac{\pi^2}{L^2}(k - \frac{1}{2})^2,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Med detta får vi resonansvinkelfrekvenserna

$$\omega_k = \sqrt{\frac{\lambda_k S}{\rho}} = \sqrt{\frac{\frac{\pi^2}{L^2}(k - \frac{1}{2})^2 S}{\rho}} = \frac{\pi(k - \frac{1}{2})}{L}\sqrt{\frac{S}{\rho}}.$$

3.32

Med $L = 0,2$ m, $T_0 = 100°$C, kommer vi att få värmeledningsproblemet (ingen värmekälla innebär att högerledet är 0)

$$\begin{cases} u_t - au - xx = 0, & 0 < x < 2L,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(2L,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = q(x), & 0 < x < 2L. \end{cases}$$

Vi har längden $2L$ eftersom det är två plattor som förs samman, och dessutom är det homogena Dirichletvillkor eftersom yttersidorna hålls vid temperaturen 0. Begynnelsefunktionen

$$q(x) = \begin{cases} T_0, & 0 < x < L, \\ 0, & L < x < 2L, \end{cases}$$

eftersom den ena plattan har temperaturen T_0, och den andra har temperaturen 0. Detta problem kan vi lösa genom att ansätta (differentialoperatorn med randvillkoren är här välbekant, så det är överflödigt att lösa egenvärdesproblemet för att hitta en ortogonal följd av egenfunktioner att utveckla i)

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin \frac{k\pi x}{2L} \implies$$

$$\implies 0 = u_t - au_{xx} = \sum_{k=1}^{\infty} (u_k'(t) + a\frac{k^2\pi^2}{4L^2} u_k(t)) \sin \frac{k\pi x}{2L} \implies \text{[entydighet]} \implies$$

$$\implies u_k'(t) + a\frac{k^2\pi^2}{4L^2} u_k(t) = 0 \implies u_k(t) = c_k e^{-ak^2\pi^2 t/(4L^2)} \implies$$

$$\implies u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-ak^2\pi^2 t/(4L^2)} \sin \frac{k\pi x}{2L} \implies u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin \frac{k\pi x}{2L} = q(x) \implies$$

$$\implies c_k = \frac{2}{2L} \int_0^{2L} q(x) \sin \frac{k\pi x}{2L}\, dx = \frac{1}{L} \int_0^L T_0 \sin \frac{k\pi x}{2L}\, dx = \frac{T_0}{L} \left[-\frac{2L}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{2L} \right]_0^L =$$

$$= \frac{2T_0}{k\pi} (-\cos \frac{k\pi}{2} + \cos 0) = 2T_0 \frac{1 - \cos \frac{k\pi}{2}}{k\pi} \implies$$

$$\implies u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} 2T_0 \frac{1 - \cos \frac{k\pi}{2}}{k\pi} e^{-ak^2\pi^2 t/(4L^2)} \sin \frac{k\pi x}{2L} =$$

$$= 2T_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos \frac{k\pi}{2}}{k\pi} e^{-ak^2\pi^2 t/(4L^2)} \sin \frac{k\pi x}{2L} =$$

$$= 200 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos \frac{k\pi}{2}}{k\pi} e^{-25ak^2\pi^2 t/4} \sin \frac{5k\pi x}{2}.$$

a)

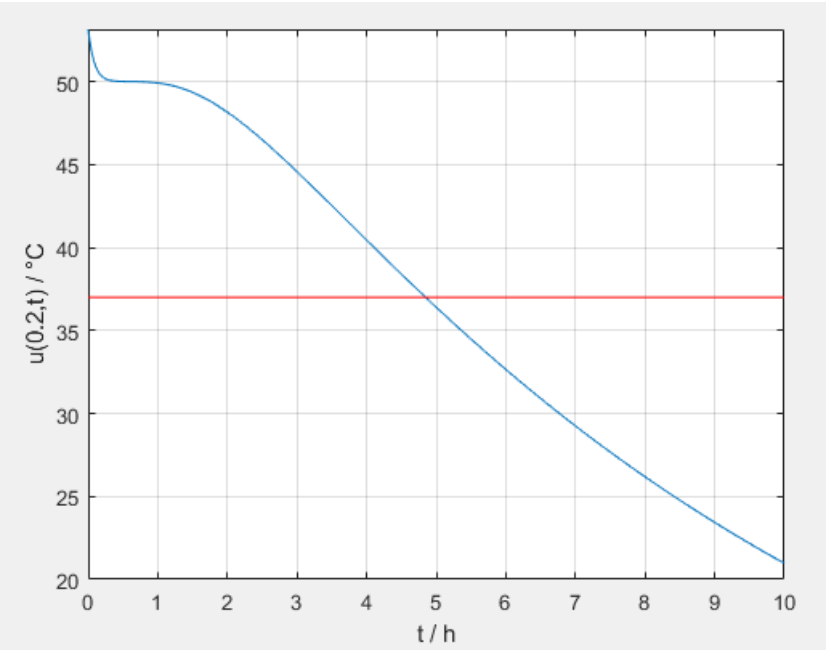
Eftersom a är, relativt, stort räcker det med att ta den första termen i serien. Kontaktytan är i $x = L = 1/5$ m.

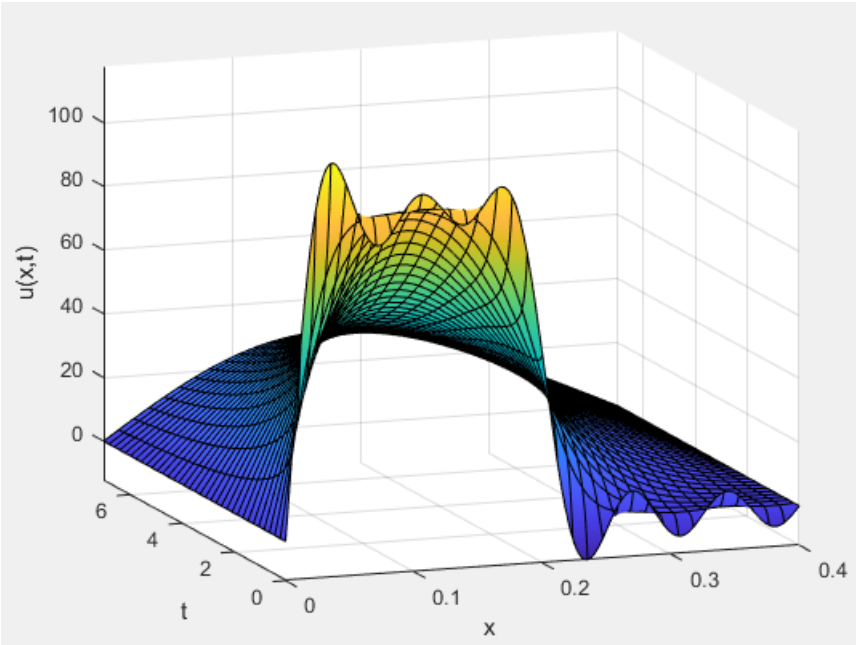
$$u(\frac{1}{5}, 600) \approx 200 \frac{1 - \cos\frac{\pi}{2}}{\pi} e^{-25 \cdot 600 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-5} \pi^2/4} \sin\frac{\pi}{2} =$$

$$= \frac{200}{\pi} e^{-9\pi^2/160} = 36,54... \approx 37°\text{C}.$$

b)

Nu får vi ta med flera termer. Jag har valt att använda dem 10 första termerna i serien.





Den första bilden indikerar att temperaturen nås efter cirka 5 timmar. Den andra bilden visar hur hela kroppens temperatur ändras (tidsaxeln är i timmar).

3.35

Tvärsnittsarean $A(x)$ fås snabbt av skivformeln: $A(x) = \pi y^2 = k^2 \pi e^{2ax}$. Att hornet är öppet i bägge ändar innebär homogena Dirichletvillkor. Vårt problem blir då

$$\begin{cases} u_{tt} - v^2 \frac{1}{k^2 \pi e^{2ax}} \left(k^2 \pi e^{2ax} u_x\right)_x = 0, & 0 < x < L,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Låt T vara en differentialoperator, sådan att

$$Tu = -\frac{1}{k^2 \pi e^{2ax}} \left(k^2 \pi e^{2ax} u'\right)' = -e^{-2ax}(e^{2ax} u'' + 2ae^{2ax} u') = -u'' - 2au'.$$

PDE:n kan då skrivas

$$u_{tt} + v^2 Tu = 0.$$

Enligt samma resonemang som i 3.30, om T:s egenvärden betecknas med λ_k, kommer vi att få egenfrekvensen, f_k, av att

$$u_{tt} + v^2 Tu = u_{tt} + v^2 \lambda_k u = u_{tt} + \omega_k^2 u = 0 \implies$$

$$\implies f_k = \frac{\omega_k}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{v^2 \lambda_k} = \frac{v}{2\pi}\sqrt{\lambda_k}.$$

Vi behöver nu bestämma differentialoperatorns egenvärden och egenfunktioner (moder).

$$\begin{cases} Tu = \lambda u, \\ u(0) = u(L) = 0. \end{cases}$$

$$Tu = -u'' - 2au' = \lambda u \implies u'' + 2au' + \lambda u = 0 \implies$$
$$\implies \text{karakteristiska ekvationen: } r^2 + 2ar + \lambda = 0 \implies r = -a \pm \sqrt{a^2 - \lambda}.$$

Detta ger tre fall: $\lambda < a^2$, $\lambda = a^2$, och $\lambda > a^2$.

$$\begin{cases} \lambda < a^2 \implies u(x) = ce^{r_1 x} + de^{r_2 x} \implies [r_1 \neq r_2,\ u(0) = u(1) = L] \implies u(x) \equiv 0, \\ \lambda = a^2 \implies u(x) = (cx + d)e^{-ax} \implies [u(0) = u(1) = L] \implies u(x) \equiv 0, \\ \lambda > a^2 \implies u(x) = e^{-ax}(c\cos(\sqrt{\lambda - a^2}x) + d\sin(\sqrt{\lambda - a^2}x)), \end{cases}$$

båda fallen $\lambda < a^2$ och $\lambda = a^2$ gav bara den triviala lösningen och svarar därför inte mot några egenvärden. För det tredje fallet ger villkoret $u(0) = 0$ att $c = 0$.

$$u(L) = 0 \implies de^{-aL}\sin(\sqrt{\lambda - a^2}L) = 0 \implies [d \neq 0] \implies$$
$$\implies \sqrt{\lambda_k - a^2}L = k\pi \implies \lambda_k = a^2 + \frac{k^2\pi^2}{L^2},\ k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

k kan inte vara 0 eftersom $\lambda > a^2$. Egenfunktionerna blir alltså

$$\varphi_k(x) = e^{-ax}\sin\frac{k\pi x}{L},$$

och egenfrekvenserna är

$$f_k = \frac{v}{2\pi}\sqrt{\lambda_k} = \frac{v}{2\pi}\sqrt{a^2 + \frac{k^2\pi^2}{L^2}}.$$

3.39

Lösning finns redan.

3.41

Lösning finns redan.

3.42

Vi använder samma modell som i exempel 3.11, dock eftersom vi har ett långt cirkulärt stav är $u = u(r,t)$ (polära koordinater). Av rotationssymmetriskäl behövs det ingen vinkelvariabel. Diffusionsmodellen blir då

$$\begin{cases} u_t - a\Delta u = 0, \quad 0 < r < R, \\ u(R,t) = 0. \end{cases}$$

Det vi söker är diametern, som är $2R$. Först behöver vi dock hitta en lämplig följd egenfunktioner som vi kan ansätta en lösning i. För att göra det behöver vi lösa egenvärdesproblemet

$$\begin{cases} Tu = -\Delta u = [\text{vinkeloberoende pol. koord.}] = -u'' - \frac{1}{r}u' = \lambda u, \\ u(R) = 0,\ u \text{ begr. nära } r = 0. \end{cases}$$

Vi vet att det är en Sturm-Liouville-operator, och randvillkoren är på korrekt form, så den är positivt semidefinit. För $\lambda > 0$ får vi

$$-u'' - \frac{1}{r}u' = \lambda u \implies u'' + \frac{1}{r}u' + \lambda u = 0,$$

vilket är Bessels differentialekvation, med $\nu = 0$, alltså är

$$u(x) = aJ_0(\sqrt{\lambda}r) + bY_0(\sqrt{\lambda}r),$$

eftersom u ska vara begränsad måste $b = 0$. Vidare ger

$$u(R) = 0 \implies [a \neq 0] \implies \sqrt{\lambda_k}R = \alpha_{0,k} \implies \lambda_k = \frac{\alpha_{0,k}}{R^2}.$$

$\lambda = 0$ ger oss Bessels differentialekvation med $\lambda = \nu = 0$, som har lösningen

$$u(x) = a + b\ln r,$$

villkoret att u är begränsad tvingar $b = 0$ och $u(R) = 0 \implies a = 0$, vilket innebär att $\lambda = 0$ inte är ett egenvärde. Vi har alltså egenvärdena

$$\lambda_k = \frac{\alpha_{0,k}^2}{R^2},$$

och egenfunktionerna

$$\varphi_k(r) = J_0(\frac{\alpha_{0,k}}{R}r),\ k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Med detta kan vi lösa det ursprungliga problemet genom att ansätta en egenfunktionsutveckling:

$$u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\varphi_k(r) \implies$$

$$\implies 0 = u_t - cu + aTu = [Tu = \lambda_k u] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}(u_k'(t) - cu_k(t) + a\lambda_k u_k(t))\varphi_k(r) \implies [\text{entydighet}] \implies$$

$$\implies u_k'(t) + (a\lambda_k - c)u_k(t) = 0 \implies u_k(t) = b_k e^{-(a\lambda_k - c)t} \implies$$

$$\implies u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-(a\lambda_k - c)t}\varphi_k(r).$$

Eftersom vi har en positivt definit operator gäller det att följden av egenvärdena är växande, så $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4 < ....$ Vad detta berättar för oss är att vi enbart behöver betrakta den första termen i serien, eftersom om exponenten $-(a\lambda_1 - c) \leq 0$ kommer alla andra termer i serien att vara negativa, vilket betyder att lösningen är begränsad. Speciellt om $-(\lambda_1 - c) = 0$ kommer den vara kritisk.

$$a\lambda_1 - c = 0 \implies a\frac{\alpha_{0,1}^2}{R^2} = c \implies \frac{1}{R} = \sqrt{\frac{c}{a\alpha_{0,1}^2}} \implies 2R = 2\alpha_{0,1}\sqrt{\frac{a}{c}}.$$

3.43

I båda fallen är svängningsproblemet

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2\Delta u = 0, & \text{i } \Omega, \\ u = 0, & \text{på } \partial\Omega, \end{cases}$$

eftersom membranen är fast inspända. Om vi låter $T = -\Delta$, med egenvärden λ_k får kan vi få fram egenfrekvenserna av att

$$u_{tt} + c^2 Tu = u_{tt} + c^2\lambda_k u = u_{tt} + \omega_k^2 u \implies$$

$$\implies f_k = \frac{\omega_k}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{c^2\lambda_k} = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\lambda_k}.$$

För det cirkulära membranet är problemet vinkeloberoende och om vi låter radien vara R kommer vi att få exakt samma differentialoperator som i föregående uppgift, vilket betyder att egenvärdena för det cirkulära membranet är

$$\lambda_k^\circ = \frac{\alpha_{0,k}^2}{R^2},\ k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

I det kvadratiska fallet, om sidlängden är a, kommer vi att i x-led egenfunktionerna $\sin(k\pi x/a)$, och i y-led $\sin(n\pi y/a)$, där $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (jämför med vilken egenfunktionsutveckling man gör när man har homogena Dirichletvillkor och en rumsvariabel). Alltså kommer hela lösningen för det kvadratiska membranet att vara produkten av lösningen i x- och y-led (detta beror på att de utgör en bas för x och y separat, vilket gör att produkten kommer att utgöra en bas för det kvadratiska området). Egenfunktionerna blir då

$$\varphi_{k,n}(x,y) = \sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{a} \implies \lambda_{k,n}^\square = T\varphi_{k,n} = \frac{\pi^2}{a^2}(k^2+n^2).$$

Eftersom områdena har samma area gäller det att

$$\pi R^2 = a^2 \implies a = \sqrt{\pi}R,$$

och grundfrekvenserna är

$$f_1^\circ = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\lambda_1^\circ} = \frac{c\alpha_{0,1}}{2\pi R} = \frac{c}{2\pi}\frac{\alpha_{0,1}}{R},$$

$$f_{1,1}^\square = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\lambda_{1,1}^\square} = \frac{\pi c}{2\pi a}\sqrt{2} = \frac{c}{\sqrt{2\pi}R} \implies$$

$$\implies \frac{f_1^\circ}{f_{1,1}^\square} = \frac{\frac{c}{2\pi}\frac{\alpha_{0,1}}{R}}{\frac{c}{\sqrt{2\pi}R}} = \frac{\alpha_{0,1}}{\sqrt{2\pi}}.$$

3.45

Låt $R = 0,2$ m. Randen till klotet hålls vid temperaturen 0, så vi har homogena Dirichletvillkor. Vidare är hela klotets temperatur 100°C från början, vilket inte har något vinkelberoende, och vi kan därför sätta $u = u(r,t)$. Detta ger oss värmeledningsproblemet

$$\begin{cases} u_t - a\Delta u = 0, & 0 < x < R,\ t > 0, \\ u(R,t) = 0, & t > 0, \\ u(r,0) = 100, & 0 < x < R. \end{cases}$$

Vi vill hitta en lämplig bas av egenfunktioner som vi kan göra våra Fourierutveckling i. Med $Tu = -\Delta u$, och Laplaceoperatorn i sfäriska koordinater med $\Lambda u = 0$, får vi egenvärdesproblemet

$$\begin{cases} -u'' - \frac{2}{r}u' = \lambda u, \\ u(R) = 0, \ u \text{ begr. nära } 0. \end{cases}$$

Eftersom det är en Sturm-Liouville-operator med typ korrekta randvillkor vet vi att den är positivt semidefinit, vilket betyder att $\lambda \geq 0$.

$$-u'' - \frac{2}{r}u' = \lambda u \implies u'' + \frac{2}{r}u' + \lambda u = 0.$$

Då $\lambda = 0$ har denna differentialekvation lösningen

$$u(x) = a + \frac{b}{r},$$

men randvillkoren ger att $a = b = 0$ och alltså är $\lambda = 0$ inget egenvärde. Då $\lambda > 0$ har vi lösningen

$$u(x) = aj_0(\sqrt{\lambda}r) + by_0(\sqrt{\lambda}r),$$

där y_0 är obegränsad nära 0, så $b = 0$.

$$u(R) = 0 \implies [a \neq 0] \implies j_0(\sqrt{\lambda}R) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}R)}{\sqrt{\lambda}R} = 0 \implies [\lambda > 0] \implies$$

$$\implies \sqrt{\lambda_k}R = k\pi \implies \lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{R^2}, \ k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Egenfunktionerna blir då

$$\varphi_k(r) = \frac{\sin(k\pi r/R)}{k\pi r/R}.$$

För att lösa vårt problem gör vi nu ansatsen

$$u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\varphi_k(r) \implies$$

$$\implies 0 = u_t + aTu = [Tu = \lambda_k u] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}(u_k'(t) + a\frac{k^2\pi^2}{R^2}u_k(t))\varphi_k(r) \implies [\text{entydighet}] \implies$$

$$\implies u_k'(t) + a\frac{k^2\pi^2}{R^2}u_k(t) = 0 \implies u_k(t) = c_k e^{-ak^2\pi^2 t/R^2} \implies$$

$$\implies u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-ak^2\pi^2 t/R^2}\varphi_k(r) \implies u(r,0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(r)$$

Fourierkoefficienterna kan vi få med hjälp av projektionsformeln. Tänk dock på att vår differentialoperator, på Sturm-Liouville-form, är

$$Tu = -\frac{1}{r^2}(r^2u')',$$

vilket betyder att viktsfunktionen $w(r) = r^2$ och skalärprodukten är

$$(u \,|\, v) = \int_0^R u(r)v(r)\, w(r)\, dr = \int_0^R u(r)v(r)\, r^2\, dr.$$

Projektionsformeln ger nu att

$$c_k = \frac{(\varphi_k \,|\, 100)}{(\varphi_k \,|\, \varphi_k)} = \frac{\int_0^R \frac{\sin(k\pi r/R)}{k\pi r/R} \cdot 100\, r^2\, dr}{\int_0^R \frac{\sin^2(k\pi r/R)}{k^2\pi^2 r^2/R^2}\, r^2\, dr} = \frac{100k\pi}{R} \frac{\int_0^R r \sin\frac{k\pi r}{R}\, dr}{\int_0^R \sin^2(k\pi r/R)\, dr} =$$

$$[\text{partialintegration}] = \frac{100k\pi}{R} \frac{\left[-\frac{Rr}{k\pi}\cos\frac{k\pi r}{R}\right]_0^R - \int_0^R -\frac{R}{k\pi}\cos\frac{k\pi r}{R}\, dr}{\frac{1}{2}\int_0^R (1-\cos(2k\pi r/R))\, dr} =$$

$$= \frac{200k\pi}{R} \frac{-\frac{R^2}{k\pi}\cos k\pi + \int_0^R \frac{R}{k\pi}\cos\frac{k\pi r}{R}\, dr}{R-0} =$$

$$= 200\left((-1)^{k+1} + \underbrace{\left[\frac{1}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi r}{R}\right]_0^R}_{=0}\right) = 200(-1)^{k+1} \implies$$

$$\implies u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} 200(-1)^{k+1} e^{-ak^2\pi^2 t/R^2}\varphi_k(r) = [R = 1/5 \text{ m}] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} 200(-1)^{k+1} e^{-25ak^2\pi^2 t} \frac{\sin 5k\pi r}{5k\pi r}.$$

a)

På samma sätt som i 3.32 räcker det i denna deluppgift att ta med den första termen.

$$u(0^+, 600) \approx 200(-1)^2 e^{-15000a\pi^2} \underbrace{\frac{\sin 5\pi}{5\pi}}_{\to 1} = 200e^{-9\pi^2/40} = 21,7... \approx 22°\text{C}.$$

b)

Man finner att temperaturen är ungefär 100°C efter 10 min, om man tar med flera termer (om man bara har den första blir temperaturen orimlig (> 100°C)).

3.46

Lösning finns redan.

3.49

a)

Att den är oändligt lång betyder att vi kan försumma z-led i cylinderkoordinater. Det finns inte heller något vinkelberoende, så vi kan sätta $u = u(r,t)$. Isvattnet fungerar som

homogena Dirichletvillkor, vilket ger oss problemet

$$\begin{cases} u_t - a\Delta u = 0, & 0 < r < R,\ t > 0, \\ u(R,t) = 0, & t > 0, \\ u(r,0) = T_0, & 0 < r < R. \end{cases}$$

Man kan antingen hitta egenfunktioner till differentialoperatorn $-\Delta$ i polära koordinater (utan vinkelberoende), och sedan ansätta en lösning utvecklad i den bas man finner, eller så kan man konstatera att det återigen är samma operator som i 3.42, vilket betyder att egenfunktionerna är

$$\varphi_k(r) = J_0(\frac{\alpha_{0,k}}{R}r),$$

med egenvärden

$$\lambda_k = \frac{\alpha_{0,k}^2}{R^2},\ k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Om man skriver operatorn på Sturm-Liouville-form blir den

$$-\Delta u = -\frac{1}{r}(ru')',$$

vilket visar att viktsfunktionen $w(r) = r$. Vi kan nu ansätta en lösning på formen

$$u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\varphi_k(r) \implies$$

$$\implies 0 = u_t - a\Delta u = \sum_{k=1}^{\infty}(u_k'(t) + a\lambda_k u_k(t))\varphi_k(r) \implies \text{[entydighet]} \implies$$

$$\implies u_k'(t) + a\lambda_k u_k(t) = 0 \implies u_k(t) = c_k e^{-a\lambda_k t} \implies$$

$$\implies u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-a\lambda_k t}\varphi_k(r) \implies u(r,0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(r) = T_0.$$

Vi får nu Fourierkoefficienterna, c_k, med hjälp av projektionsformeln:

$$c_k = \frac{(\varphi_k \,|\, T_0)}{(\varphi_k \,|\, \varphi_k)} = \frac{\int_0^R \varphi_k(r)\cdot T_0\, r\, dr}{\int_0^R (\varphi_k(r))^2\, r\, dr} = T_0 \frac{\int_0^R r J_0(\frac{\alpha_{0,k}}{R}r)\, dr}{\int_0^R r(J_0(\frac{\alpha_{0,k}}{R}r))^2\, dr}.$$

Vi har allstå lösningen

$$u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-a\alpha_{0,k}^2 t/R^2} J_0(\frac{\alpha_{0,k}}{R}r),$$

där c_k ges ovan.

b)

Om vi tittar i formelsamlingen vid normuttryck för Besselfunktioner ser vi direkt att nämnaren i projektionsformeln kan skrivas explicit som

$$\int_0^R r(J_0(\frac{\alpha_{0,k}}{R}r))^2\,dr = [\nu = 0] = \frac{R^2}{2}(J_1(\alpha_{0,k}))^2 = \frac{R^2}{2}(J_0'(\alpha_{0,k}))^2.$$

För att skriva om täljaren kommer jag först att införa skrivsättet $\alpha = \alpha_{0,k}$ eftersom det blir lite mer lätthanterligt. Vi vet att våra egenfunktioner löser Bessels differentialekvation, med $\lambda_k = \alpha^2/R^2$ och $\nu = 0$,

$$u'' + \frac{1}{r}u' + \frac{\alpha^2}{R^2}u = 0 \iff -\frac{1}{r}(ru')' = \frac{\alpha^2}{R^2}u,$$

insättning av $u = \varphi_k = J_0(\frac{\alpha}{R}r)$ (och multiplikation med r) ger nu att

$$-\left(r\left(J_0(\frac{\alpha}{R}r)\right)'\right)' = \frac{\alpha^2}{R^2}rJ_0(\frac{\alpha}{R}r) \implies -\left(\frac{\alpha}{R}rJ_0'(\frac{\alpha}{R}r)\right)' = \frac{\alpha^2}{R^2}rJ_0(\frac{\alpha}{R}r) \implies$$

$$\implies -\left(rJ_0'(\frac{\alpha}{R}r)\right)' = \frac{\alpha}{R}rJ_0(\frac{\alpha}{R}r).$$

Om vi nu integrerar båda sidor från 0 till R kommer högerledet att vara en konstant gånger täljaren i projektionsformeln:

$$-\int_0^R \left(rJ_0'(\frac{\alpha}{R}r)\right)'\,dr = \frac{\alpha}{R}\int_0^R rJ_0(\frac{\alpha}{R}r)\,dr \implies$$

$$\implies -\left[rJ_0'(\frac{\alpha}{R}r)\right]_0^R = \frac{\alpha}{R}\int_0^R rJ_0(\frac{\alpha}{R}r)\,dr \implies -RJ_0'(\alpha) = \frac{\alpha}{R}\int_0^R rJ_0(\frac{\alpha}{R}r)\,dr \implies$$

$$\implies \int_0^R rJ_0(\frac{\alpha}{R}r)\,dr = -\frac{R^2}{\alpha}J_0'(\alpha) = -\frac{R^2}{\alpha_{0,k}}J_0'(\alpha_{0,k}) \implies$$

$$\implies c_k = T_0\frac{\int_0^R rJ_0(\frac{\alpha_{0,k}}{R}r)\,dr}{\int_0^R r(J_0(\frac{\alpha_{0,k}}{R}r))^2\,dr} = T_0\frac{-\frac{R^2}{\alpha_{0,k}}J_0'(\alpha_{0,k})}{\frac{R^2}{2}(J_0'(\alpha_{0,k}))^2} = -\frac{2T_0}{\alpha_{0,k}J_0'(\alpha_{0,k})} \implies$$

$$\implies u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{2T_0}{\alpha_{0,k}J_0'(\alpha_{0,k})}e^{-a\alpha_{0,k}^2 t/R^2}J_0(\frac{\alpha_{0,k}}{R}r).$$

3.51

Man kan antingen göra variabelseparation, som i anvisningen, eller så kan man observera att i Laplaceoperatorn har minus andraderivatan i θ-led, och vi har även homogena Dirichletvillkor i θ-led, vilket betyder att vi känner till en lämplig bas av egenfunktioner att utveckla i. Längden på intervallet är π, så våra egenfunktioner i θ-led är $\sin k\theta$, där $k \in \setminus\{0\}$. Med denna kunskap gör vi ansatsen

$$u(r,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(r)\sin k\theta.$$

I polära koordinater är

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta},$$

och vår ansats är baserad på egenfunktioner i θ-led, så vi ersätter $-u_{\theta\theta}$ med egenvärdena (som är k^2) när vi sätter in vår ansats i ekvationen:

$$0 = \Delta u = \sum_{k=1}^{\infty}(u_k''(r) + \frac{1}{r}u_k'(r) - \frac{k^2}{r^2}u_k(r))\sin k\theta \implies [\text{entydighet}] \implies$$

$$\implies u_k''(r) + \frac{1}{r}u_k'(r) - \frac{k^2}{r^2}u_k(r) = 0,$$

vilket är Bessels differentialekvation med $\lambda = 0$ och $\nu = k$. Alltså får vi lösningen

$$u_k(r) = a_k r^k + b_k r^{-k} \implies$$

$$\implies u(r,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k r^k + b_k r^{-k})\sin k\theta \implies$$

$$\implies \begin{cases} u(1,\theta) = \sin\theta, \\ u(2,\theta) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)\sin k\theta = \sin\theta, \\ \sum_{k=1}^{\infty}(a_k 2^k + b_k 2^{-k})\sin k\theta = 0. \end{cases}$$

Ur detta får vi två ekvationssystem:

$$k \neq 1 \implies \begin{cases} a_k + b_k = 0, \\ a_k 2^k + b_k 2^{-k} = 0 \end{cases} \implies a_k = b_k = 0,$$

och

$$k = 1 \implies \begin{cases} a_1 + b_1 = 1, \\ 2a_1 + \frac{b_k}{2} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a_1 = -1/3, \\ b_1 = 4/3 \end{cases} \implies$$

$$\implies u(r,\theta) = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{r} - r\right)\sin\theta = \frac{1}{3}\left(\frac{4r\sin\theta}{r^2} - r\sin\theta\right) =$$

$$= [r\sin\theta = y,\ r^2 = x^2 + y^2] = \frac{y}{3}\left(\frac{4}{x^2+y^2} - 1\right).$$

3.55

Vi börjar med att homogenisera randvillkoren i θ-led. Eftersom Laplaceoperatorn i polära koordinater innehåller en andraderivata med avseende på θ är det lämpligt att försöka hitta en funktion vars andraderivata är 0, alltså en linjär funktion, som uppfyller att $\tilde{u}(0) = 0$ och $\tilde{u}(\alpha) = 1$, en sådan är $\tilde{u}(\theta) = \theta/\alpha$. Om vi nu inför funktionen $v(r,\theta) = u(r,\theta) - \tilde{u}(\theta)$ kommer v att uppfylla

$$\begin{cases} \Delta v = 0, / & 0 < r < 1,\ 0 < \theta < \alpha < 2\pi, \\ v(r,0) = v(r,\alpha) = 0, & 0 < r < 1, \\ v(1,\theta) = 1 - \frac{\theta}{\alpha}, & 0 < \theta < \alpha. \end{cases}$$

Eftersom vi har homogena Dirichletvillkor i θ-led (precis som i 3.51) ansätter vi

$$v(r,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(r)\sin\frac{k\pi\theta}{\alpha} \implies$$

$$\implies 0 = \Delta v = v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}(v_k''(r) + \frac{1}{r}v_k'(r) - \frac{k^2\pi^2}{\alpha^2 r^2}v_k(r))\sin\frac{k\pi\theta}{\alpha} \implies \text{[entydighet]} \implies$$

$$\implies v_k''(r) + \frac{1}{r}v_k'(r) - \frac{k^2\pi^2}{\alpha^2 r^2}u_k(r) = 0,$$

vilket är Bessels differentialekvation med $\lambda = 0$ och $\nu_k = k\pi/\alpha$. Alltså får vi lösningen

$$v_k(r) = a_{\nu_k}r^{\nu_k} + b_k r^{-\nu_k} \implies$$

$$\implies v(r,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k r^{\nu_k} + b_k\frac{1}{r^{\nu_k}})\sin\frac{k\pi\theta}{\alpha},$$

eftersom v måste bara begränsad vid $r = 0$ (fysikaliska skäl) är $b_k = 0$.

$$v(r,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty}a_k r^{\nu_k}\sin\frac{k\pi\theta}{\alpha} \implies v(1,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin\frac{k\pi\theta}{\alpha} = 1 - \frac{\theta}{\alpha}.$$

Vi får a_k med projektionsformeln, men eftersom vår egenfunktionsutveckling är i θ-led är viktsunktionen 1.

$$a_k = \frac{(\sin\frac{k\pi\theta}{\alpha} \mid 1 - \frac{\theta}{\alpha})}{(\sin\frac{k\pi\theta}{\alpha} \mid \sin\frac{k\pi\theta}{\alpha})} = \frac{\int_0^\alpha \sin\frac{k\pi\theta}{\alpha}(1-\frac{\theta}{\alpha})\,d\theta}{\int_0^\alpha \sin^2(k\pi\theta/\alpha)\,d\theta} = \frac{2}{\alpha}\int_0^\alpha(1-\frac{\theta}{\alpha})\sin\frac{k\pi\theta}{\alpha}\,d\theta =$$

$$= \text{[partialintegration]} = \frac{2}{\alpha}\left[-\frac{\alpha(1-\theta/\alpha)}{k\pi}\cos\frac{k\pi\theta}{\alpha}\right]_0^\alpha - \frac{2}{\alpha}\int_0^\alpha -\frac{\alpha(-1/\alpha)}{k\pi}\cos\frac{k\pi\theta}{\alpha}\,d\theta =$$

$$= \frac{2}{k\pi} - \underbrace{\left[\frac{\alpha}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi\theta}{\alpha}\right]_0^\alpha}_{=0} = \frac{2}{k\pi} \implies$$

$$\implies v(r,\theta) = u(r,\theta) - \frac{\theta}{\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k\pi}r^{k\pi/\alpha}\sin\frac{k\pi\theta}{\alpha} \implies$$

$$\implies u(r,\theta) = \frac{\theta}{\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k\pi}r^{k\pi/\alpha}\sin\frac{k\pi\theta}{\alpha}.$$

3.60

Lösning finns redan.

3.62

Vi har inget ϕ-beroende, så vi kan söka en lösning på formen $u = u(r,\theta)$. Laplaceoperatorn i sfäriska koordinater blir då

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2\sin\theta}(\sin\theta\, u_\theta)_\theta =$$

$$= [s = \cos\theta,\ u(r,\theta) = u(r,s)] = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2}((1-s^2)u_s)_s.$$

Detta ger oss problemet

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < r < 1,\ -1 < s < 1, \\ u(1,s) = s^2, & -1 < s < 1, \\ u \text{ begränsad i området.} \end{cases}$$

För att lösa detta problem utför vi variabelseparation: $u(r,s) = R(r)S(s)$. Insättning:

$$0 = \Delta u = R''(r)S(s) + \frac{2}{r}R'(r)S(s) + \frac{1}{r^2}((1-s^2)R(r)S(s))_s \implies$$

$$\implies \frac{R''}{R} + \frac{2}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{((1-s^2)S')'}{S} = 0.$$

Vi har inget s-beroende i denna ekvation, alltså måste kvoten

$$-\frac{((1-s^2)S')'}{S} = \mu \implies -((1-s^2)S')' = \mu S \implies ((1-s^2)S')' + \mu S = 0,$$

vilket vi känner igen i formelsamlingen som Legendres differentialekvation. Det ska gälla att S är begränsad i området, och enligt sats S.4 har Legendres differentialoperator $(-((1-s^2)S')'$, där S ska vara begränsad på intervallet $[-1,1])$ egenfunktioner $P_\ell(s)$ (Legendrepolynom), och egenvärden $\mu_\ell = \ell(\ell+1)$, $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Detta talar alltså för att vi ska göra ansatsen

$$u(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} u_\ell(r)P_\ell(s) \implies$$

$$\implies 0 = \Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2}((1-s^2)u_s)_s = \left[((1-s^2)P_\ell'(s))' = -\ell(\ell+1)\right] =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty}(u_\ell''(r) + \frac{2}{r}u_\ell'(r) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}u_\ell(r))P_\ell(s) \implies \text{[entydighet]} \implies$$

$$\implies u_\ell''(r) + \frac{2}{r}u_\ell'(r) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}u_\ell(r) = 0,$$

och detta känner vi igen den sfäriska Besseldifferentialekvationen, med $\lambda = 0$, vilket betyder att

$$u_\ell(r) = a_\ell r^\ell + b_\ell r^{-\ell-1},$$

eftersom vår funktion ska vara begränsad, och $\ell \geq 0$, behöver $b_\ell = 0$ (annars växer lösningen obegränsat nära $r = 0$). Vi har nu funktionen

$$u(r,s) = \sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell r^\ell P_\ell(s) \implies u(1,s) = \sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell P_\ell(s) = s^2.$$

Eftersom Legendrepolynomen P_ℓ är polynom av grad ℓ, behöver $a_\ell = 0$ för $\ell \geq 3$. Med detta har vi villkoret

$$a_0P_0(s) + a_1P_1(s) + a_2P_2(s) = s^2,$$

och formelsamlingens rekursionsekvationer för Legendrepolynomen ger oss att

$$P_0(s) = 1, \quad P_1(s) = s, \quad P_2(s) = \frac{3}{2}s^2 - \frac{1}{2} \implies$$

$$\implies a_0 + a_1 s + a_2\left(\frac{3}{2}s^2 - \frac{1}{2}\right) = s^2 \implies a_1 = 0,\ a_2 = \frac{2}{3} \implies$$
$$\implies a_0 - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = 0 \implies a_0 = \frac{1}{3} \implies$$
$$\implies u(r,s) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}r^2\left(\frac{3}{2}s^2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}r^2(3s^2 - 1) \implies$$
$$\implies u(r,\theta) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}r^2(3\cos^2\theta - 1).$$

3.66

a)

Det handlar om vågekvationen med en rumsvariabel. Det finns ingen yttre kraftfördelning i området, så högerledet i PDE:n är 0. Att den är fast inspänd i ena änden representeras av ett homogent Dirichletvillkor, och det andra randvillkoret fås med Hookes lag: $ku_x(L,t) = A\sin\omega t$. Detta ger oss modellen

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < L,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad ku_x(L,t) = A\sin\omega t, & t > 0. \end{cases}$$

b)

Vi söker en stationär lösning på formen

$$u(x,t) = H(x)e^{i\omega t},$$

där randvillkor översätts till att

$$H(0) = 0, \quad H'(L) = A/k,$$

och eftersom

$$A\sin\omega t = \operatorname{Im}\left(Ae^{i\omega t}\right),$$

får vi vår lösningen genom att ta imaginärdelen av det vi kommer fram till. Insättning ger att

$$0 = u_{tt} - c^2 u_{xx} = (-\omega^2 H(x) - c^2 H''(x))e^{i\omega t} \implies H'' + \frac{\omega^2}{c^2}H = 0 \implies$$
$$\implies H(x) = a\cos\frac{\omega x}{c} + b\sin\frac{\omega x}{c}.$$

$H(0) = 0$ ger direkt att $a = 0$.

$$H'(L) = b\frac{\omega}{c}\cos\frac{\omega L}{c} = A/k \implies b = \frac{cA}{\omega k\cos\frac{\omega L}{c}} \implies$$
$$\implies u(x,t) = \frac{cA}{\omega k}\frac{\sin(\omega x/c)}{\cos(\omega L/c)}e^{i\omega t}.$$

Mer specifikt blir lösningen vi är intresserade av

$$\operatorname{Im}\left(\frac{cA}{\omega k}\frac{\sin(\omega x/c)}{\cos(\omega L/c)}e^{i\omega t}\right) = \frac{cA}{\omega k}\frac{\sin(\omega x/c)}{\cos(\omega L/c)}\sin\omega t.$$

Detta är en giltig lösning för alla ω så att $\cos(\omega L/c) \neq 0$.

$$\cos(\omega L/c) = 0 \implies \frac{\omega L}{c} = \frac{\pi}{2} + k\pi \implies \omega = \frac{c\pi}{L}(k + \frac{1}{2}).$$

3.69

Problemet är vinkeloberoende, så vi kan sätta $u = u(r,t)$. Detta ger oss problemet

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2\Delta u = 0, & 0 < r < R,\ t > 0, \\ u(R,t) = A\sin\omega t = \operatorname{Im}\left(Ae^{i\omega t}\right), & t > 0. \end{cases}$$

Vi söker en lösning på formen $u(r,t) = H(r)e^{i\omega t}$ och tar sedan imaginärdelen av det vi kommer fram till. Insättning ($\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r$):

$$0 = u_{tt} - c^2\Delta u = \left(-\omega^2 H(r) - c^2 H''(r) - \frac{c^2}{r}H'(r)\right)e^{i\omega t} \implies$$

$$\implies H'' + \frac{1}{r}H' + \frac{\omega^2}{c^2}H = 0.$$

Detta känner vi igen som Bessels differentialekvation, med $\nu = 0$ och $\lambda = \omega/c$, vilket betyder att

$$H(r) = aJ_0(\frac{\omega}{c}r) + bY_0(\frac{\omega}{c}r),$$

men eftersom lösningen måste vara begränsad kan vi säga att $b = 0$. Det andra villkoret ger att

$$H(R) = A \implies aJ_0(\frac{\omega}{c}R) = A \implies a = \frac{A}{J_0(\omega R/c)} \implies$$

$$\implies u(r,t) = H(r)e^{i\omega t} = A\frac{J_0(\omega r/c)}{J_0(\omega R/c)}e^{i\omega t} \implies$$

$$\implies \operatorname{Im}\left(A\frac{J_0(\omega r/c)}{J_0(\omega R/c)}e^{i\omega t}\right) = A\frac{J_0(\omega r/c)}{J_0(\omega R/c)}\sin\omega t.$$

Resonansfrekvenserna ges av att

$$J_0(\omega R/c) = 0 \implies \omega R/c = \alpha_{0,k} \implies \omega = \frac{c\alpha_{0,k}}{R}.$$

Kapitel 4

4.1

Fouriertransform i x-led ger att, $\mathcal{F}_x(u) = \hat{u}$,

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \\ u(x,0) = e^{-x^2} \end{cases} \xRightarrow{\mathcal{F}_x} \begin{cases} \hat{u}_t - (i\xi)^2\hat{u} = 0, \\ \hat{u}(\xi,0) = \sqrt{\pi}e^{-\xi^2/4}. \end{cases}$$

$$\hat{u}_t + \xi^2\hat{u} = 0 \implies \hat{u}(\xi,t) = c(\xi)e^{-\xi^2 t},$$

där

$$\hat{u}(\xi,0) = c(\xi) = \sqrt{\pi}e^{-\xi^2/4} \implies \hat{u}(\xi,t) = \sqrt{\pi}e^{-\xi^2(t+1/4)}.$$

Vi behöver nu bara inverstransformera detta för att få ett svar.

f	$\mathcal{F}_x(f)$
e^{-x^2}	$\sqrt{\pi}e^{-\xi^2/4}$
$e^{-(x/\sqrt{t+1/4})^2}$	$\sqrt{t+1/4}\sqrt{\pi}e^{-(\xi\sqrt{t+1/4})^2/4} = \sqrt{t+1/4}\sqrt{\pi}e^{-\xi^2(t+1/4)/4}$
$\frac{1}{\sqrt{t+1/4}}e^{-(x/(2\sqrt{t+1/4}))^2}$	$2\sqrt{\pi}e^{-\xi^2(t+1/4)}$

Alltså är

$$u(x,t) = \mathcal{F}_x^{-1}(\hat{u}) = \frac{1}{2\sqrt{t+1/4}}e^{-(x/(2\sqrt{t+1/4}))^2} = \frac{1}{\sqrt{4t+1}}e^{-x^2/(4t+1)}.$$

Man hade också kunnat falta med värmekärnan ($G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a t}}e^{-x^2/(4at)}$, $a = 1$), eftersom vi har ett problem som är definierat på hela $\mathbb{R}$.

4.3

Lösning finns redan.

4.5

$$g(x) = u(x,0) = \sin^2 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 = -\frac{1}{4}(e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{2ix} - \frac{1}{4}e^{-2ix} \xRightarrow{\mathcal{F}} \hat{g}(\xi) = \frac{1}{2}\cdot 2\pi\delta(\xi) - \frac{1}{4}\cdot 2\pi\delta(\xi-2) - \frac{1}{4}\cdot 2\pi\delta(\xi+2) =$$

$$= \frac{\pi}{2}(2\delta(\xi) - \delta(\xi-2) - \delta(\xi+2)).$$

Fouriertransformering av Schrödingerekvationen i x-led ger

$$\begin{cases} u_t - iu_{xx} = 0, \\ u(x,0) = g(x) \end{cases} \xRightarrow{\mathcal{F}_x} \begin{cases} \hat{u}_t - i(i\xi)^2\hat{u} = 0, \\ \hat{u}(x,0) = \hat{g}(x) \end{cases} \implies$$

$$\implies \hat{u}_t + i\xi^2\hat{u} = 0 \implies \hat{u}(\xi,t) = c(\xi)e^{-i\xi^2 t},$$

begynnelsevillkoret $\hat{u}(x,0) = \hat{g}(x)$ ger direkt att $c(\xi) = \hat{g}(\xi)$.

$$\hat{u}(\xi,t) = \frac{\pi}{2}(2\delta(\xi) - \delta(\xi-2) - \delta(\xi+2))e^{-i\xi^2 t} =$$

$$= \frac{\pi}{2}(2\delta(\xi)e^{-i\cdot 0^2\cdot t} - \delta(\xi-2)e^{-i\cdot 2^2\cdot t} - \delta(\xi+2)e^{-i\cdot(-2)^2\cdot t}) =$$

$$= \frac{\pi}{2}(2\delta(\xi) - e^{-4it}\delta(\xi-2) - e^{-4it}\delta(\xi+2)).$$

För Fouriertransformen i x-led är t en konstant, så inverstransformen ger tillbaka termerna i $g(x)$, men med tidsberoende koefficienter.

$$u(x,t) = \mathcal{F}_x^{-1}(\hat{u}) = \frac{1}{2} - e^{-4it}\cdot\frac{1}{4}e^{2ix} - e^{-4it}\cdot\frac{1}{4}e^{-2ix} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-4it}\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-4it}\cos 2x.$$

4.6

För vågekvationen är Laplacetransformen ofta ett bra alternativ. Laplacetransformen i x-led ($\mathcal{L}_x(u) = U$):

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \delta(x) \end{cases} \overset{\mathcal{L}_x}{\Longrightarrow}$$

$$\overset{\mathcal{L}_x}{\Longrightarrow} \begin{cases} U_{tt} - s^2 U = 0, \\ U(s,0) = 0, \quad U_t(s,0) = 1 \end{cases} \Longrightarrow U(s,t) = a(s)e^{st} + b(s)e^{-st} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} U(s,0) = 0, \\ U_t(s,0) = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a(s) + b(s) = 0, \\ sa(s) - sb(s) = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a(s) = \frac{1}{2s}, \\ b(s) = -\frac{1}{2s} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow U(s,t) = \frac{1}{2s}e^{st} - \frac{1}{2s}e^{-st}.$$

f	$\mathcal{L}_x(f)$
$\theta(x)$	$\frac{1}{s}$
$\theta(x-t)$	$\frac{1}{s}e^{-st}$
$\theta(x+t)$	$\frac{1}{s}e^{st}$

Alltså är

$$u(x,t) = \mathcal{L}_x^{-1}(U) = \frac{1}{2}(\theta(x+t) - \theta(x-t)).$$

Man kan också använda d'Alemberts formel för att lösa detta problem snabbt, men det hör bättre hemma i kapitel 7.

4.7

När man väljer vilken transform man vill använda för att lösa problem är det bra att titta på begynnelsevärdena/randvärden och se om det är några kända Laplace- eller Fouriertransformer. Till exempel i denna uppgift har vi $1/(1+x^2)$ som har en känd Fouriertransform, men ingen Laplacetransform (åtminstone som står i våra tabeller). Alltså är Fouriertransformen bättre lämpad för denna uppgift. Om man istället tittar på föregående uppgift ser man att begynnelsehastigheten ska vara δ, och vid tidsderivering kan man tänka sig att ett s trillar ut, och det betyder att begynnelsehastigheten ungefär motsvarar ett begynnelsevillkor på formen $1/s$, och det är en känd Laplacetransform, men ingen Fouriertransform (man behöver göra något med principalvärden, vilket man helst undviker).

För denna uppgift tillämpar vi nu Fouriertransformen i x-led (som resonemanget ovan talar för), där $\mathcal{F}_x(u) = \hat{u}$,

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \\ u(x,0) = \frac{1}{1+x^2} \end{cases} \overset{\mathcal{F}_x}{\Longrightarrow} \begin{cases} -\xi^2 \hat{u} + \hat{u}_{yy} = 0, \\ \hat{u}(\xi,0) = \pi e^{-|\xi|} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \hat{u}(\xi,y) = a(\xi)e^{y\xi} + b(\xi)e^{-y\xi} = [y > 0 \implies |y| = y] = c(\xi)e^{y|\xi|} + d(\xi)e^{-y|\xi|}.$$

För att kunna inverstransformera behöver vi nödvändigtvis att vår funktion är begränsad, och alltså måste vi välja $c(\xi) = 0$ (den termen växer obegränsat). Randvillkoret ger direkt att $d(\xi) = \hat{u}(\xi,0)$, och alltså är

$$\hat{u}(\xi,y) = \pi e^{-|\xi|} e^{-y|\xi|} = \pi e^{-(y+1)|\xi|}.$$

f	$\mathcal{F}_x(f)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\pi e^{-\lvert\xi\rvert}$
$\frac{1}{1+(x/(y+1))^2}$	$(y+1)\cdot \pi e^{-\lvert(y+1)\xi\rvert} = \pi(y+1)e^{-(y+1)\lvert\xi\rvert}$

Detta ger oss lösningen

$$u(x,y) = \mathcal{F}_x^{-1}\hat{u} = \frac{1}{y+1}\frac{1}{1+(x/(y+1))^2} = \frac{y+1}{x^2+(y+1)^2}.$$

Man hade också kunnat lösa denna uppgift genom att utnyttja Poissons integralformel för halvplanet, (falta $u(x,0)$ med Poissonkärnan $P(x,y) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{x^2+y^2}$).

4.8

Den yttre punktkraften i origo representeras av $\delta(x)$ i högerledet av vågekvationen, eftersom alla konstanter får sättas till 1 behöver vi inte tänka på vilka konstanter vi ska ha tillsammans med den. Strängen börjar outböjd, vilket betyder att $u(x,0) = 0$, och begynnelsehastigheten är given som $u_t(x,0) = h(x) = \frac{1}{2}\theta(x)$. Detta ger oss problemet

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \delta(x), & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \frac{1}{2}\theta(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Detta problem kan antingen lösas med d'Alemberts formel (men man måste homogenisera PDE:n), eller Laplacetransformen (finns fler sätt också, men dessa är mest uppenbara).

Laplacetransformering i x-led ($\mathcal{L}(u) = U$) ger

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \delta(x), \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \frac{1}{2}\theta(x) \end{cases} \xRightarrow{\mathcal{L}_x} \begin{cases} U_{tt} - s^2 U = 1, \\ U(s,0) = 0, \quad U_t(s,0) = \frac{1}{2s}. \end{cases}$$

Differentialekvationen har den homogena lösningen $U_h = a(s)e^{st} + b(s)e^{-st}$, och partikulärlösningen är en konstant (som beror på s) $U_p = c(s) \implies c(s) = -1/s^2$. Vi får då

$$U(s,t) = U_h + U_p = a(s)e^{st} + b(s)e^{-st} - \frac{1}{s^2} \implies$$

$$\implies \begin{cases} U(s,0) = 0, \\ U_t(s,0) = \frac{1}{2s} \end{cases} \implies \begin{cases} a(s) + b(s) - \frac{1}{s^2} = 0, \\ sa(s) - sb(s) = \frac{1}{2s} \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{cases} a(s) + b(s) = \frac{1}{s^2}, \\ a(s) - b(s) = \frac{1}{2s^2} \end{cases} \implies \begin{cases} a(s) = \frac{3}{4s^2}, \\ b(s) = \frac{1}{4s^2} \end{cases} \implies U(s,t) = \frac{3}{4s^2}e^{st} + \frac{1}{4s^2}e^{-st} - \frac{1}{s^2}.$$

f	$\mathcal{L}_x(f)$
$\theta(x)$	$\frac{1}{s}$
$x\theta(x)$	$\frac{1}{s^2}$
$(x-t)\theta(x-t)$	$\frac{1}{s^2}e^{-st}$
$(x+t)\theta(x+t)$	$\frac{1}{s^2}e^{st}$

Detta ger oss lösningen

$$u(x,t) = \mathcal{L}_x^{-1}(U) = \frac{3}{4}(x+t)\theta(x+t) + \frac{1}{4}(x-t)\theta(x-t) - x\theta(x).$$

4.10

När området är halvoändligt kan vi inte bara börja Laplace:a eller Fourier:a hej vilt, utan vi måste första utvidga problemet till ett som är heloändligt, alltså $x \in \mathbb{R}$. Detta görs antingen genom att utvidga jämnt, eller udda, och det är beteendet i randen som avgör vilken typ av utvidgning man gör. Dirichletvillkor innebär att man gör en udda utvidgning, och Neumannvillkor innebär att man gör en jämn utvidgning. Tanken är att man vill att sin funktion ska vara så snäll som möjligt och om man har ett homogent Dirichletvillkor i $x = 0$ kommer man att undvika "veck" i funktionen genom att göra en udda utvidgning (jämför $y = x$, med $|x|$). För ett homogent Neumannvillkor kommer istället funktionen att vara platt i $x = 0$, och då är det naturligt att utvidga jämnt - om man utvidgar udda kommer man att införa ett språng, vilket inte är så snällt (kontinuerligt).

a)

Dirichletvillkoret talar för att vi ska göra en udda utvidgning, och eftersom det är homogent kommer vi inte att plocka upp några inhomogena termer i PDE:n. Vi behöver också utvidga begynnelsevillkoret udda. Vi får nu det utvidgade problemet

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & t > 0, \ x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = \delta_1 - \delta_{-1} = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Eftersom vi har deltadistributioner i vårt begynnelsevillkor är det smidigt att använda lösningsformeln med värmekärnan för att lösa detta problem (δ är enhet vid faltning). Lösningen ges av

$$u(x,t) = (G(\,\cdot\,,t) * g)(x),$$

där

$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a t}} e^{-x^2/(4at)},\ a = 1 \implies$$

$$u(x,t) = (G(\,\cdot\,,t) * (\delta_1 - \delta_{-1}))(x) = G(x-1,t) - G(x+1,t) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \left(e^{-(x-1)^2/(4t)} - e^{-(x+1)^2/(4t)} \right).$$

b)

Nu har vi istället ett homogent Neumannvillkor, vilket fordrar en jämn utvidgning:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = \delta_1 + \delta_{-1} = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Enda skillnaden (eftersom det är ett homogent Neumannvillkor) är att vi får en jämn utvidgning av begynnelsevillkoret, och på samma sätt får vi att

$$u(x,t) = (G(\,\cdot\,,t) * (\delta_1 + \delta_{-1}))(x) = G(x-1,t) + G(x+1,t) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \left(e^{-(x-1)^2/(4t)} + e^{-(x+1)^2/(4t)} \right).$$

4.14

Att röret är slutet kan beskrivas med ett homogent Neumannvillkor. Vidare kan begynnelsevillkoret skrivas med stegfunktioner: $u(x,0) = u_0(\theta(x) - \theta(x-a))$. Insättning av detta i diffusionekvationen ger problemet

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0, & t > 0,\ x > 0, \\ u_x(0,t), & t > 0, \\ u(x,0) = u_0(\theta(x) - \theta(x-a)), & x > 0. \end{cases}$$

Eftersom vi har ett Neumannvillkor speglar vi jämnt. Homogeniteten i villkoret gör också att PDE:n förblir homogen. Begynnelsevillkoret utvidgas jämnt till $u(x,0) = u_0(\theta(x+a) - \theta(x-a))$. Vi har nu problemet

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(\theta(x+a) - \theta(x-a)), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Detta kan lösas med både Fouriertransformen och Laplacetransformen, och när man har bestämt den transformerade funktionen kommer man att ha en produkt mellan två kända transformer. Som vi vet från räkneregler är produkter i den transformerade domänen samma sak som faltningar. Enligt mig är det dock lättare att hoppa direkt till faltningen, (man hade annars fått att koefficienten för den transformerade funktionen är $\mathcal{L}_x(u(x,0))$ eller $\mathcal{F}_x(u(x,0))$, och den andra faktorn i produkten kommer att vara

lösningen till $U_t - s^2 DU = 0 \implies c(s)e^{s^2 D}$, eller motsvarande för Fouriertransformen, alltså kommer lösningen att vara faltningen av inverstransformen av dessa två). Genom att utnyttja värmekärnan (diffusionskärnan?) kan vi direkt skriva upp lösningen, om vi sätter $a = D$.

$$u(x,t) = (G(\,\cdot\,,t) * u(\,\cdot\,,0))(x) = \left[G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-x^2/(4Dt)}\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-(x-\alpha)^2/(4Dt)} u_0(\theta(\alpha+a) - \theta(\alpha-a))\, d\alpha =$$

$$= \int_{-a}^{a} \frac{u_0}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-(x-\alpha)^2/(4Dt)}\, d\alpha = \begin{bmatrix} \beta = \dfrac{x-\alpha}{\sqrt{4Dt}} \implies d\beta = -\dfrac{d\alpha}{\sqrt{4Dt}} \\ \alpha:\ -a \to a \\ \beta:\ \dfrac{x+a}{\sqrt{4Dt}} = \beta_1 \to \dfrac{x-a}{\sqrt{4Dt}} = \beta_0 \end{bmatrix} =$$

$$= \int_{\beta_1}^{\beta_0} \frac{-u_0}{\sqrt{\pi}} e^{-\beta^2}\, d\beta = \frac{u_0}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\beta_0}^{\beta_1} e^{-\beta^2}\, d\beta = \frac{u_0}{2}\left[\operatorname{erf}(\beta)\right]_{\beta_0}^{\beta_1} =$$

$$= \frac{u_0}{2}\left(\operatorname{erf}\left(\frac{x+a}{\sqrt{4Dt}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-a}{\sqrt{4Dt}}\right)\right).$$

4.15

a)

Koncentrerat över hela ytan innebär att vi bara behöver använda djupet som rumsvariable, vi kan alltså räkna endimensionellt. Att det inte sker någon diffusion till luft kan vi tolka som ett homogent Neumannvillkor (ytan vid $x = 0$), och begynnelsevillkoret kan beskrivas med en deltadistribution, eftersom vi i princip har en koncentration som är i en punkt. Det sker inget ytterligare läckage heller, så PDE:n är homogen. Detta ger oss problemet

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0, & t > 0,\ x > 0, \\ u_x(0,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = c\delta(x), & x > 0. \end{cases}$$

b)

Vi har ett homogent Neumannvillkor, så vi speglar jämnt. För att spegla begynnelsevillkoret jämnt får man se det som att vi från början har $\delta_\varepsilon(x) \implies u(x,0) = \delta_\varepsilon(x) + \delta_{-\varepsilon}(x) \to 2\delta(x),\ \varepsilon \to 0$. Vi får nu följande problem på hela $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = 2c\delta(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

På samma sätt som i 4.14 kan vi lösa detta genom att falta med $G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-x^2/(4Dt)}$ och sedan enbart titta på lösningen för $x > 0$ (eftersom det är det området som vårt ursprungliga problem är på).

$$u(x,t) = (G(\,\cdot\,,t) * 2c\delta)(x) = 2cG(x,t) = \frac{2c}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-x^2/(4Dt)}\ x > 0.$$

4.16

På samma sätt som i 4.15 räknar vi endimensionellt. Vid $t = 0$ har inget gift kommit ut än, vilket betyder att $u(x, 0) = 0$. Därefter, för $t > 0$, är koncentrationen konstant vid ytan, och det kan vi skriva som Dirichletvillkoret $u(0, t) = k$. Vi får nu modellen

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0, & t > 0,\ x > 0, \\ u(0,t) = k,\ t > 0, \\ u(x,0) = 0,\ x > 0. \end{cases}$$

Det finns två huvudsakliga tillvägagångssätt för detta problem.

Det första går ut på att använda speglingslemmat (lemma D.3), vilket kommer att ge en inhomogen del i PDE:n eftersom randvillkoret är inhomogent. Man utvidgar då udda, eftersom det är ett Dirichletvillkor. Problemet som då erhålls är

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = -2Du(0,t)\delta'(x) = -2kD\delta'(x), & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Detta kan lösas med lämplig transform.

Det andra alternativet bygger istället på att man först homogeniserar randvillkoret, genom att sätta $v(x, t) = u(x, t) - k$, och sedan utvidgar udda. Det som är fördelaktigt med denna metod är att man slipper använda lemma D.3 som är lite bökigt, och dessutom blir räkningarna lättare. Jag kommer därför att fortgå med detta andra sätt. Problemet man har efter homogeniseringen är

$$\begin{cases} v_t - Dv_{xx} = 0, & t > 0,\ x > 0, \\ v(0,t) = 0,\ t > 0, \\ v(x,0) = -k \end{cases} \implies [\text{udda spegling}] \implies$$

$$\implies \begin{cases} v_t - Dv_{xx} = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ v(x,0) = -k\theta(x) + k(1 - \theta(x)), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Begynnelsevillkoret blir som det blir eftersom det ska vara $-k$, då $x > 0$, och k, då $x < 0$. Denna utformning av problem är vi nu välbekanta med, så vi vet att lösningen ges av

$$v(x,t) = (G(\,\cdot\,,t) * v(\,\cdot\,,0))(x) = \left[\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-x^2/(4Dt)}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-\alpha,t)u(\alpha,0)\,d\alpha =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-(x-\alpha)^2/(4Dt)}(-k\theta(x) + k(1-\theta(x)))\,d\alpha =$$

$$= -\frac{k}{\sqrt{4\pi Dt}}\left(\int_0^{\infty} e^{-(x-\alpha)^2/(4Dt)}\,d\alpha - \int_{-\infty}^{0} e^{-(x-\alpha)^2/(4Dt)}\,d\alpha\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} \beta = \dfrac{x-\alpha}{\sqrt{4Dt}} \implies d\beta = -\dfrac{d\alpha}{\sqrt{4Dt}} \\ \alpha:\ 0 \to \infty \\ \beta:\ \dfrac{x}{\sqrt{4Dt}} = \beta_1 \to -\infty \end{bmatrix} \bigcup \begin{bmatrix} \beta = \dfrac{x-\alpha}{\sqrt{4Dt}} \implies d\beta = -\dfrac{d\alpha}{\sqrt{4Dt}} \\ \alpha:\ -\infty \to 0 \\ \beta:\ \infty \to \dfrac{x}{\sqrt{4Dt}} = \beta_1 \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{k}{\sqrt{\pi}}\left(\int_{\beta_1}^{-\infty} -e^{-\beta^2}\,d\beta - \int_{\infty}^{\beta_1} -e^{-\beta^2}\,d\beta\right) =$$

$$= -\frac{k}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\beta_1} e^{-\beta^2}\,d\beta - \int_{\beta_1}^{\infty} e^{-\beta^2}\,d\beta\right) = -\frac{k}{2}\left([\mathrm{erf}(\beta)]_{-\infty}^{\beta_1} - [\mathrm{erf}(\beta)]_{\beta_1}^{\infty}\right) =$$

$$= [\mathrm{erf}(-\infty) = -1,\ \mathrm{erf}(\infty) = 1] =$$

$$= -\frac{k}{2}\left(\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right) - (-1) - \left(1 - \mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right)\right)\right) = -k\,\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right) \implies$$

$$\implies v(x,t) = u(x,t) - k = -k\,\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right) \implies$$

$$\implies u(x,t) = k\left(1 - \mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right)\right),$$

och detta är lösningen för $x > 0$.

Om man inte känner igen att man kan gå direkt till faltningen kan man också transformera ekvationen med exempelvis Laplacetransformen, och när man sedan inverstransformerar kommer faltningen att trilla ut. Man hade också kunnat angripa detta problem direkt genom att göra en ensidig Laplacetransform. Den någorlunda suspekta notationen vid variabelbytet är tänkt att visa att det är olika gränser i dem två integralerna.

4.17

Lösning finns redan, men integreringen kan göras enligt

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\left(-\int_{-\infty}^{x}(x-\alpha)e^{-\alpha^2/(4t)}\,d\alpha + \int_{x}^{\infty}(x-\alpha)e^{-\alpha^2/(4t)}\,d\alpha\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\left(-\int_{-\infty}^{x} xe^{-\alpha^2/(4t)}\,d\alpha + \int_{-\infty}^{x}\alpha e^{-\alpha^2/(4t)}\,d\alpha + \right.$$

$$\left. + \int_{x}^{\infty} xe^{-\alpha^2/(4t)}\,d\alpha - \int_{x}^{\infty}\alpha e^{-\alpha^2/(4t)}\,d\alpha\right) =$$

$$= -\frac{x}{2}\underbrace{\frac{2}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\alpha^2/(4t)}\,d\alpha}_{\mathrm{erf}} + \frac{\sqrt{4t}}{2\sqrt{\pi}}\left[-e^{-\alpha^2/(4t)}\right]_{-\infty}^{x} +$$

$$+\frac{x}{2}\underbrace{\frac{2}{\sqrt{4\pi t}}\int_{x}^{\infty} e^{-\alpha^2/(4t)}\,d\alpha}_{\mathrm{erf}} - \frac{\sqrt{4t}}{2\sqrt{\pi}}\left[-e^{-\alpha^2/(4t)}\right]_{x}^{\infty} =$$

$$= -\frac{x}{2}\left[\mathrm{erf}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{4t}}\right)\right]_{-\infty}^{x} - \sqrt{\frac{t}{\pi}}e^{-x^2/(4t)} + \frac{x}{2}\left[\mathrm{erf}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{4t}}\right)\right]_{x}^{\infty} - \sqrt{\frac{t}{\pi}}e^{-x^2/(4t)} =$$

$$= [\mathrm{erf}(-\infty) = -1,\ \mathrm{erf}(\infty) = 1] =$$

$$= -\frac{x}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4t}}\right) - \frac{x}{2} - 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}e^{-x^2/(4t)} + \frac{x}{2} - \frac{x}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4t}}\right) =$$

$$= -2\sqrt{\frac{t}{\pi}}e^{-x^2/(4t)} - x\,\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4t}}\right),$$

vilket är precis vad som står i lösningen.

4.20

a)

Först skriver vi $A\sin\omega t = \mathrm{Im}\left(Ae^{i\omega t}\right)$, vilket betyder att vi kan söka en lösning på formen $u(x,t) = H(x)e^{i\omega t}$ och sedan ta imaginärdelen av det vi får fram. Randvillkoret kommer nu att ges av att $H(0) = A$

$$0 = u_t - au_{xx} = (i\omega H(x) - aH''(x))e^{i\omega t} \implies H'' - \frac{i\omega}{a}H = 0 \implies$$

$$\implies H(x) = ce^{\sqrt{i\omega/a}x} + de^{-\sqrt{i\omega/a}x}.$$

Nu är det dags för lite funktionsteori. Vi vet att

$$i = e^{i\pi/2+2k\pi},$$

och alltså blir $\sqrt{i} = e^{i\pi/4+k\pi}$. Om man tar principalgrenen av roten, vilket är lättast, kommer man få att

$$\sqrt{i} = e^{i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \implies \sqrt{\frac{i\omega}{a}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\frac{\omega}{a}} = (1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2a}}.$$

Detta ger oss

$$H(x) = ce^{(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2a}}x} + de^{-(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2a}}x} = ce^{\sqrt{\frac{\omega}{2a}}x}e^{i\sqrt{\frac{\omega}{2a}}x} + de^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}x}e^{-i\sqrt{\frac{\omega}{2a}}x},$$

men eftersom vi betraktar ett fysikaliskt problem vill vi att vår lösning ska vara begränsad, och därför väljer vi $c = 0$. Detta lämnar

$$H(x) = de^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}x}e^{-i\sqrt{\frac{\omega}{2a}}x} \implies H(0) = A \implies d = A \implies$$

$$\implies u(x,t) = H(x)e^{i\omega t} = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}x}e^{-i\sqrt{\frac{\omega}{2a}}x}e^{i\omega t} = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}x}e^{i\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2a}}x\right)} =$$

$$= Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}x}(\cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2a}}x\right) + i\sin\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2a}}x\right)),$$

tar vi imaginärdelen får vi vår stationära lösning

$$u(x,t) = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}x}\sin\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2a}}x\right).$$

b)

Vi tittar på exponenten, och när den är -1 får vi det vi söker (då kommer det stå e^{-1} framför allting).

$$-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}x = -1 \implies x = \sqrt{\frac{2a}{\omega}}.$$

c)

Dygnsvariationen motsvarar att $T = 24 \cdot 3600 = 86400$ s, sambandet mellan vinkelfrekvens och period är $\omega = 2\pi/T$. Inträngingdjupet är det x som vi bestämde i b):

$$x = \sqrt{\frac{2a}{\omega}} = \sqrt{\frac{2a}{2\pi/T}} = \sqrt{\frac{aT}{\pi}} \approx 0,2 \text{ m}.$$

Tidsfasförskjutningen ges av att argumentet i sinus är 0:

$$\omega t - \underbrace{\sqrt{\frac{\omega}{2a}}x}_{=1,\ x=\sqrt{2a/\omega}} = 0 \implies t = \frac{1}{\omega} = \frac{T}{2\pi} \approx 3,8 \text{ h}.$$

d)

Nu är $T = 86400 \cdot 365 = 31536000$ s. Insättning ger $x \approx 4$ m, och $t \approx 58$ dygn.

Kapitel 5

5.1

Vi kan skriva om $u(x,0)$ med stegfunktioner: $u(x,0) = \theta(x+1) - \theta(x-1)$. Poissons integralformel för halvplanet ger nu att

$$u(x,y) = (P(\,\cdot\,,y) * u((\,\cdot\,,0)))(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x-\alpha,y)u(\alpha,0)\,d\alpha =$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\pi}\frac{y}{(x-\alpha)^2+y^2}\,d\alpha = \frac{1}{\pi y}\int_{-1}^{1}\frac{1}{((x-\alpha)/y)^2+1}\,d\alpha =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\arctan\frac{x-\alpha}{y}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{\pi}(\arctan\frac{x+1}{y} - \arctan\frac{x-1}{y}).$$

5.2

Vi skulle gärna vilja använda Poissons integralformel för enhetscirkeln, men nu har vi bara halva enhetscirkeln. Av denna andledning, och eftersom vi har Dirichletvillkor på randen, väljer vi att spegla udda i x-axeln. Tacksamt nog är funktionen 0 på x-axeln, så det händer inget konstigt när vi speglar där, utan den förblir 0. För resten av randen kommer vi få att funktionen är $g(\theta)$, då $0 < \theta < \pi$, och $-g(-\theta)$, då $-\pi < \theta < 0$. Låt den speglade funktionen på randen betecknas med $h(\theta)$. Vi använder oss nu av Poissons integralformel för enhetscirkeln:

$$u(r,\theta) = (P(r,\,\cdot\,) * h)(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} P(r,\theta-\alpha)h(\alpha)\,d\alpha =$$

$$= \int_0^{\pi} P(r,\theta-\alpha)g(\alpha)\,d\alpha + \underbrace{\int_{-\pi}^{0} P(r,\theta-\alpha)(-g(-\alpha))\,d\alpha}_{\beta=-\alpha} =$$

$$= \int_0^{\pi} P(r,\theta-\alpha)g(\alpha)\,d\alpha - \int_{\pi}^{0} P(r,\theta+\beta)g(\beta)\,(-d\beta) =$$

$$= \int_0^{\pi} P(r,\theta-\alpha)g(\alpha)\,d\alpha - \underbrace{\int_0^{\pi} P(r,\theta+\beta)g(\beta)\,d\beta}_{\alpha=\beta} =$$

$$= \int_0^{\pi} \left(P(r,\theta-\alpha)g(\alpha) - P(r,\theta+\alpha)g(\alpha)\right)\,d\alpha =$$

$$= \int_0^{\pi} g(\alpha)\left(P(r,\theta-\alpha) - P(r,\theta+\alpha)\right)\,d\alpha,$$

där

$$P(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta}.$$

5.4

a)

En potential definieras av att $-\Delta u = f$. En enhetskälla i origo kan skrivas som en deltadistribution:

$$-\Delta u = \delta_{(0,0)}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Detta känner vi igen som definitionen av fundamentallösningen i $\mathbb{R}^2$. Alltså kan vi skriva av lösningen från formelbladet:

$$u(x, y) = K(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}.$$

b)

Om man lusläser kapitel D hittar man på sida 361 att det nämns att δ' kan representera dipoler. Speciellt om vi vill ha en enhetsdipol i origo riktad längs den positiva x-axeln kan vi skriva det som $\frac{\partial}{\partial x}(\delta_{(0,0)}(x, y))$. Ställer vi upp differentialproblemet har vi att

$$-\Delta u = \frac{\partial}{\partial x}(\delta_{(0,0)}), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Detta är Poissons problem i hela planet, och alltså kan vi få lösningen genom att falta funktionen i högerledet med fundamentallösningen för $\mathbb{R}^2$.

$$u(x, y) = K * \frac{\partial}{\partial x}(\delta_{(0,0)}) = K_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{4\pi} \ln (x^2 + y^2)\right) = -\frac{1}{4\pi} \frac{2x}{x^2 + y^2} = -\frac{1}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Detta är dock minus det som står i facit, men det är inte särskilt viktigt, det viktiga är hur dipolen representeras matematiskt och att vi har $\pm$ svaret spelar ingen roll. När jag läste kursen hakade läraren upp sig på om det skulle vara + eller -, så det kanske är fel i facit.

5.9

Vi vill kunna utnyttja fundamentallösningar för att hitta en Greenfunktion (lösa problemet). Vi vet att fundamentallösningar uppfyller att $-\Delta K = \delta$, vilket betyder att vi kan translatera fundamentallösningen så att vi hamnar i den aktuella punkten, $(0, 0, a)$. Sedan måste vi också göra något för att vår funktion bli 0 på randen. En annan egenskap hos fundamentallösningar är att de skrivs med $|\boldsymbol{x}|$, alltså avstånd. Detta betyder att om vi väljer en punkt som har samma avstånd till randen som $(0, 0, a)$, kommer differensen mellan fundamentallösningnarna i dessa två punkter att ta ut varandra på randen (eftersom vi väljer punkter så att $|\boldsymbol{x}_1| = |\boldsymbol{x}|_2$). Denna mindre uppsats ska vara ett slags troliggörande för udda speglingar i randen. En sak att poängtera är att det inte spelar någon roll om vi ändrar hur funktion beter sig utanför randen eftersom vårt problem är bara relevant i området vi började med, så det spelar ingen roll om vi får δ i någon punkt utanför randen (eftersom vi inte är intresserade av hur lösningen ser ut där ändå).

Randen i denna uppgift är xy-planet, så vi speglar punkten $(0, 0, a)$ i xy-planet, vilket ger oss punkten $(0, 0, -a)$ (notera att dessa två punkter har samma avstånd till xy-planet

($|(0,0,a)| = |(0,0,-a)| = a$)). Alltså kommer vår Greenfunktion att ges av följande differens av fundamentallösningar

$$u(x,y,z) = K((x,y,z)-(0,0,a)) - K((x,y,z)-(0,0,-a)) =$$

$$= K(x,y,z-a) - K(x,y,z+a) = \frac{1}{4\pi|(x,y,z-a)|} - \frac{1}{4\pi|(x,y,z+a)|} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}\right).$$

5.10

a)

Svaret står i formelsamlingen:

$$\begin{cases} -\Delta u = \delta_{(\alpha,\beta)}, \text{ i } \Omega, \\ u = 0, \text{ på } \partial\Omega \end{cases} \implies \begin{cases} -\Delta u = \delta_{(\alpha,\beta)}, \\ u(x,0) = 0, \ x > 0, \\ u(0,y) = 0, \ y > 0. \end{cases}$$

b)

Vi speglar för att få ett problem i hela planet. Vi börjar med att spegla udda i x-axeln. Låt $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha,\beta)$. När vi speglar i x-axeln kommer vi att få den speglade punkten $\boldsymbol{\alpha}_1 = (\alpha,-\beta)$. Det gäller nu att $K(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\alpha}) - K(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\alpha}_1)$ är 0 på x-axeln. Vi behöver nu spegla detta speglade problem i y-axeln för att kan uppfylla det andra randvillkoret också. När vi gör detta får vi två nya speglade punkter: $\boldsymbol{\alpha}_2 = (-\alpha,\beta)$ (spegling av $\boldsymbol{\alpha}$ i y-axeln), och $\boldsymbol{\alpha}_3 = (-\alpha,-\beta)$ (spegling av $\boldsymbol{\alpha}_1$ i y-axeln). Sammanställt får vi nu Greenfunktionen

$$G((x,y),(\alpha,\beta)) = K(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\alpha}) - K(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\alpha}_1) - (K(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\alpha}_2) - K(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\alpha}_3)) =$$

$$= K(x-\alpha,y-\beta) - K(x-\alpha,y+\beta) - K(x+\alpha,y-\beta) + K(x+\alpha,y+\beta) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left(\ln|(x-\alpha,y-\beta)| - \ln|(x-\alpha,y+\beta)| - \right.$$
$$\left. - \ln|(x+\alpha,y-\beta)| + \ln|(x+\alpha,y+\beta)|\right) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left(\ln\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} - \ln\sqrt{(x-\alpha)^2+(y+\beta)^2} - \right.$$
$$\left. - \ln\sqrt{(x+\alpha)^2+(y-\beta)^2} + \ln\sqrt{(x+\alpha)^2+(y+\beta)^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\left(\ln\left((x-\alpha)^2+(y-\beta)^2\right) - \ln\left((x-\alpha)^2+(y+\beta)^2\right) - \right.$$
$$\left. - \ln\left((x+\alpha)^2+(y-\beta)^2\right) + \ln\left((x+\alpha)^2+(y+\beta)^2\right)\right).$$

c)

Huvudsatsen ger att

$$u(x,y) = \iint_\Omega G((x,y),(\alpha,\beta))f(\alpha,\beta)\,d\alpha d\beta - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}_{(\alpha,\beta)}}((x,y),(\alpha,\beta))\tilde{g}(\alpha,\beta)\,dS_{(\alpha,\beta)},$$

där $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x,y > 0\}$, och $\tilde{g}(x,y) = \begin{cases} g(x), & x > 0,\ y = 0, \\ 0, & x = 0,\ y > 0 \end{cases} \implies$

$$\iint_\Omega G((x,y),(\alpha,\beta))f(\alpha,\beta)\,d\alpha d\beta = \int_0^\infty \int_0^\infty G((x,y),(\alpha,\beta))f(\alpha,\beta)\,d\alpha d\beta,$$

och eftersom funktionen är noll på den ena randdelen (då $x = 0$) kommer $dS_{(\alpha,\beta)} = d\alpha$ (eftersom det är bara x som varierar på den nollskilda randdelen). $\boldsymbol{n}_{(\alpha,\beta)}$ ska vara den utåtriktade enhetsnormalen, och på randen $y = 0,\ x > 0$ kommer den att ges av $\boldsymbol{n}_{(\alpha,\beta)} = (0,-1)$, vilket betyder att

$$\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}_{(\alpha,\beta)}} = \boldsymbol{n}_{(\alpha,\beta)} \cdot \nabla_{(\alpha,\beta)} G = (0,-1) \cdot \nabla_{(\alpha,\beta)} G = -\frac{\partial G}{\partial \beta}((x,y),(\alpha,\beta)) \implies$$

$$\implies \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}_{(\alpha,\beta)}}((x,y),(\alpha,\beta))\tilde{g}(\alpha,\beta)\,dS_{(\alpha,\beta)} = -\int_0^\infty \frac{\partial G}{\partial \beta}((x,y),(\alpha,0))g(\alpha)\,d\alpha,$$

eftersom $\beta = 0$ när vi integrerar längs x-axeln. Det som återstår alltså att beräkna $\frac{\partial G}{\partial \beta}$.

$$G((x,y),(\alpha,\beta)) = -\frac{1}{4\pi}\left(\ln\left((x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2\right) - \ln\left((x-\alpha)^2 + (y+\beta)^2\right) - \right.$$

$$\left. - \ln\left((x+\alpha)^2 + (y-\beta)^2\right) + \ln\left((x+\alpha)^2 + (y+\beta)^2\right)\right) \implies$$

$$\implies \frac{\partial G}{\partial \beta}((x,y),(\alpha,\beta)) = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{-2(y-\beta)}{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} - \frac{2(y+\beta)}{(x-\alpha)^2 + (y+\beta)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{-2(y-\beta)}{(x+\alpha)^2 + (y-\beta)^2} + \frac{2(y+\beta)}{(x+\alpha)^2 + (y+\beta)^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{y-\beta}{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} - \frac{y+\beta}{(x-\alpha)^2 + (y+\beta)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{y-\beta}{(x+\alpha)^2 + (y-\beta)^2} + \frac{y+\beta}{(x+\alpha)^2 + (y+\beta)^2}\right) \implies$$

$$\implies \frac{\partial G}{\partial \beta}((x,y),(\alpha,0)) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{y}{(x-\alpha)^2 + y^2} - \frac{y}{(x-\alpha)^2 + y^2} + \frac{y}{(x+\alpha)^2 + y^2} + \frac{y}{(x+\alpha)^2 + y^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{y}{(x-\alpha)^2 + y^2} - \frac{y}{(x+\alpha)^2 + y^2}\right).$$

Vi kan nu äntligen skriva upp lösningen till problemet

$$u(x,y) = \iint_\Omega G((x,y),(\alpha,\beta))f(\alpha,\beta)\,d\alpha d\beta - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}_{(\alpha,\beta)}}((x,y),(\alpha,\beta))\tilde{g}(\alpha,\beta)\,dS_{(\alpha,\beta)} =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty G((x,y),(\alpha,\beta)) f(\alpha,\beta)\, d\alpha d\beta + \int_0^\infty \frac{\partial G}{\partial \beta}((x,y),(\alpha,0)) g(\alpha)\, d\alpha =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty G((x,y),(\alpha,\beta)) f(\alpha,\beta)\, d\alpha d\beta +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{y}{(x-\alpha)^2 + y^2} - \frac{y}{(x+\alpha)^2 + y^2} \right) g(\alpha)\, d\alpha.$$

5.11

Eftersom huvudsatsen är jobbig att använda, nyttjar vi istället superposition. Betrakta problemen

$$\begin{cases} -\Delta u_A = \delta_{(1,1)}(x,y), & x > 0,\ y > 0, \\ u_A(x,0) = 0, & x > 0, \\ u_A(0,y) = 0, & y > 0, \end{cases}$$

och

$$\begin{cases} -\Delta u_B = 0, & x > 0,\ y > 0, \\ u_B(x,0) = 0, & x > 0, \\ u_B(0,y) = \delta_1(y), & y > 0. \end{cases}$$

Vi får vår lösning av superposition,

$$u = u_A + u_B.$$

u_A är helt enkelt Greenfunktionen för kvartsplanet i punkten $(\alpha,\beta) = (1,1)$. Denna Greenfunktion bestämdes i föregående uppgift med hjälp av ett par udda speglingar och vi fann att

$$G((x,y),(\alpha,\beta)) = -\frac{1}{4\pi} \big(\ln((x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2) - \ln((x-\alpha)^2 + (y+\beta)^2) -$$

$$- \ln((x+\alpha)^2 + (y-\beta)^2) + \ln((x+\alpha)^2 + (y+\beta)^2) \big) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \ln \frac{\big((x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2\big)\big((x+\alpha)^2 + (y+\beta)^2\big)}{\big((x-\alpha)^2 + (y+\beta)^2\big)\big((x+\alpha)^2 + (y-\beta)^2\big)} \implies$$

$$\implies u_A(x,y) = G((x,y),(1,1)) = -\frac{1}{4\pi} \ln \frac{\big((x-1)^2 + (y-1)^2\big)\big((x+1)^2 + (y+1)^2\big)}{\big((x-1)^2 + (y+1)^2\big)\big((x+1)^2 + (y-1)^2\big)}.$$

Vi tycker också att problem B är ganska likt Dirichlets problem för ett halvplan. För att få det väldigt likt speglar vi udda i x-axeln. Eftersom funktionen är 0 på x-axeln dyker det inte upp några konstigheter. Speglingen ger oss det utvidgade problemet

$$\begin{cases} -\Delta u_B = 0, & x > 0,\ y \in \mathbb{R}, \\ u_B(0,y) = \delta_1(y) - \delta_{-1}(y), & y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Detta är Dirichlets problem för ett halvplan, vilket vi kan lösa med Poissonkärnan för ett halvplan. Notera dock att x och y har bytt roller för detta problem jämfört med Poissonkärnan i formelbladet. Den Poissonkärnan vi vill använda är

$$P(x,y) = \frac{1}{\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Vi får nu u_B genom att falta:

$$u_B(x,y) = (P(x,\,\cdot\,) * u(0,\,\cdot\,))(y) = (P(x,\,\cdot\,) * (\delta_1 - \delta_{-1}))(y) = P(x,y-1) - P(x,y+1) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{x^2+(y-1)^2} - \frac{x}{x^2+(y+1)^2}\right) \implies$$

$$\implies u(x,y) = u_A + u_B =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\big((x-1)^2+(y-1)^2\big)\big((x+1)^2+(y+1)^2\big)}{\big((x-1)^2+(y+1)^2\big)\big((x+1)^2+(y-1)^2\big)} +$$

$$+\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{x^2+(y-1)^2} - \frac{x}{x^2+(y+1)^2}\right).$$

5.12

a)

Att värmemängden q avges av ett rör i punkten (a,a) innebär att källan i högerledet i värmeledningsekvationen är $k = q\delta_{(a,a)}$. För ett stationärt problem är $u_t = 0$. Temperaturen är 0 längs väggarna, så vi har homogena Dirichletvillkor längs randen. Detta ger oss problemet

$$\begin{cases} -a\Delta u = \frac{aq}{\lambda}\delta_{(a,a)}, & x>0,\ y>0, \\ u = 0, & \text{på randen} \end{cases} \implies \begin{cases} -\Delta u = \frac{q}{\lambda}\delta_{(a,a)}, & x>0,\ y>0, \\ u(x,0) = 0, & x>0, \\ u(0,y) = 0, & y>0. \end{cases}$$

Lösningen till detta problem är Greenfunktionen för kvartsplanet i punkten $(\alpha,\beta) = (a,a)$, multiplicerat med q/λ. Denna Greenfunktion bestämdes i 5.10.

$$G((x,y),(\alpha,\beta)) = -\frac{1}{4\pi}\big(\ln((x-\alpha)^2+(y-\beta)^2) - \ln((x-\alpha)^2+(y+\beta)^2) -$$

$$-\ln((x+\alpha)^2+(y-\beta)^2) + \ln((x+\alpha)^2+(y+\beta)^2)\big) \implies$$

$$\implies G((x,y),(a,a)) = -\frac{1}{4\pi}\big(\ln((x-a)^2+(y-a)^2) - \ln((x-a)^2+(y+a)^2) -$$

$$-\ln((x+a)^2+(y-a)^2) + \ln((x+a)^2+(y+a)^2)\big) \implies$$

$$\implies u(x,y) = \frac{q}{\lambda}G((x,y),(a,a)) =$$

$$= -\frac{q}{4\pi\lambda}\big(\ln((x-a)^2+(y-a)^2) - \ln((x-a)^2+(y+a)^2) -$$

$$-\ln((x+a)^2+(y-a)^2) + \ln((x+a)^2+(y+a)^2)\big).$$

b)

Värmeströmtätheten fås med Fouriers lag: $\boldsymbol{j} = -\lambda\nabla u$, och värmeströmtätheten ut ur området ges av enhetsnormalen till randen skalärt med värmeströmtätheten. Detta kommer att ge två uttryck eftersom randen består av två delar, den ena blir $j_x = (-1,0)\cdot\boldsymbol{j}\Big|_{x=0}$ och $j_y = (0,-1)\cdot\boldsymbol{j}\Big|_{y=0}$. Vi börjar med att beräkna $\boldsymbol{j}$.

$$\boldsymbol{j} = -\lambda\nabla u = -\lambda(u_x, u_y),$$

$$\begin{aligned}
u_x = -\frac{q}{4\pi\lambda}\Bigg(&\frac{2(x-a)}{(x-a)^2+(y-a)^2} - \frac{2(x-a)}{(x-a)^2+(y+a)^2} - \\
&-\frac{2(x+a)}{(x+a)^2+(y-a)^2} + \frac{2(x+a)}{(x+a)^2+(y+a)^2}\Bigg) = \\
= -\frac{q}{2\pi\lambda}\Bigg(&\frac{x-a}{(x-a)^2+(y-a)^2} - \frac{x-a}{(x-a)^2+(y+a)^2} - \\
&-\frac{x+a}{(x+a)^2+(y-a)^2} + \frac{x+a}{(x+a)^2+(y+a)^2}\Bigg),
\end{aligned}$$

symmetri ger att

$$\begin{aligned}
u_y = -\frac{q}{2\pi\lambda}\Bigg(&\frac{y-a}{(x-a)^2+(y-a)^2} - \frac{y-a}{(x-a)^2+(y+a)^2} - \\
&-\frac{y+a}{(x+a)^2+(y-a)^2} + \frac{y+a}{(x+a)^2+(y+a)^2}\Bigg).
\end{aligned}$$

Alltså är

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{j} = -\lambda\nabla u = \\
&= \frac{q}{2\pi}\Bigg(\frac{x-a}{(x-a)^2+(y-a)^2} - \frac{x-a}{(x-a)^2+(y+a)^2} - \\
&-\frac{x+a}{(x+a)^2+(y-a)^2} + \frac{x+a}{(x+a)^2+(y+a)^2}\ , \\
&\frac{y-a}{(x-a)^2+(y-a)^2} - \frac{y-a}{(x-a)^2+(y+a)^2} - \\
&-\frac{y+a}{(x+a)^2+(y-a)^2} + \frac{y+a}{(x+a)^2+(y+a)^2}\Bigg),
\end{aligned}$$

och speciellt är

$$\begin{aligned}
j_x = (-1,0)\cdot\boldsymbol{j}\Big|_{x=0} = -\frac{q}{2\pi}\Bigg(&\frac{x-a}{(x-a)^2+(y-a)^2} - \frac{x-a}{(x-a)^2+(y+a)^2} - \\
&-\frac{x+a}{(x+a)^2+(y-a)^2} + \frac{x+a}{(x+a)^2+(y+a)^2}\Bigg)\Bigg|_{x=0} = \\
= -\frac{q}{2\pi}\Bigg(&-\frac{a}{a^2+(y-a)^2} + \frac{a}{a^2+(y+a)^2} - \frac{a}{a^2+(y-a)^2} + \frac{a}{a^2+(y+a)^2}\Bigg) =
\end{aligned}$$

$$= \frac{q}{\pi}\left(\frac{a}{a^2+(y-a)^2} - \frac{a}{a^2+(y+a)^2}\right),$$

och på samma sätt blir

$$j_y = (0,-1)\cdot \boldsymbol{j}\Big|_{y=0} =$$

$$= \frac{q}{\pi}\left(\frac{a}{a^2+(x-a)^2} - \frac{a}{a^2+(x+a)^2}\right).$$

Av symmetriskäl är det egentligen onödigt att titta på båda randdelarna eftersom om vi finner att (x,y) är den punkten där värmeströmtätheten ut ur området är som störst, måste det gälla att den är lika stor i punkten (y,x). Eftersom aq/π är en konstant räcker det med att hitta den punkt där

$$\frac{1}{a^2+(y-a)^2} - \frac{1}{a^2+(y+a)^2} = \frac{1}{y^2-2ay+2a^2} - \frac{1}{y^2+2ay+2a^2} =$$

$$= \frac{y^2+2ay+2a^2-(y^2-2ay+2a^2)}{(y^2-2ay+2a^2)(y^2+2ay+2a^2)} =$$

$$= \frac{4ay}{y^4+2ay^3+2a^2y^2-2ay^3-4a^2y^2-4a^3y+2a^2y^2+4a^3y+4a^4} =$$

$$= \frac{4ay}{y^4+4a^4}$$

är som störst. Sätter vi derivatan till 0 får vi att

$$\frac{4a(y^4+4a^4)-4ay(4y^3)}{(y^4+4a^4)^2} = \frac{16a^5-12ay^4}{(y^4+4a^4)^2} = 0 \implies 4a^4-3y^4=0 \implies y = a(4/3)^{1/4}.$$

Av fysikaliska skäl måste detta motsvara ett maximum (om man inte litar på mig är man välkommen att derivera, vilket bör leda en till att andraderivatan i den aktuella punkten antar värdet $-\frac{9a^5}{16}(\frac{4}{3})^{1/4} < 0$). Detta betyder att värmeströmtätheten är som störst i punkten

$$\left(0, a(4/3)^{1/4}\right),$$

och eftersom man verkligen inte vill ge sig på att derivera den andra använder vi symmetriargumentet och konstaterar att värmeströmtätheten är lika stor i punkten

$$\left(a(4/3)^{1/4}, 0\right).$$

5.13

a)

På samma sätt som i 5.12 blir $k = q\delta_{(a,0)}$, och temperaturen är T_0 på randen, så vi får problemet (eftersom $u_t = 0$)

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{q}{\lambda}\delta_{(a,0)}, & x^2+y^2 < R^2, \\ u = T_0, & x^2+y^2 = R^2. \end{cases}$$

Vi börjar med att homogenisera detta problem genom att sätta $v = u - T_0$, vilket ger oss

$$\begin{cases} -\Delta v = \frac{q}{\lambda}\delta_{(a,0)}, & x^2 + y^2 < R^2, \\ v = 0, & x^2 + y^2 = R^2. \end{cases}$$

Lösningen till detta problem är Greenfunktionen för en cirkel med radie R i punkten $(\alpha, \beta) = (a, 0)$. Denna hittas genom att finna en konjugerad punkt utanför cirkeln, som ligger på samma stråle från origo som $\boldsymbol{\alpha} = (a, 0)$. Beteckna denna konjugerade punkt med $\tilde{\boldsymbol{\alpha}} = (b, 0)$, där $b > 0$ eftersom $a > 0$. I formelsamlingen hittar vi att

$$|\boldsymbol{\alpha}||\tilde{\boldsymbol{\alpha}}| = R^2 \implies |(a,0)||(b,0)| = |a||b| = ab = R^2 \implies b = \frac{a}{R^2}.$$

I formelsamlingen hittar vi också likheten

$$|(x,y) - \boldsymbol{\alpha}| = \frac{|\boldsymbol{\alpha}|}{R}|(x,y) - \tilde{\boldsymbol{\alpha}}|.$$

Om vi nu tar differensen mellan två lämpligt valda fundamentallösningar kommer vi att få v.

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \frac{q}{\lambda}K((x,y) - \boldsymbol{\alpha}) - \frac{q}{\lambda}K(\frac{|\boldsymbol{\alpha}|}{R}((x,y) - \tilde{\boldsymbol{\alpha}})) = \\ &= \frac{q}{\lambda}\left(K(x-a,y) - K(\frac{a}{R}(x - \frac{R^2}{a}, y))\right) = \\ &= \frac{q}{\lambda}\left(-\frac{1}{2\pi}\ln|(x-a,y)| + \frac{1}{2\pi}\ln(\frac{a}{R}|(x - \frac{R^2}{a}, y)|)\right) = \\ &= -\frac{q}{2\pi\lambda}\left(\ln\sqrt{(x-a^2)+y^2} - \ln\left(\frac{a}{R}\sqrt{\left(x - \frac{R^2}{a}\right)^2 + y^2}\right)\right) = \\ &= -\frac{q}{4\pi\lambda}\left(\ln((x-a)^2+y^2) - \ln\left((x - \frac{R^2}{a})^2 + y^2\right) - 2\ln\frac{a}{R}\right) \implies \\ &\implies u(x,y) = T_0 + v(x,y) = \\ &= T_0 - \frac{q}{4\pi\lambda}\left(\ln((x-a)^2+y^2) - \ln\left((x - \frac{R^2}{a})^2 + y^2\right) - 2\ln\frac{a}{R}\right). \end{aligned}$$

b)

Värmeströmtätheten ges, med Fouriers lag, av $\boldsymbol{j} = -\lambda\nabla u = -\lambda(u_x, u_y)$.

$$\begin{aligned} u_x &= -\frac{q}{4\pi\lambda}\left(\frac{2(x-a)}{(x-a)^2+y^2} - \frac{2(x - \frac{R^2}{a})}{(x - \frac{R^2}{a})^2 + y^2}\right) = \\ &= -\frac{q}{2\pi\lambda}\left(\frac{x-a}{(x-a)^2+y^2} - \frac{x - \frac{R^2}{a}}{(x - \frac{R^2}{a})^2 + y^2}\right) \end{aligned}$$

och

$$u_y = -\frac{q}{4\pi\lambda}\left(\frac{2y}{(x-a)^2+y^2} - \frac{2y}{(x - \frac{R^2}{a})^2 + y^2}\right) =$$

$$= -\frac{q}{2\pi\lambda}\left(\frac{y}{(x-a)^2+y^2} - \frac{y}{(x-\frac{R^2}{a})^2+y^2}\right).$$

Värmeströmtätheten blir då

$$\boldsymbol{j} = \frac{q}{2\pi}\left(\frac{x-a}{(x-a)^2+y^2} - \frac{x-\frac{R^2}{a}}{(x-\frac{R^2}{a})^2+y^2}\ ,\ \frac{y}{(x-a)^2+y^2} - \frac{y}{(x-\frac{R^2}{a})^2+y^2}\right)$$

I $A = (R, 0)$ är värmeströmtätheten då

$$\boldsymbol{j}(R,0) = \frac{q}{2\pi}\left(\frac{R-a}{(R-a)^2} - \frac{R-\frac{R^2}{a}}{(R-\frac{R^2}{a})^2}\ ,\ 0\right) = \frac{q}{2\pi}\left(\frac{1}{R-a} - \frac{1}{R-\frac{R^2}{a}}\ ,\ 0\right),$$

och i $B = (-R, 0)$ blir den

$$\boldsymbol{j}(-R,0) = \frac{q}{2\pi}\left(\frac{-R-a}{(-R-a)^2} - \frac{-R-\frac{R^2}{a}}{(-R-\frac{R^2}{a})^2}\ ,\ 0\right) = \frac{q}{2\pi}\left(-\frac{1}{R+a} + \frac{1}{R+\frac{R^2}{a}}\ ,\ 0\right).$$

Beloppen av värmeströmtätheterna i dessa punkter blir då

$$|\boldsymbol{j}(R,0)| = \left|\frac{q}{2\pi}\left(\frac{1}{R-a} - \frac{1}{R-\frac{R^2}{a}}\ ,\ 0\right)\right| = \frac{q}{2\pi}\left|\frac{1}{R-a} - \frac{1}{R-\frac{R^2}{a}}\right| =$$

$$= \frac{q}{2\pi}\left|\frac{1}{R-a} - \frac{a}{aR-R^2}\right| = \frac{q}{2\pi}\left|\frac{1}{R-a} + \frac{a}{R(R-a)}\right| = \frac{q}{2\pi}\frac{1}{R-a}(1+\frac{a}{R}),$$

$$|\boldsymbol{j}(-R,0)| = \left|\frac{q}{2\pi}\left(-\frac{1}{R+a} + \frac{1}{R+\frac{R^2}{a}}\ ,\ 0\right)\right| = \frac{q}{2\pi}\left|-\frac{1}{R+a} + \frac{1}{R+\frac{R^2}{a}}\right| =$$

$$= \frac{q}{2\pi}\left|\frac{1}{R+a} - \frac{a}{aR+R^2}\right| = \frac{q}{2\pi}\left|\frac{1}{R+a} - \frac{a}{R(R+a)}\right| = \frac{q}{2\pi}\frac{1}{R+a}(1-\frac{a}{R}),$$

vilket betyder att kvoten av värmeströmtätheterna i dessa punkter är

$$\frac{|\boldsymbol{j}_A|}{|\boldsymbol{j}_B|} = \frac{|\boldsymbol{j}(R,0)|}{|\boldsymbol{j}(-R,0)|} = \frac{\frac{q}{2\pi}\frac{1}{R-a}(1+\frac{a}{R})}{\frac{q}{2\pi}\frac{1}{R+a}(1-\frac{a}{R})} = \frac{R+a}{R-a}\frac{1+\frac{a}{R}}{1-\frac{a}{R}} =$$

$$= \frac{R+a}{R-a}\frac{R+a}{R-a} = \frac{(R+a)^2}{(R-a)^2}.$$

5.20

Värmekälla q i punkten $(a, 0, 0)$ innebär att $k = q\delta_{(a,0,0)}$ och för den stationära värmeledningsekvationen sätts $u_t = 0$. Detta ger $-a\Delta u = aq\delta_{(a,0,0)}/\lambda \implies -\Delta u = q\delta_{(a,0,0)}/\lambda$. En perfekt värmeisolerad vägg beskrivs av ett homogent Neumannvillkor, och eftersom randen utgörs av yz-planet är flödet genom väggen representerat av x-derivatan. Detta ger modellen

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{q}{\lambda}\delta_{(a,0,0)}, & x > 0, \\ u_x(0,y,z) = 0. \end{cases}$$

Eftersom vi har ett Neumannvillkor behöver vi spegla jämnt. Den speglade punkten är $(-a, 0, 0)$, och, analogt till hur man använder fundamentallösningar vid udda spegling (fast vi adderar fundamentallösningarna istället för att subtrahera dem), får vi att

$$u(x,y,z) = \frac{q}{\lambda}K((x,y,z)-(a,0,0)) + \frac{q}{\lambda}K((x,y,z)-(-a,0,0)) =$$

$$= \frac{q}{4\pi\lambda|(x-a,y,z)|} + \frac{q}{4\pi\lambda|(x+a,y,z)|} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}}\right).$$

Precis intill väggen är $x = 0$, vilket betyder att svaret är

$$u(0,y,z) = \frac{q}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{\sqrt{(-a)^2+y^2+z^2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2+y^2+z^2}}\right) = \frac{q}{2\pi\lambda}(a^2+y^2+z^2)^{-1/2}.$$

5.22

Poissonkärnan för enhetscirkeln är harmonisk för $r < 1$, vilket betyder att vi kan använda oss av medelvärdesegenskapen för att beräkna $P(0,\theta)$ genom att välja en cirkel med radie $0 \le \rho < 1$. En sådan cirkel, C, kommer att ha omkretsen $\mu(C) = 2\pi\rho$ och bågelementet $ds = \rho\, d\theta$ (detta kan ses genom att kurvintegralen kan parametriseras med $(r,\theta) = (\rho,\theta)$, där $\theta:\ -\pi \to \pi$). Medelvärdesegenskapen ger nu att

$$P(0,\theta) = \frac{1}{\mu(C)}\int_C P(r,\theta)\, ds = \frac{1}{2\pi\rho}\int_{-\pi}^{\pi} P(\rho,\theta)\,\rho\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(\rho,\theta)\, d\theta,$$

och

$$P(0,\theta) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-0^2}{1+0^2-2\cdot 0\cdot\cos\theta} = \frac{1}{2\pi} \implies$$

$$\implies \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(\rho,\theta)\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \implies \big[r = \rho \in [0,1)\big] \implies \int_{-\pi}^{\pi} P(r,\theta)\, d\theta = 1. \quad \square$$

5.23

Funktionen är harmonisk inuti enhetsdisken, så vi kan använda medelvärdesegenskapen för att beräkna värdet i origo genom att integrera längs randen till enhetsdisken, alltså längs enhetscirkeln. Radien är $r = 1$, och alltså blir $\mu(C) = 2\pi$ samt $ds = d\theta$. Vi kan parametrisera x och y med polära koordinater: $(x,y) = (\cos\theta, \sin\theta)$, där $\theta:\ -\pi \to \pi$. Medelvärdesegenskapen ger nu att

$$u(0,0) = \frac{1}{\mu(C)}\int_C u(x,y)\, ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+y^{13})\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos^2 x + \sin^{13} x)\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x\, d\theta + \frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin^{13} x\, d\theta}_{=0,\ \sin^{13}\ \text{udda}} = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2\theta)\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[1 + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{4\pi}(2\pi - 0) = \frac{1}{2}.$$

5.24

Eftersom u är harmonisk kan vi använda maximumprincipen, som säger att om u är harmonisk på ett område kommer u att anta både sitt största och minsta värde på randen till området. Betrakta nu ett område i form av en disk:

$$\Omega_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < R^2\}.$$

Detta området är begränsat för varje fixt R, vilket betyder att u_{max} och u_{min} antas då $x^2 + y^2 = R^2$. I polära koordinater ges randen av att $r = R$. Om vi nu låter $R \to \infty$ kommer $u_{max},\ u_{min} \to 0$, enligt förutsättningen, och eftersom funktionen uppenbarligen måste ligga mellan sitt största och minsta värde ger instängningssatsen att u konstant $= 0$. $\square$

Detta var lite handviftande, men jag tror att det viktiga finns där.

5.27

Värmeledningsproblemet är

$$\begin{cases} u_t - au_{xx} = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = T_0(\theta(x + L) - (\theta(x - L)), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Detta problem kan lösas genom att falta begynnelsetemperaturen med värmekärnan, $G(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi at}} e^{-x^2/(4at)}$. Man kan också använda Laplace- eller Fouriertransformen och när man sedan inverstransformerar kommer man att få precis värmekärnan faltad med begynnelsetemperaturen.

$$u(x, t) = (G(\,\cdot\,, t) * u(\,\cdot\,, 0))(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \alpha, t) T_0(\theta(\alpha + L) - (\theta(\alpha - L))\, d\alpha =$$

$$= \frac{T_0}{\sqrt{4\pi at}} \int_{-L}^{L} e^{-(x-\alpha)^2/(4at)}\, d\alpha = \begin{bmatrix} \beta = \dfrac{x - \alpha}{\sqrt{4at}} \implies d\beta = -\dfrac{d\alpha}{\sqrt{4at}} \\ \alpha :\ -L \to L \\ \beta :\ \dfrac{x + L}{\sqrt{4at}} = \beta_1 \to \dfrac{x - L}{\sqrt{4at}} = \beta_0 \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{T_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\beta_1}^{\beta_0} e^{-\beta^2}\, d\beta = \frac{T_0}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\beta_0}^{\beta_1} e^{-\beta^2}\, d\beta =$$

$$= \frac{T_0}{2} [\mathrm{erf}(\beta)]_{\beta_0}^{\beta_1} = \frac{T_0}{2} (\mathrm{erf}\left(\frac{x + L}{\sqrt{4at}}\right) - \mathrm{erf}\left(\frac{x - L}{\sqrt{4at}}\right)).$$

Det är uppenbart att temperaturen är som störst i $x = 0$, eftersom begynnelsetmperaturen omger origo symmetriskt, så det kommer ta längst tid för mitten att svalna. Alltså vill vi veta vid vilken tid som $u(0, t) = T_0/2$.

$$u(0, t) = \frac{T_0}{2} (\mathrm{erf}\left(\frac{L}{\sqrt{4at}}\right) - \mathrm{erf}\left(\frac{-L}{\sqrt{4at}}\right)) = [\mathrm{erf}(-y) = -\mathrm{erf}(y)\ \text{(udda)}] =$$

$$= \frac{T_0}{2} (\mathrm{erf}\left(\frac{L}{\sqrt{4at}}\right) + \mathrm{erf}\left(\frac{L}{\sqrt{4at}}\right)) = T_0\, \mathrm{erf}\left(\frac{L}{\sqrt{4at}}\right) = \frac{T_0}{2} \implies \mathrm{erf}\left(\frac{L}{\sqrt{4at}}\right) = \frac{1}{2}.$$

5.28

Det första alternativet är att konstaterar att vi har homogena Dirichletvillkor och ett ändligt intervall, så vi kan direkt ansätta en lösning på formen

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin k\pi x \implies$$

$$\implies 0 = u_t - u_{xx} = \sum_{k=1}^{\infty} (u_k'(t) + k^2\pi^2 u_k(t)) \sin k\pi x \implies \text{[entydighet]} \implies$$

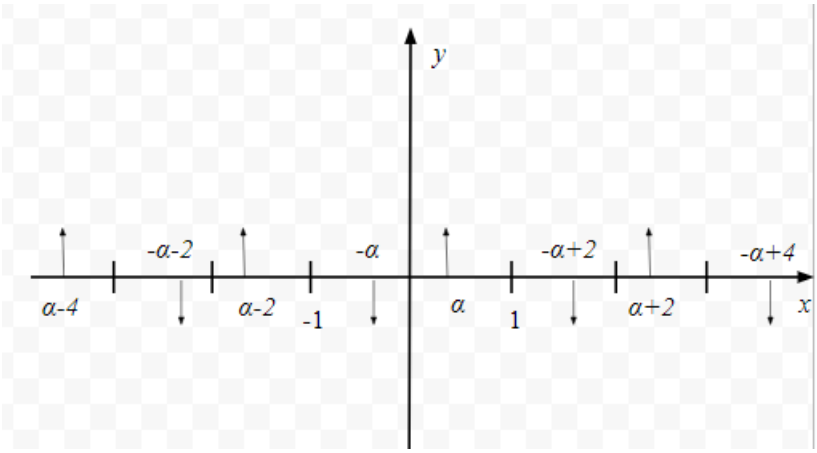
$$\implies u_k'(t) + k^2\pi^2 u_k(t) = 0 \implies u_k(t) = c_k e^{-k^2\pi^2 t} \implies$$

$$\implies u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-k^2\pi^2 t} \sin k\pi x \implies u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin k\pi x = \delta_\alpha(x) \implies$$

$$\implies c_k = \frac{2}{1} \int_0^1 \delta_\alpha(x) \sin k\pi x \, dx = 2 \sin k\pi\alpha \implies$$

$$\implies u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \sin(k\pi\alpha) \, e^{-k^2\pi^2 t} \sin k\pi x.$$

Det andra alternativet är att spegla sig fram till ett oändligt område och sedan använda värmekärnan för att få fram en lösning.



I figuren ser vi att när man speglar udda oändligt många gånger kommer begynnelsevillkoret att utvidgas till

$$u(x,0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\delta_{\alpha-2k}(x) - \delta_{-\alpha-2k}(x)),$$

vilket betyder att vi nu kan skriva vår lösning som

$$u(x,t) = (G(\,\cdot\,,t) * u(\,\cdot\,,0))(x) = G * \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\delta_{\alpha-2k} - \delta_{-\alpha-2k}) \right) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} G * (\delta_{\alpha-2k} - \delta_{-\alpha-2k}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (G(x-\alpha+2k,t) - G(x+\alpha+2k,t)) = [a=1] =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-(x-\alpha+2k)^2/(4t)} - \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-(x+\alpha+2k)^2/(4t)} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(e^{-(x-\alpha+2k)^2/(4t)} - e^{-(x+\alpha+2k)^2/(4t)} \right).$$

Kapitel 7

7.1

Vi använder d'Alemberts formel:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(g(x-ct) + g(x+ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\,dy,$$

där $g(x) = u(x,0)$ och $h(x) = u_t(x,0)$.

a)

$$g(x) = a\sin kx,\ h(x) = 0 \implies u(x,t) = \frac{1}{2}(a\sin(k(x-ct)) + a\sin(k(x+ct))) =$$

$$= \frac{a}{2}(\sin(kx-ckt) + \sin(kx+ckt)) = \left[\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right] =$$

$$= \frac{a}{2}\cdot 2\sin\frac{(kx-ckt)+(kx+ckt)}{2}\cos\frac{(kx-ckt)-(kx+ckt)}{2} = a\sin kx\cos ckt.$$

b)

$$g(x) = 0,\ h(x) = b\sin kx \implies u(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} b\sin ky\,dy = \left[-\frac{b}{2ck}\cos ky\right]_{x-ct}^{x+ct} =$$

$$= \frac{b}{2ck}(\cos(kx-ckt) - \cos(kx+ckt)) = \left[\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right] =$$

$$= -\frac{b}{2ck}\cdot 2\sin\frac{(kx-ckt)+(kx+ckt)}{2}\sin\frac{(kx-ckt)-(kx+ckt)}{2} =$$

$$= -\frac{b}{ck}\sin\frac{2kx}{2}\sin\frac{-2ckt}{2} = \frac{b}{ck}\sin kx\sin ckt.$$

7.2

Vi vill att lösningen enbart ska bestå av en våg som rör sig i negativ x-led, vilket innebär att lösningen kommer att ha formen $u(x,t) = \psi(x+ct)$, där $c > 0$. Med d'Alemberts formel får vi att $(g(x) = u(x,0) = a\sin kx,\ h(x) = u_t(x,0))$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(g(x-ct) + g(x+ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\,dy =$$

$$= \frac{a}{2}\sin(k(x-ct)) + \frac{a}{2}\sin(k(x+ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\,dy =$$

$$= \frac{a}{2}\sin(k(x-ct)) - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} h(y)\,dy + \underbrace{\frac{a}{2}\sin(k(x+ct)) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} h(y)\,dy}_{=\varphi(x+ct)} =$$

$$= \tilde{\psi}(x+ct) \implies [\psi(x+ct) = \tilde{\psi}(x+ct) - \varphi(x+ct)] \implies$$

$$\implies \frac{a}{2}\sin(k(x-ct)) - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} h(y)\,dy = 0 \implies$$

$$\implies h(x-ct) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^{x-ct} h(y)\,dy\right) = \frac{d}{dx}(ac\sin(k(x-ct))) = ack\cos(k(x-ct)),$$

vilket betyder att

$$u_t(x,0) = h(x) = ack\cos kx.$$

7.3

Detta är vågekvationen med $c = 1$, vilket betyder att vi återigen kan använda d'Alemberts formel. Vi kan också skriva p med stegfunktioner:

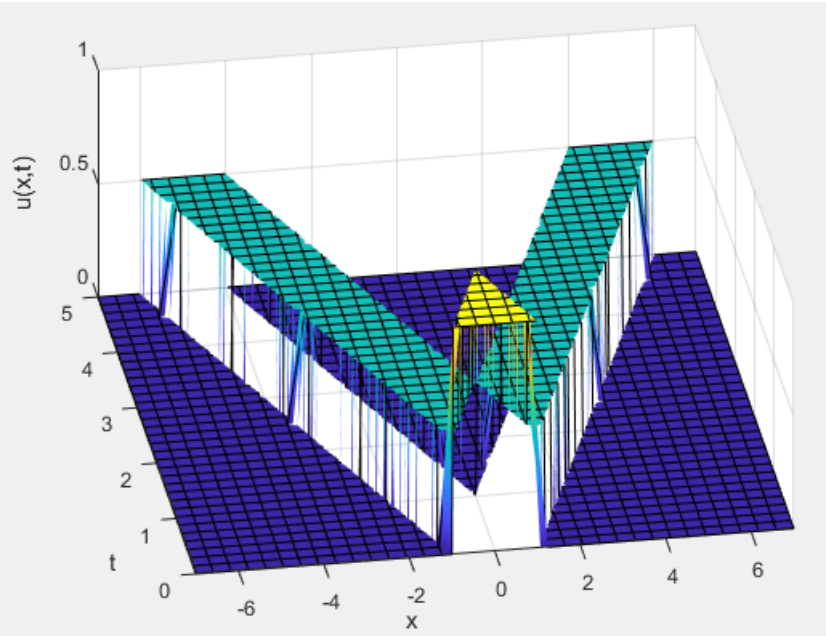
$$p(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \qquad \implies p(x) = \theta(x+1) - \theta(x-1).$$

a)

$$g(x) = u(x,0) = p(x),\ h(x) = u_t(x,0) = 0 \implies u(x,t) = \frac{1}{2}(g(x-1\cdot t) + g(x+1\cdot t)) =$$

$$= \frac{1}{2}(p(x-t) + p(x+t)) = \frac{1}{2}(\theta(x+1-t) - \theta(x-1-t)) + \frac{1}{2}(\theta(x+1+t) - \theta(x-1+t)),$$

detta är två rektanglar med längden 2, och höjden 1/2, som rör sig med hastigheten $c = 1$ bort från origo.



Se facit för 2D-bilder.

b)

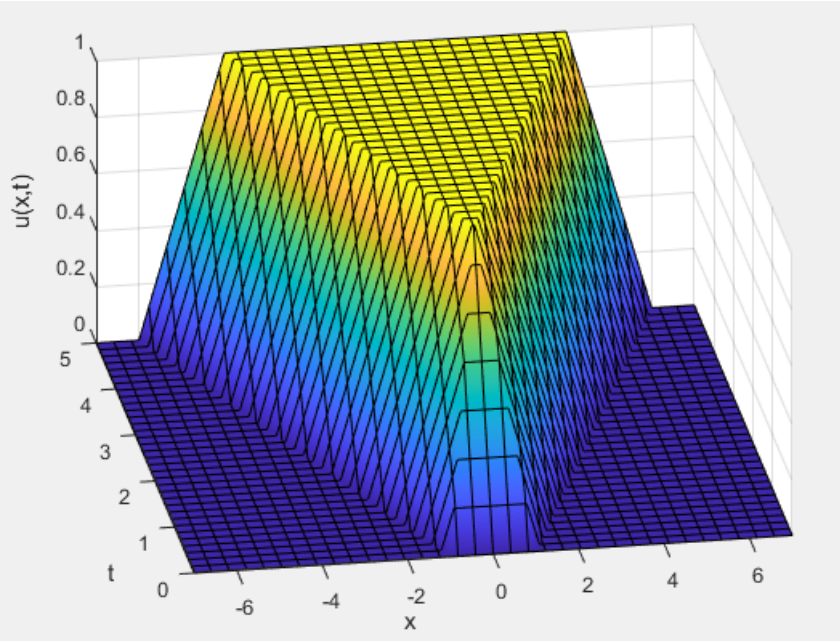
$$g(x) = 0,\ h(x) = p(x) \implies u(x,t) = \frac{1}{2\cdot 1}\int_{x-1\cdot t}^{x+1\cdot t} h(y)\,dy = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} p(y)\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} (\theta(y+1) - \theta(y-1))\, dy = \frac{1}{2}\left[(y+1)\theta(y+1) - (y-1)\theta(y-1)\right]_{x-t}^{x+t} =$$

$$= \frac{1}{2}((x+1+t)\theta(x+1+t) - (x-1+t)\theta(x-1+t)) -$$

$$-\frac{1}{2}((x+1-t)\theta(x+1-t) - (x-1-t)\theta(x-1-t)).$$

Detta är en våg som börjar helt platt och sedan växer upp till höjden 1 och utåt från origo.



Se facit för 2D-bilder.

7.6

a)

Dirichletvillkor (fast inspänd) motsvarar en udda spegling i randen, vilket betyder att vågen kommer reflekteras samtidigt som den vänds uppochned. Jämför med vågläran och reflektion mot tätare medium, och det. Se facit för bilder.

b)

Neumannvillkor (kan svänga fritt) kommer att medföra en jämn spegling i randen, vilket betyder att vågen endast reflekteras (den vänds alltså inte). Jämför med reflektion mot tunnare medium typ. Se facit för bilder.

7.8

Lösning finns redan.

7.9

Att röret är slutet innebär att vi har ett homogent Neumannvillkor i $x = 0$. Vi har ingen begynnelsehastighet, så $h(x) = u_t(x, 0) = 0$. Från början har vi tryckfördelningen

$$g(x) = u(x,0) = \begin{cases} p_0, & 0 < x < L, \\ 0, & x > L \end{cases} \implies g(x) = p_0(\theta(x) - \theta(x - L)).$$

Vi har alltså problemet

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x > 0,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = g(x),\ u_t(x,0) = 0, & x > 0. \end{cases}$$

Vi vill gärna använda d'Alemberts formel, men vårt område är bara halvoändligt, så (eftersom vi har Neumannvillkor) utvidgar vi problemet jämnt, vilket betyder att funktionen g utvidgas till $g(x) = p_0((\theta(x + L) - \theta(x - L))$. Med d'Alemberts formel får vi nu direkt svaret:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(g(x - ct) + g(x + ct)) + 0 = \frac{1}{2}(g(x - ct) + g(x + ct)).$$

Dock eftersom vi började med ett halvoändligt problem är vi bara intresserade av hur denna lösning ser ut för $x > 0$, vilket betyder att den vänstergående vågen försvinner snabbt och vi har bara en högergående tryckvåg som rör sig över hela den positiva x-axeln. Se facit för bild.

7.10

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x > 0,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = \delta_1(x), & x > 0. \end{cases}$$

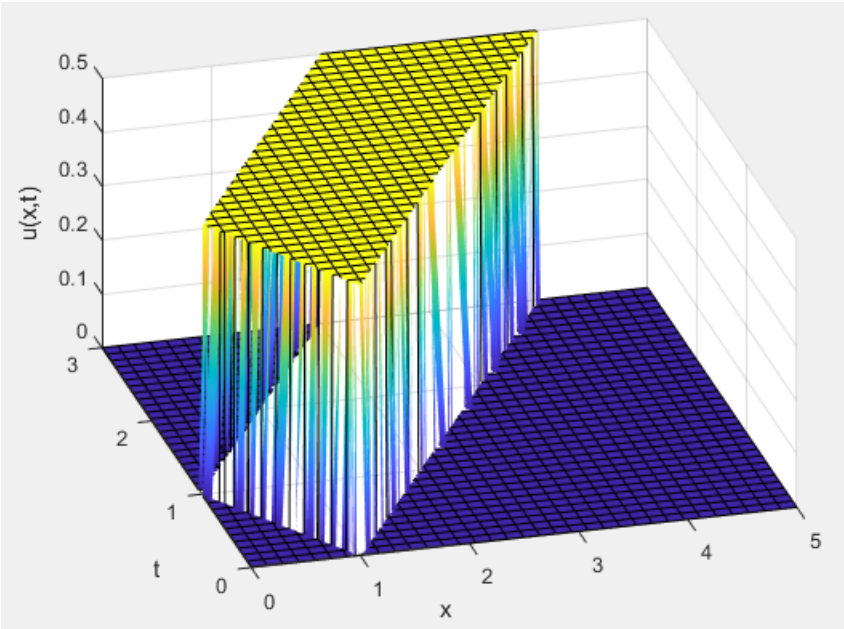
Vi ser att utbredningshastigheten $c = 1$, och vi har ett Dirichletvillkor i randen. För att få ett problem på hela $\mathbb{R}$, så att vi kan använda d'Alembert, speglar vi därför udda. Utvidgningen av begynnelsehastigheten blir då $h(x) = u_t(x, 0) = \delta_1(x) - \delta_{-1}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Insättning i d'Alemberts formel, med $c = 1$, ger att

$$u(x,t) = 0 + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\,dy = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} (\delta_1(y) - \delta_{-1}(y))\,dy = \frac{1}{2}\left[\theta(y-1) - \theta(y+1)\right]_{x-t}^{x+t} =$$

$$= \frac{1}{2}(\theta(x - 1 + t) - \theta(x + 1 + t)) - \frac{1}{2}(\theta(x - 1 - t) - \theta(x + 1 - t)) =$$

$$= \frac{1}{2}(\theta(x + 1 - t) - \theta(x - 1 - t)) - \frac{1}{2}(\theta(x + 1 + t) - \theta(x - 1 + t)).$$

Lösningen till vårt problem får vi genom att endast titta på positiva x-värden. Tolkningen är att vi börjar med en mycket spetsig hammare som slår strängen (till exempel) i $x = 1$, vilket resulterar i två vågor, en som rör sig åt vänster; en åt höger. Den som rör sig åt vänster kommer att reflekteras udda i randen, vilket vänder den uppochned.



Se facit för 2D-bilder.

7.18

Lösning finns redan.

7.20

Vi använder karakteristikdelen av formelbladet för att skriva upp karakteristikekvationerna:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \implies$$
$$\implies a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0.$$

Därefter är tanken att man ska faktorisera detta uttryck för att få linjära uttryck med dx och dy som man sedan kan integrera, vilket ger en karakteristikerna, som då motiverar ett specifikt variabelbyte. När man har gjort det är det dags att frossa i kedjeregeln för att sedan kunna substituera in i den ursprungliga PDE:n, vilket (om man har gjort rätt) kommer att eliminera u_{xx}- och u_{yy}-termerna.

a)

$$u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + 6u_y = 0 \implies$$
$$\implies dy^2 - 2dxdy - 3dx^2 = 0 \implies (dy + dx)(dy - 3dx) = 0 \implies$$
$$\implies \begin{cases} dy = -dx, \\ dy = 3dx \end{cases} \overset{\int}{\implies} \begin{cases} y = -x + k_1, \\ y = 3x + \tilde{k}_2 \end{cases} \implies \begin{cases} x + y = k_1, \\ 3x - y = k_2. \end{cases}$$

Detta motiverar variabelbytet

$$\begin{cases} \xi = x + y, \\ \eta = 3x - y, \end{cases}$$

där $v(\xi,\eta) = u(x,y)$. Det gäller att $\xi_x = 1$, $\xi_y = 1$, $\eta_x = 3$, $\eta_y = -1$. Kedjeregeln:

$$u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x = v_\xi + 3v_\eta,$$

$$u_{xx} = v_{\xi\xi} + 3v_{\eta\xi} + 3v_{\xi\eta} + 9v_{\eta\eta} = v_{\xi\xi} + 6v_{\xi\eta} + 9v_{\eta\eta},$$

$$u_y = v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y = v_\xi - v_\eta,$$

$$u_{yy} = v_{\xi\xi} - v_{\eta\xi} - (v_{\xi\eta} - v_{\eta\eta}) = v_{\xi\xi} - 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta},$$

$$u_{xy} = (v_\xi + 3v_\eta)_y = v_{\xi\xi} - v_{\eta\xi} + 3(v_{\xi\eta} - v_{\eta\eta}) = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} - 3v_{\eta\eta}.$$

Insättning:

$$0 = u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + 6u_y =$$

$$= v_{\xi\xi} + 6v_{\xi\eta} + 9v_{\eta\eta} + 2(v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} - 3v_{\eta\eta}) - 3(v_{\xi\xi} - 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}) + 2(v_\xi + 3v_\eta) + 6(v_\xi - v_\eta) =$$

$$= 16v_{\xi\eta} + 8v_\xi \implies v_{\xi\eta} + \frac{1}{2}v_\xi = 0.$$

Om vi bara tittar i η-led är detta en första ordningens linjär differentialekvation:

$$f'(\eta) + \frac{1}{2}f(\eta) = 0 \implies f(\eta) = Ce^{-\eta/2},$$

men eftersom vi har flera variabler kommer C att istället vara en godtycklig funktion av ξ. Alltså är

$$v_\xi = \tilde{\varphi}(\xi)e^{-\eta/2} \implies v(\xi,\eta) = \varphi(\xi)e^{-\eta/2} + \psi(\eta),$$

där φ är en primitiv till $\tilde{\varphi}$. Om vi återgår till x och y får vi att

$$u(x,y) = \varphi(x+y)e^{-(3x-y)/2} + \psi(3x-y).$$

b)

$$u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y = 0 \implies$$

$$\implies dy^2 + 2\sin x dx dy - \cos^2 x dx^2 = 0 \implies dy^2 + 2\sin x dx dy - dx^2 + \sin^2 x dx^2 =$$

$$= (dy + \sin x dx)^2 - dx^2 = (dy + \sin x dx - dx)(dy + \sin x dx + dx) = 0 \implies$$

$$\implies \begin{cases} dy = (1 - \sin x)dx, \\ dy = -(1 + \sin x)dx \end{cases} \overset{\int}{\implies} \begin{cases} y = x + \cos x + \tilde{k}_1, \\ y = -x + \cos x + k_2 \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{cases} x + \cos x - y = k_1, \\ x - \cos x + y = k_2. \end{cases}$$

Detta motiverar variabelbytet

$$\begin{cases} \xi = x + \cos x - y, \\ \eta = x - \cos x + y, \end{cases}$$

där $v(\xi,\eta) = u(x,y)$. Med detta blir $\xi_x = 1 - \sin x$, $\xi_y = -1$, $\eta_x = 1 + \sin x$, $\eta_y = 1$. Kedjeregeln:

$$u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x = (1-\sin x)v_\xi + (1+\sin x)v_\eta,$$
$$u_{xx} = (1-\sin x)_x v_\xi + (1-\sin x)(v_\xi)_x + (1+\sin x)_x v_\eta + (1+\sin x)(v_\eta)_x =$$
$$-\cos x\, v_\xi + (1-\sin x)(v_{\xi\xi}\xi_x + v_{\eta\xi}\eta_x) + \cos x\, v_\eta + (1+\sin x)(v_{\xi\eta}\xi_x + v_{\eta\eta}\eta_x) =$$
$$= \cos x(v_\eta - v_\xi) + (1-\sin x)((1-\sin x)v_{\xi\xi} + (1+\sin x)v_{\xi\eta}) +$$
$$+(1+\sin x)((1-\sin x)v_{\xi\eta} + (1+\sin x)v_{\eta\eta}) =$$
$$= \cos x(v_\eta - v_\xi) + 2(1-\sin^2 x)v_{\xi\eta} + (1-\sin x)^2 v_{\xi\xi} + (1+\sin x)^2 v_{\eta\eta} =$$
$$= (1-\sin x)^2 v_{\xi\xi} + (1+\sin x)^2 v_{\eta\eta} + 2\cos^2 x\, v_{\xi\eta} + \cos x(v_\eta - v_\xi)$$
$$u_y = v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y = -v_\xi + v_\eta,$$
$$u_{yy} = -(v_{\xi\xi}\xi_y + v_{\eta\xi}\eta_y) + v_{\xi\eta}\xi_y + v_{\eta\eta}\eta_y = v_{\xi\xi} - 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta},$$
$$u_{xy} = (-v_\xi + v_\eta)_x = -((1-\sin x)v_{\xi\xi} + (1+\sin x)v_{\eta\xi}) + (1-\sin x)v_{\xi\eta} + (1+\sin x)v_{\eta\eta} =$$
$$= (\sin x - 1)v_{\xi\xi} + (\sin x + 1)v_{\eta\eta} - 2\sin x\, v_{\xi\eta}.$$

Insättning:

$$0 = u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y =$$
$$= (1-\sin x)^2 v_{\xi\xi} + (1+\sin x)^2 v_{\eta\eta} + 2\cos^2 x\, v_{\xi\eta} + \cos x(v_\eta - v_\xi) -$$
$$-2\sin x((\sin x - 1)v_{\xi\xi} + (\sin x + 1)v_{\eta\eta} - 2\sin x\, v_{\xi\eta}) -$$
$$-\cos^2 x(v_{\xi\xi} - 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}) - \cos x(-v_\xi + v_\eta) =$$
$$= ((1-\sin x)^2 - 2\sin^2 x + 2\sin x - \cos^2 x)v_{\xi\xi} + ((1+\sin x)^2 - 2\sin^2 x - 2\sin x - \cos^2 x)v_{\eta\eta} +$$
$$+(2\cos^2 x + 4\sin^2 x + 2\cos^2 x)v_{\xi\eta} + (-\cos x + \cos x)v_\xi + (\cos x - \cos x)v_\eta =$$
$$= (1 - 2\sin x + \sin^2 x - 2\sin^2 x + 2\sin x - \cos^2 x)v_{\xi\xi} +$$
$$+(1 + 2\sin x + \sin^2 x - 2\sin^2 x - 2\sin x - \cos^2 x)v_{\eta\eta} +$$
$$+4(\sin^2 + \cos^2 x)v_{\xi\eta} + 0 + 0 =$$
$$= (1 - \sin^2 x - \cos^2 x)v_{\xi\xi} + (1 - \sin^2 x - \cos^2 x)v_{\eta\eta} + 4v_{\xi\eta} = 0 + 0 + 4v_{\xi\eta} \implies$$
$$\implies v_{\xi\eta} = 0 \implies v_\eta = \tilde{\psi}(\eta) \implies v(\xi,\eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta).$$

ψ är en primitiv till $\tilde{\psi}$. Återgång till våra ursprungliga variabler ger oss lösningen

$$u(x,y) = \varphi(x + \cos x - y) + \psi(x - \cos x + y).$$

c)

$$yu_{xx} - u_{yy} = 0 \implies ydy^2 - dx^2 = 0 \implies (\sqrt{y}dy + dx)(\sqrt{y}dy - dx) = 0 \implies$$

$$\implies \begin{cases} \sqrt{y}dy = -dx, \\ \sqrt{y}dy = dx \end{cases} \overset{\int}{\implies} \begin{cases} \frac{2}{3}y^{3/2} = -x + \tilde{k}_1, \\ \frac{2}{3}y^{3/2} = x + \tilde{k}_2 \end{cases} \implies \begin{cases} 3x + 2y^{3/2} = k_1, \\ 3x - 2y^{3/2} = k_2. \end{cases}$$

Detta motiverar variabelbytet

$$\begin{cases} \xi = 3x + 2y^{3/2}, \\ \eta = 3x - 2y^{3/2}, \end{cases}$$

där $v(\xi, \eta) = u(x, y)$. Detta betyder att $\xi_x = 3$, $\xi_y = 3y^{1/2}$, $\eta_x = 3$, $\eta_y = -3y^{1/2}$. Kedjeregeln:

$$u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x = 3v_\xi + 3v_\eta,$$

$$u_{xx} = 3(3v_{\xi\xi} + 3v_{\eta\xi}) + 3(3v_{\xi\eta} + 3v_{\eta\eta}) = 9v_{\xi\xi} + 18v_{\xi\eta} + 9v_{\eta\eta},$$

$$u_y = v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y = 3y^{1/2}v_\xi - 3y^{1/2}v_\eta,$$

$$u_{yy} = (3y^{1/2})_y v_\xi + 3y^{1/2}(v_\xi)_y - (3y^{1/2})_y v_\eta - 3y^{1/2}(v_\eta)_y =$$

$$= \frac{3}{2}y^{-1/2}v_\xi + 3y^{1/2}(v_{\xi\xi}\xi_y + v_{\eta\xi}\eta_y) - \frac{3}{2}y^{-1/2}v_\eta - 3y^{1/2}(v_{\xi\eta}\xi_y + v_{\eta\eta}\eta_y) =$$

$$= \frac{3}{2}y^{-1/2}v_\xi + 3y^{1/2}(3y^{1/2}v_{\xi\xi} - 3y^{1/2}v_{\eta\xi}) - \frac{3}{2}y^{-1/2}v_\eta - 3y^{1/2}(3y^{1/2}v_{\xi\eta} - 3y^{1/2}v_{\eta\eta}) =$$

$$= \frac{3}{2}y^{-1/2}v_\xi + 9y(v_{\xi\xi} - v_{\eta\xi}) - \frac{3}{2}y^{-1/2}v_\eta - 9y(v_{\xi\eta} - v_{\eta\eta}) =$$

$$= 9y(v_{\xi\xi} - 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}) + \frac{3}{2\sqrt{y}}v_\xi - \frac{3}{2\sqrt{y}}v_\eta.$$

Insättning:

$$0 = yu_{xx} - u_{yy} = y(9v_{\xi\xi} + 18v_{\xi\eta} + 9v_{\eta\eta}) - (9y(v_{\xi\xi} - 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}) + \frac{3}{2\sqrt{y}}v_\xi - \frac{3}{2\sqrt{y}}v_\eta) =$$

$$= 36yv_{\xi\eta} - \frac{3}{2\sqrt{y}}v_\xi + \frac{3}{2\sqrt{y}}v_\eta = 36yv_{\xi\eta} - \frac{3}{2\sqrt{y}}(v_\xi - v_\eta) \implies$$

$$\implies v_{\xi\eta} - \frac{1}{24y\sqrt{y}}(v_\xi - v_\eta) = 0.$$

Eftersom $\xi = 3x + 2y^{3/2} = 3x + 2y\sqrt{y}$ och $\eta = 3x - 2y^{3/2} = 3x - 2y\sqrt{y}$, så är

$$\xi - \eta = 3x + 2y\sqrt{y} - (3x - 2y\sqrt{y}) = 4y\sqrt{y} \implies y\sqrt{y} = \frac{1}{4}(\xi - \eta) \implies$$

$$\implies v_{\xi\eta} - \frac{1}{24y\sqrt{y}}(v_\xi - v_\eta) = 0 \implies v_{\xi\eta} - \frac{1}{6(\xi - \eta)}(v_\xi - v_\eta) = 0.$$

7.22

$$xu_{xx} - yu_{xy} + u_x = 0 \implies xdy^2 + ydxdy = 0 \implies dy(xdy + ydx) = 0 \implies$$

$$\implies \begin{cases} \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}, \\ dy = 0 \end{cases} \overset{\int}{\implies} \begin{cases} \ln|y| = -\ln|x| + \tilde{k}_2, \\ y = k_1 \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{cases} \ln|y| = \ln\frac{1}{|x|} + \tilde{k}_2, \\ y = k_1 \end{cases} \implies \begin{cases} y = \pm e^{\ln\frac{1}{|x|} + \tilde{k}_2} = \frac{k_2}{x}, \\ y = k_1. \end{cases}$$

Karakteristikerna är alltså y och xy. Detta motiverar variabelbytet

$$\begin{cases} \xi = xy, \\ \eta = y, \end{cases}$$

där $v(\xi, \eta) = u(x, y)$. Vidare är också $\xi_x = y$, $\xi_y = x$, $\eta_x = 0$, $\eta_y = 1$. Kedjeregeln ger nu att

$$u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x = yv_\xi,$$

$$u_{xx} = y(v_{\xi\xi}\xi_x + v_{\eta\xi}\eta_x) = y^2 v_{\xi\xi},$$

$$u_{xy} = (yv_\xi)_y = v_\xi + y(v_{\xi\xi}\xi_y + v_{\eta\xi}\eta_y) = v_\xi + y(xv_{\xi\xi} + v_{\xi\eta}) = xyv_{\xi\xi} + yv_{\xi\eta} + v_\xi.$$

Insättning:

$$0 = xu_{xx} - yu_{xy} + u_x = xy^2 v_{\xi\xi} - y(xyv_{\xi\xi} + yv_{\xi\eta} + v_\xi) + yv_\xi = yv_{\xi\eta} \implies$$

$$\implies v_{\xi\eta} = 0 \implies v_\eta = \tilde{\psi}(\eta) \implies v(\xi, \eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta).$$

ψ är en primitiv till $\tilde{\psi}$. Detta betyder att

$$u(x, y) = \varphi(xy) + \psi(y).$$

Karakteristikhäfte

Istället för att göra som häftet och parametrisera alla variabler kommer jag att bestämma karakteristikerna uttryckt i variablerna direkt. Alltså om man har en första ordningens PDE på formen

$$au_x + bu_y = c,$$

så kommer karakteristikerna att bestämmas av att

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a},$$

där a, b, och c kan bero på x, y, och u. När man sedan integrerar dy/dx kommer man att få fram uttrycket för en karakteristik. Eftersom funktion är konstant längs dessa karakteristiker är det naturlig att införa nya variabler som följer karakteristikerna, eftersom då kommer derivatorna längs karakteristikerna ta ut varandra i ekvationen, och man får en PDE som är enkel att lösa.

1

$$\begin{cases} u_t + 2u_x = 0, \\ u(0,x) = \max(1 - |x|, 0) \end{cases} \implies \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1} \implies x = 2t + k \implies x - 2t = k.$$

Eftersom funktionen är konstant längs $x - 2t$ inför vi variablerna

$$\begin{cases} \xi = x - 2t, \\ \eta = t, \end{cases}$$

där $v(\eta, \xi) = u(t, x)$. Man behöver inte tvunget göra detta variabelbyte; man kan exempelvis byta plats på ξ och η, eller bara införa ξ och behålla t. Kedjeregeln ger nu att

$$u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x = v_\xi \cdot 1 + v_\eta \cdot 0 = v_\xi,$$

$$u_t = v_\xi \xi_t + v_\eta \eta_t = v_\xi \cdot (-2) + v_\eta \cdot 1 = -2v_\xi + v_\eta.$$

Insättning:

$$0 = u_t + 2u_x = -2v_\xi + v_\eta + 2v_\xi = v_\eta \implies v(\eta, \xi) = \varphi(\xi) \implies u(t,x) = \varphi(x - 2t).$$

Notera att alla v_ξ tar ut varandra. Begynnelsevillkoret ger att

$$u(0,t) = \varphi(x) = \max(1 - |x|, 0) \implies u(t,x) = \max(1 - |x - 2t|, 0).$$

Det bör vara tämligen uppenbart att om vi byter 2 mot -2, kommer enda skillnaden vara att vår karakteristik blir $x + 2t$, och således blir funktionen

$$u(t,x) = \varphi(x + 2t) = \max(1 - |x + 2t|, 0).$$

När det är +2 i ekvationen motsvarar det en våg som fortskrider åt höger, men när det är -2 går den istället åt vänster. Se facit för bilder.

2

$$\begin{cases} u_t + cu_x = -u, \\ u(0,x) = \max(1-|x|, 0). \end{cases}$$

Vi löser detta problem genom att hitta karakteristikerna:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c}{1} \implies x = ct + k \implies x - ct = k.$$

Eftersom vi har funnit karakteristikerna inför vi dem lämpligt valda variablerna:

$$\begin{cases} \xi = t, \\ \eta = x - ct, \end{cases}$$

där $v(\xi, \eta) = u(t, x)$. Kedjeregeln:

$$u_t = v_\xi \xi_t + v_\eta \eta_t = v_\xi \cdot 1 + v_\eta \cdot (-c) = v_\xi - cv_\eta,$$

$$u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x = v_\xi \cdot 0 + v_\eta \cdot 1 = v_\eta,$$

vilket vid insättning ger oss

$$0 = u_t + cu_x + u = v_\xi - cv_\eta + cv_\eta + v = v_\xi + v.$$

Denna ekvation kan jämföras med $y'(x) + y(x) = 0$, och den har lösningen

$$v(\xi, \eta) = \varphi(\eta)e^{-\xi} \implies u(t,x) = \varphi(x - ct)e^{-t},$$

redan här kan vi se att lösningen avtar med faktorn e^{-t}, men låta oss bestämma φ också.

$$u(0,x) = \varphi(x) = \max(1-|x|, 0) \implies u(t,x) = \max(1-|x-ct|, 0)e^{-t}.$$

3

$$\begin{cases} u_t + cu_x = -xu, \\ u(0,x) = f(x). \end{cases}$$

Ställer man upp karakteristikuttrycket kommer man märka att det är samma som i föregående uppgift, vilket betyder att vi direkt kan införa variablerna funktionen $v(\xi, \eta) = u(t, x)$, där

$$\begin{cases} \xi = x - ct, \\ \eta = x. \end{cases}$$

Lägg märke till att det inte är samma variabler som i förra uppgiften, men det kommer ändå att fungera. Jag valde speciellt η eftersom det är ett x i ekvationen. Med kedjeregeln får vi

$$u_t = v_\xi \xi_t + v_\eta \eta_t = v_\xi \cdot (-c) + v_\eta \cdot 0 = -cv_\xi,$$

$$u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x = v_\xi \cdot 1 + v_\eta \cdot 1 = v_\xi + v_\eta.$$

PDE:n omvandlas nu till

$$0 = u_t + cu_x + xu = -cv_\xi + c(v_\xi + v_\eta) + \eta v = cv_\eta + \eta v \implies c\frac{\partial v}{\partial \eta} = -\eta v \implies$$

$$\implies c\int \frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial \eta}\,d\eta = -\int \eta\,d\eta \implies c\ln|v| = -\frac{1}{2}\eta^2 + \varphi_1(\xi) \implies$$

$$\implies v(\xi,\eta) = \pm e^{-\eta^2/(2c)+\varphi_2(\xi)} = \varphi(\xi)e^{-\eta^2/(2c)} \implies u(t,x) = \varphi(x-ct)e^{-x^2/(2c)},$$

och begynnelsevillkoret ger oss att

$$u(0,t) = \varphi(x)e^{-x^2/(2c)} = f(x) \implies \varphi(x) = f(x)e^{x^2/(2c)} \implies$$

$$\implies u(t,x) = f(x-ct)e^{(x-ct)^2/(2c)}e^{-x^2/(2c)} = f(x-ct)e^{\frac{x^2-2cxt+c^2t^2}{2c}-\frac{x^2}{2c}} =$$

$$= f(x-ct)e^{\frac{-2xt+ct^2}{2}} = f(x-ct)e^{-xt+ct^2/2}.$$

4

$$\begin{cases} u_x + yu_y = -u^2, \\ u(0,y) = y. \end{cases}$$

Vi betraktar

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{1} \implies \frac{dy}{y} = dx \overset{\int}{\implies} \ln|y| = x + k_1 \implies |y| = e^{x+k_1} = k_2e^x \implies$$

$$\implies y = \pm k_2e^x = ke^x \implies ye^{-x} = k.$$

Med denna kunskap om karakteristikerna för ekvationen inför vi variablerna

$$\begin{cases} \xi = ye^{-x}, \\ \eta = x, \end{cases}$$

där $v(\xi,\eta) = u(x,y)$. Kedjeregeln:

$$u_x = v_\xi\xi_x + v_\eta\eta_x = -ye^{-x}v_\xi + v_\eta,$$

$$u_y = v_\xi\xi_y + v_\eta\eta_y = e^{-x}v_\xi.$$

Insättning:

$$0 = u_x + yu_y + u^2 = -ye^{-x}v_\xi + v_\eta + ye^{-x}v_\xi + v^2 = [y=\eta] = v_\eta + v^2 \implies$$

$$\implies \frac{\partial v}{\partial \eta} = -v^2 \implies \int -\frac{1}{v^2}\frac{\partial v}{\partial \eta}\,d\eta = \int d\eta \implies \frac{1}{v} = \eta + \varphi(\xi) \implies$$

$$\implies v(\xi,\eta) = \frac{1}{\eta+\varphi(\xi)} \implies u(x,y) = \frac{1}{x+\varphi(ye^{-x})},$$

och med

$$u(0,y) = \frac{1}{\varphi(y)} = y \implies \varphi(y) = \frac{1}{y}$$

får vi att

$$u(x,y) = \frac{1}{x+\frac{1}{ye^{-x}}} = \frac{1}{x+\frac{e^x}{y}} = \frac{y}{xy+e^x}.$$

5

$$\begin{cases} u_x + e^{-x}u_y = 0, \\ u(0,y) = \frac{1}{1+y^2}. \end{cases}$$

Karakteristikerna ges av att

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-x}}{1} \implies y = -e^{-x} + k \implies y + e^{-x} = k,$$

vilket motiverar variabelbytet $v(\xi,\eta) = u(x,y)$, där

$$\begin{cases} \xi = y + e^{-x}, \\ \eta = x. \end{cases}$$

Kedjeregeln talar om för oss att

$$u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x = -e^{-x} v_\xi + v_\eta,$$

$$u_y = v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y = v_\xi.$$

$$0 = u_x + e^{-x}u_y = -e^{-x}v_\xi + v_\eta + e^{-x}v_\xi = v_\eta \implies$$

$$\implies v(\xi,\eta) = \varphi(\xi) \implies u(x,y) = \varphi(y + e^{-x}),$$

och

$$u(0,y) = \varphi(y+1) = \frac{1}{1+y^2} = \frac{1}{y^2+2y+1-2y} = \frac{1}{(y+1)^2 - 2y} =$$

$$= \frac{1}{(y+1)^2 - 2y - 2 + 2} = \frac{1}{(y+1)^2 - 2(y+1) + 2} \implies$$

$$\implies \varphi(y) = \frac{1}{y^2 - 2y + 2} = \frac{1}{1 + (y-1)^2} \implies u(x,y) = \frac{1}{1 + (y + e^{-x} - 1)^2}.$$

6

$$\begin{cases} u_x - 2xu_y = 3u, \\ u(0,y) = \frac{1}{1+y^2}. \end{cases}$$

Vi tillämpar samma algoritm, som nu blivit välbekant:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{1} \implies y = -x^2 + k \implies x^2 + y = k.$$

Inför funktionen $v(\xi,\eta) = u(x,y)$, där

$$\begin{cases} \xi = x^2 + y, \\ \eta = x. \end{cases}$$

Kedjeregeln:

$$u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x = 2xv_\xi + v_\eta,$$

$$u_y = v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y = v_\xi.$$

Insättning:

$$0 = u_x - 2xu_y - 3u = 2xv_\xi + v_\eta - 2xv_\xi - 3v = v_\eta - 3v \implies$$

$$\implies v(\xi,\eta) = \varphi(\xi)e^{3\eta} \implies u(x,y) = \varphi(x^2+y)e^{3x} \implies$$

$$\implies u(0,y) = \varphi(y) = \frac{1}{1+y^2} \implies u(x,y) = \frac{1}{1+(x^2+y)^2}e^{3x}.$$

7

$$\begin{cases}(1-2u)u_x + u_y = 0,\\ u(x,0) = x.\end{cases}$$

Denna är inte linjär, men derivatorna är fortfarande linjära (alltså det är inga u_x^2, eller $u_x u_y$ till exempel), så vi testar att försöka hitta karakteristiker på samma sätt som för resterande uppgifter:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-2u}.$$

Nu kan man fråga sig hur det är tänkt att man ska integrera ett uttryck innehållande u med avseende på x. När man tänker lite på vad det är som utmärker karakteristiker, så är det ju att funktionen, u, är konstant längs en karakteristik, och sättet vi hittar karakteristiker är ju genom att integrerar

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-2u},$$

men om u är konstant längs karakteristiken kommer

$$\frac{1}{1-2u}$$

att vara en konstant(!) - och för att integrera en konstant är det bara att slänga på variabeln och en integrationskonstant. Alltså bör det vara så att

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-2u} \overset{\int}{\Longrightarrow} y = \frac{1}{1-2u}\cdot x + k_1 \Longrightarrow [1-2u \text{ fortfarande konstant}] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (1-2u)y = x + k_2 \Longrightarrow x - (1-2u)y = x + (2u-1)y = k.$$

Om vi nu inför variablerna

$$\begin{cases}\xi = x + (2u-1)y,\\ \eta = y,\end{cases}$$

med funktionen $v(\xi,\eta) = u(x,y)$, kommer ekvationen att förenklas till $v_\eta = 0$, eftersom den är homogen. För att komma fram till detta kan man antingen jämföra med hur det blev för uppgift 1, eller genom att använda kedjeregeln (där vi behandlar $(2u-1)$ som en konstant). Kedjeregeln:

$$u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x = v_\xi \cdot 1 + v_\eta \cdot 0 = v_\xi,$$

$$u_y = v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y = v_\xi \cdot (2u-1) + v_\eta \cdot 1 = (2u-1)v_\xi + v_\eta.$$

Insättning i PDE:n ger oss att

$$0 = (1-2u)u_x + u_y = -(2u-1)v_\xi + (2u-1)v_\xi + v_\eta = v_\eta \Longrightarrow v_\eta \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow v(\xi,\eta) = \varphi(\xi) \Longrightarrow u(x,y) = \varphi\big(x + (2u-1)y\big).$$

Detta uttryck ser väldigt suspekt ut - med rätta - men vi räknar på ändå. Eftersom villkoret $u(x,0)$ har $y = 0$ kommer den bökiga termen inuti φ:s argument att försvinna, vilket tillåter oss att lösa ut φ explicit.

$$u(x,0) = \varphi\big(x + (2u-1)\cdot 0\big) = \varphi(x) = x.$$

Detta ger oss nu en ekvation där vi kan lösa ut u.

$$u = \varphi\big(x + (2u-1)y\big) = x + (2u-1)y = x + 2yu - y \implies$$

$$\implies u - 2yu = (1-2y)u = x - y \implies u(x,y) = \frac{x-y}{1-2y}.$$

På grund av den säregna naturen av vårt tillvägagångssätt är det rimligt att vilja kontrollera detta svar, så att det faktiskt löser PDE:n. Derivering ger

$$u_x = \frac{1}{1-2y},$$

och

$$u_y = \frac{-(1-2y) + 2(x-y)}{(1-2y)^2} = \frac{2x-1}{(1-2y)^2} \implies$$

$$\implies (1-2u)u_x + u_y = \left(1 - 2\frac{x-y}{1-2y}\right)\frac{1}{1-2y} + \frac{2x-1}{(1-2y)^2} =$$

$$= \left(1 + \frac{2y-2x}{1-2y} + \frac{2x-1}{1-2y}\right)\frac{1}{1-2y} = \left(1 + \frac{2y-1}{1-2y}\right)\frac{1}{1-2y} = (1-1)\frac{1}{1-2y} = 0. \quad \square$$

Kapitel H

H.1

Eftersom det är jättedrygt att kontrollera 7000 axiom för att se om dessa mängder är linjära rum vill man leta efter ett enklare sätt. Detta enklare sätt är att kontrollera om mängderna är underrum till något känt linjärt rum. För a) och b) är det $\mathbb{R}^3$, för c)-d) är det matriser av olika storlekar, och för f)-h) handlar det om funktionsrummet. Axiomen man behöver kontrollera för att det ska vara ett underrum är att mängderna är slutna under addition, och slutet under multiplikation med skalär. Det gäller också att alla linjära rum måste innehålla ett nollelement, så om en mängd inte gör det är det ett enkelt motexempel för att visa att det inte är ett linjärt rum. Jag kommer att beteckna alla mängder i deluppgifterna med M. Dessutom kommer jag att använda mig av skalärerna $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ i deluppgifterna också. Det som alltså behöver kontrolleras är att om $u, v \in M \implies \lambda u + \mu v \in M$.

a)

Ta $u = (x_1, x_2, x_3)$ och $v = (y_1, y_2, y_3)$, så att $u, v \in M$.

$$\lambda u + \mu v = \lambda(x_1, x_2, x_3) + \mu(y_1, y_2, y_3) = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3) \implies$$

$$\implies \lambda x_1 + \mu y_1 + \lambda x_2 + \mu y_2 + \lambda x_3 + \mu y_3 = \lambda(x_1 + x_2 + x_3) + \mu(y_1 + y_2 + y_3) =$$

$$= \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0 \implies \lambda u + \mu v \in M,$$

vilket visar att det är ett underrum och således ett linjärt rum.

b)

$$\mathbf{0} = (0, 0, 0) \notin M \text{ eftersom } 0 + 0 + 0 \neq 1 \implies \text{ej linjärt rum.}$$

c)

Jag orkar inte skriva upp räkningarna, men om man har två $m \times n$-matriser och tar några godtyckliga skalär gånger dem och sedan adderar dem, kommer man uppenbarligen att fortfarande ha en $m \times n$-matris, vilket betyder att det är ett linjärt rum. Basen är bara $m \cdot n$ matriser som har 0 överallt utom ett element (se facit). Dimensionen blir då mn.

d)

Ta matriserna

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ och } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Det gäller att $\det A = \det B$, men $\det(A + B) = 1 \neq 0$. Det är alltså inte ett linjärt rum.

e)

Ta $A, B \in M$. Vi kontrollerar vad transponatet av $\lambda A + \mu B$ blir.

$$(\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T = \lambda A + \mu B,$$

alltså är $\lambda A + \mu B \in M$ och mängden utgör ett linjärt rum. Basen är samma som i c), men man behöver bara den övre triangulära biten (eftersom matrisen är symmetrisk), och huvuddiagonalen (se facit igen för tydlighet). Dimensionen här är ett triangulärt tal. Första raden bidrar med n, sedan bidrar den andra raden med $n-1$, ner tills den n:e raden bidrar med 1. Om man lägger ihop allt detta får man en aritmetisk summa

$$\text{dimension } = \sum_{k=1}^{n}(n+1-k) = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}.$$

f)

För grad $n \geq 1$, kan vi ta polynomen $p = x^n$ och $q = -x^n$, vars summa $p + q = 0$ som är av grad 0. Alltså kan det inte vara ett linjärt rum för grad större än 0. För grad 0 är det dock ett linjärt rum (inses lätt).

g)

Nollpolynomet $p_0(x) \equiv 0$ uppfyller inte att $p(0) = 1$, alltså är det inte ett linjärt rum.

h)

Ta $p(x)$ och $q(x)$ som uppfyller $p(1) = q(1) = 0$.

$$\lambda p(x) + \mu q(x) \implies \lambda p(1) + \mu q(1) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0.$$

Alltså är det ett linjärt rum. För basen kan vi vara lite listiga och bilda polynom utifrån linjärkombinationer av $(x-1), (x-1)^2, ..., (x-1)^n$. Alla linjär kombinationer kommer att ha grad $\leq n$ och även uppfylla att polynomet är 0 i $x = 1$. Dimensionen är n (vi kan inte ha med en konstant term i basen eftersom den då hade behövt vara 0, vilket inte är tillåtet.)

H.2

Beteckna alla mängderna med M, och låt även $a, b \in \mathbb{R}$. Det behöver alltså kontrolleras om $u, v \in M \implies au + bv \in M$.

a)

Ta $g, h \in M$. Vi tittar på linjärkombinationen $af(x) + bg(x)$.

$$af(0) + bg(0) + af(1) + bg(1) = a(f(0) + f(1)) + b(g(0) + g(1)) = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0,$$

vilket visar att det är ett linjärt rum. Det finns inga egentliga krav på funktionerna som tillhör mängden, så dimensionen är ∞.

b)

Nollfunktionen $g(x) \equiv 0 \notin M$, eftersom $g'(0) = 0 \neq 1$. Det är alltså inte ett linjärt rum.

c)

$$f'' - f = 0 \implies f = ae^x + be^{-x},$$

vilket innebär att $\{e^x, e^{-x}\}$ är en bas till rummet och alltså har det dimensionen 2. Eftersom differentialekvationen är linjär vet vi att den uppfyller att

$$(ag + bh)'' - (ag + bh) = 0,$$

där $g'' - g = 0$ och $h'' - h = 0$.

d)

Ta $g, h \in M$.

$$\int_0^1 (ag(x) + bh(x))\,dx = a\int_0^1 g(x)\,dx + b\int_0^1 h(x)\,dx = 0,$$

alltså är det ett linjärt rum. Återigen finns det inga stora restriktioner på funktionerna, så dimensionen är ∞. Om man tänker lite kan man komma fram till att $\{\sin k\pi x\}_{k=1}^{\infty}$ är en ortogonal bas till mängden (jämför med kapitel 3).

H.3

Den vanliga skalärprodukten är

$$(u \mid v) = \sum_{k=1}^{4} \overline{u}_k v_k.$$

$$u = (2, 1+i, i, 1-i) \text{ och } v = (1, i, -1, i) \implies$$

$$||u|| = \sqrt{(u \mid u)} = \sqrt{|2|^2 + |1+i|^2 + |i|^2 + |1-i|^2} = \sqrt{4+2+1+2} = 3,$$

$$||v|| = \sqrt{(v \mid v)} = \sqrt{|1|^2 + |i|^2 + |-1|^2 + |i|^2} = \sqrt{4} = 2,$$

$$(u \mid v) = \overline{2} \cdot 1 + \overline{1+i} \cdot i + \overline{i} \cdot (-1) + \overline{1-i} \cdot i = 2 + i + 1 + i + i - 1 = 2 + 3i,$$

$$(v \mid u) = \overline{(u \mid v)} = 2 - 3i.$$

H.4

Nu är skalärprodukten

$$(u \mid v) = \int_0^1 \overline{u(x)} v(x)\,dx.$$

$$(f \mid g) = \int_0^1 (\overline{1+ix})(2+ix^2)\,dx = \int_0^1 (1-ix)(2+ix^2)\,dx =$$

$$= \int_0^1 (2 + ix^2 - 2ix + x^3)\,dx = \left[2x + \frac{i}{3}x^3 - ix^2 + \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{9}{4} - \frac{2}{3}i,$$

$$(g \mid f) = \overline{(f \mid g)} = \frac{9}{4} + \frac{2}{3}i.$$

H.5

En skalärprodukt ska, bland annat, vara linjär i det andra facket, alltså, följande samband ska gälla $(u \,|\, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 (u \,|\, v_1) + \lambda_2 (u \,|\, v_2)$. En annan sak som måste gälla är att $(u \,|\, u) \geq 0$, med likhet om och endast om $u \equiv 0$.

a)

Låt $f(x) = g_1(x) = g_2(x) = 1$.

$$< f \,|\, g_1 + g_2 >= \int_0^1 1^2 \cdot (1+1)^2 \, dx = 4 \neq 2 =$$

$$= \int_0^1 1^2 \cdot 1^2 \, dx + \int_0^1 1^2 \cdot 1^2 \, dx =< f \,|\, g_1 > + < f \,|\, g_2 > .$$

b)

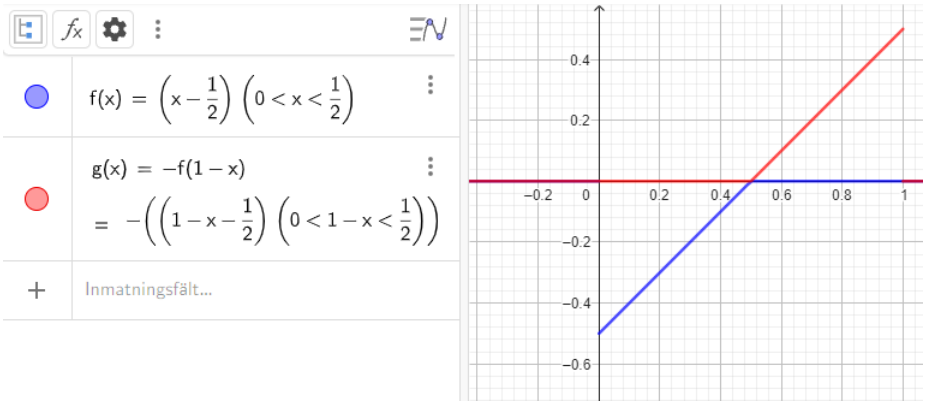
Vi väljer en funktion som är udda kring mitten av intervallet, $x = 1/2$. En sådan är $f(x) = x - 1/2$.

$$< f \,|\, f >= \int_0^1 f(x) f(1-x) \, dx = \int_0^1 (x - \frac{1}{2})(1 - x - \frac{1}{2}) \, dx =$$

$$= \int_0^1 (x - \frac{1}{2})(\frac{1}{2} - x) \, dx = - \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 \, dx \leq 0,$$

men $f(x) \not\equiv 0$, alltså är skalärprodukten ej giltig.

Att en funktion är udda kring $x = 1/2$ på intervallet $[0, 1]$ innebär att vi kan utvidga funktionen från intervallet $[0, 1/2]$ till intervallet $[1/2, 1]$ genom att säga att $f(x) = -f(1-x)$ på $[1/2, 1]$ (men x tillhör intervallet $[0, 1/2]$). Alltså kommer produkten $f(x)f(1-x) = f(x)(-f(x)) = -(f(x))^2 \leq 0$, vilket betyder att vi kan nå en motsägelse. Utvidgningen var väldigt märkligt förklarad, så jag visar en bild som lite bättre illustrerar vad jag menar. (Förhoppningsvis är läsaren inte färgblind, men om så skulle vara fallet är $g(x)$ den positiva delen av grafen (intervallet $[1/2, 1]$), och $f(x)$ är den negativa delen (intervallet $[0, 1/2]$).)



H.10

$$y(0) = h * f\,(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)f(0-t)\,dt = (h(t)\,|\,f(-t))$$

Cauchy-Schwarz olikhet säger att

$$|(u\,|\,v)| \leq ||u||\,||v||,$$

med likheten om och endast om u och v är linjärt beroende (parallella). Alltså kommer $|y(0)|$ att bli maximal om $h(t)$ och $f(-t)$ är linjärt beroende. Eftersom h är givet är $f(-t) = ch(t)$, där c fås av energivillkoret,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |ch(-t)|^2\,dt = \begin{bmatrix} x = -t \implies dx = -dt \\ t:\ -\infty \to \infty \implies x:\ \infty \to -\infty \end{bmatrix} = -c^2 \int_{\infty}^{-\infty} (h(x))^2\,dx =$$

$$= \begin{bmatrix} t = x \\ dt = dt \end{bmatrix} = c^2 \int_{-\infty}^{\infty} (h(t))^2\,dt \leq 1 \implies \text{[eftersom vi vill maximera]} \implies$$

$$\implies c = \left(\int_{-\infty}^{\infty} (h(t))^2\,dt \right)^{1/2}.$$

Alltså är

$$f(t) = ch(-t),\ -\infty < t < \infty,\ c = \left(\int_{-\infty}^{\infty} (h(t))^2\,dt \right)^{1/2}.$$

H.11

$$u_1 = (1,1,1,1),\ u_2 = (1,i,-1,-i),\ u_3 = (1,-1,1,-1),\ u_4 = (1,-i,-1,i).$$

För att kontrollera att de är parvis ortogonala behöver man beräkna 6 skalärprodukter ($\binom{4}{2} = 6$). Vektorerna är ortogonala om $(u_i\,|\,u_j) = 0$, $j \neq i$.

$$(u_1\,|\,u_2) = \overline{1} \cdot 1 + \overline{1} \cdot i + \overline{1} \cdot (-1) + \overline{1} \cdot (-i) = 0,$$

$$(u_1\,|\,u_3) = \overline{1} \cdot 1 + \overline{1} \cdot (-1) + \overline{1} \cdot 1 + \overline{1} \cdot (-1) = 0,$$

$$(u_1\,|\,u_4) = \overline{1} \cdot 1 + \overline{1} \cdot (-i) + \overline{1} \cdot (-1) + \overline{1} \cdot i = 0,$$

$$(u_2\,|\,u_3) = \overline{1} \cdot 1 + \overline{i} \cdot (-1) + (\overline{-1}) \cdot 1 + (\overline{-i}) \cdot (-1) = 0,$$

$$(u_2\,|\,u_4) = \overline{1} \cdot 1 + \overline{i} \cdot (-i) + (\overline{-1}) \cdot (-1) + (\overline{-i}) \cdot i = 0,$$

$$(u_3\,|\,u_4) = \overline{1} \cdot 1 + (\overline{-1}) \cdot (-i) + \overline{1} \cdot (-1) + (\overline{-1}) \cdot i = 0.$$

Alla vektorer har längden 2, och alltså blir basen $e_k = u_k/2$ För att hitta koordinaterna för $u = (2+i, 1+2i, i, 1-4i)$, söker vi lösningen till ekvationssystemet

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 = u$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 & = 4 + 2i, \\ \lambda_1 + i\lambda_2 - \lambda_3 - i\lambda_4 & = 2 + 4i, \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 & = 2i, \\ \lambda_1 - i\lambda_2 - \lambda_3 + i\lambda_4 & = 2 - 8i. \end{cases}$$

Lägger man ihop alla ekvationer får man att $4\lambda_1 = 8 \implies \lambda_1 = 2$, resten kan man göra själv. Det man bör komma fram till är

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2, \\ \lambda_2 = 4, \\ \lambda_3 = 2i, \\ \lambda_4 = -2 \end{cases} \implies u = 2e_1 + 4e_2 + 2ie_3 - 2e_4.$$

Om man vill kan man också använda projektionssatsen för att beräkna koordinaterna i den nya basen.

H.12

Vi tar två monom f_n och f_m, $m \neq n$, och kontrollerar om skalärprodukten är 0. Viktsfunktionen är 1 i båda deluppgifterna.

a)

$$(f_n \mid f_m) = \int_0^1 x^n x^m \, dx = \frac{1}{n+m+1} \neq 0 \implies \text{nej}.$$

b)

$$(f_n \mid f_m) = \int_{-1}^1 x^n x^m \, dx = \frac{1}{n+m+1}(1-(-1)^{n+m+1}) \neq 0 \text{ om } n+m+1 \text{ udda} \implies \text{nej}.$$

H.13

$$P_u v = \frac{(u \mid v)}{(u \mid u)} u = \frac{\int_0^1 u(x)v(x)\,dx}{\int_0^1 u(x)u(x)\,dx} \cdot 1 = \frac{\int_0^1 x\,dx}{\int_0^1 dx} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}.$$

$$P_v u = \frac{(v \mid u)}{(v \mid v)} v = \frac{\int_0^1 v(x)u(x)\,dx}{\int_0^1 v(x)v(x)\,dx} \cdot x = \frac{\int_0^1 x\,dx}{\int_0^1 x^2\,dx} = \frac{1/2}{1/3} x = \frac{3}{2} x.$$

H.15

Vi kommer att behöva värdet på ($n \geq 2$)

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2}\,dx = [\text{partialintegration}] =$$

$$= \left[-\frac{1}{2} x^{n-1} e^{-x^2}\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{n-1}{2} x^{n-2} e^{-x^2}\,dx =$$

$$= 0 + \frac{n-1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^{n-2} e^{-x^2}\,dx = \frac{n-1}{2} I_{n-2},$$

man inser också lätt att om n är udda, så kommer integranden $x^n e^{-x^2}$ vara udda och alltså är $I_n = 0$ om n är udda. Vidare gäller det att $I_0 = \sqrt{\pi}$. Vi kommer att behöva upp till och med I_4:

$$I_0 = \sqrt{\pi}, \quad I_2 = \frac{2-1}{2} I_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad I_4 = \frac{4-1}{2} I_2 = \frac{3\sqrt{\pi}}{4},$$

$$I_1 = I_3 = 0.$$

För att beräkna de tre första Hermitepolynomen använder vi oss av Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess genom att utgå från monom. För det första kan vi välja $\tilde{p}_0 = 1$. Normering:

$$(\tilde{p}_0 \,|\, \tilde{p}_0) = \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{p}_0(x))^2 \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} 1^2 \cdot e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} I_0 = 1,$$

alltså är $p_0 = \frac{\tilde{p}_0}{((\tilde{p}_0 \,|\, \tilde{p}_0))^{1/2}} = 1$ (den var redan normerad.) Vi får sedan, med projektionssatsen, att

$$\tilde{p}_1 = x - \frac{(p_0 \,|\, x)}{(p_0 \,|\, p_0)} p_0 = x - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} p_0(x) x \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}\, dx}{\int_{-\infty}^{\infty} p_0(x) p_0(x) \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}\, dx} \cdot 1 = x - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-x^2}\, dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx} = x - 0 = x,$$

eftersom vi har I_1 i täljaren. Normering ger nu att

$$p_1 = \frac{\tilde{p}_1}{((\tilde{p}_1 \,|\, \tilde{p}_1))^{1/2}} = x \left(\int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{p}_1(x))^2 \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} \right)^{-1/2} =$$

$$= x \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} \right)^{-1/2} = \frac{\pi^{1/4} x}{(I_2)^{1/2}} = \sqrt{2} x.$$

Vidare är (eftersom vi normerar polynomen i skalärprodukten är $(p_n \,|\, p_n) = 1$)

$$\tilde{p}_2 = x^2 - \frac{(p_0 \,|\, x^2)}{(p_0 \,|\, p_0)} p_0 - \frac{(p_1 \,|\, x^2)}{(p_1 \,|\, p_1)} p_1 =$$

$$= x^2 - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} p_0(x) x^2 \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}\, dx}{1} p_0(x) - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} p_1(x) x^2 \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}\, dx}{1} p_1(x) =$$

$$= x^2 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2}\, dx - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-x^2}\, dx \cdot \sqrt{2} x = x^2 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} I_2 - 0 = x^2 - \frac{1}{2}.$$

Med normeringen får vi det tredje Hermitepolynomet:

$$p_2 = \frac{\tilde{p}_2}{((\tilde{p}_2 \,|\, \tilde{p}_2))^{1/2}} = (x^2 - \frac{1}{2}) \left(\int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{p}_2(x))^2 \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}\, dx \right)^{-1/2} =$$

$$= (x^2 - \frac{1}{2}) \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - \frac{1}{2})^2 e^{-x^2}\, dx \right)^{-1/2} =$$

$$= \pi^{1/4} (x^2 - \frac{1}{2}) \left(\int_{-\infty}^{\infty} (x^4 - x^2 + \frac{1}{4}) e^{-x^2}\, dx \right)^{-1/2} =$$

$$= \pi^{1/4} (x^2 - \frac{1}{2}) \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-x^2}\, dx - \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2}\, dx + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx \right)^{-1/2} =$$

$$= \pi^{1/4} (x^2 - \frac{1}{2}) \left(I_4 - I_2 + \frac{1}{4} I_0 \right)^{-1/2} = \pi^{1/4} (x^2 - \frac{1}{2}) \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{4} \right)^{-1/2} =$$

$$= (x^2 - \frac{1}{2}) \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right)^{-1/2} = \sqrt{2} (x^2 - \frac{1}{2}).$$

H.17

Om vi skriver

$$u - tv = (u - P_v u) + (P_v u - tv)$$

kommer vi att få två termer som är ortogonala, $(u - P_v u) \perp (P_v u - tv)$, eftersom vi subtraherar bort biten av u som är parallell med v när vi tar $u - P_v u$, vilket lämnar något som är vinkelrätt mot v. Den andra termen är istället helt parallell med v, eftersom vi har en skalär gånger v och något projicerat på v. Att dessa termer är ortogonal innebär att vi kan tillämpa Pythagoras sats, vilket ger att

$$||u - tv||^2 = ||u - P_v u||^2 + ||P_v u - tv||^2,$$

och

$$\int_0^1 (u(x) - tv(x))^2\, dx = (u - tv \,|\, u - tv)^2 = ||u - tv||^2 = ||u - P_v u||^2 + ||P_v u - tv||^2 \geq$$

$$\geq ||u - P_v u||^2 + ||tv - tv||^2 = ||u - P_v u||^2,$$

med likhet om och endast om $P_v u = tv \implies u - P_v u = (u - tv) \perp v$. $\square$

H.18

För att kunna använda projektionssatsen som garanterar att vi minimerar normuttrycket krävs det att vi projicerar på en ortogonal bas, och i detta fall är redan $\sin x$ och $\sin 2x$ ortogonala i den aktuella skalärprodukten ($\int_0^\pi \sin x \sin 2x\, dx = 2\int_0^\pi \sin^2 x \cos x\, dx = 2\left[\frac{1}{3}\sin^3 x\right]_0^\pi = 0$). Alltså kan vi direkt få fram konstanterna genom att använda projektionssatsen:

$$a = \frac{(\sin x \,|\, x)}{(\sin x \,|\, \sin x)} = \frac{\int_0^\pi \sin x\, x\, dx}{\int_0^\pi \sin^2 x\, dx} = [\text{partialintegration}] =$$

$$= \frac{[-x\cos x]_0^\pi - \int_0^\pi -1 \cdot \cos x\, dx}{\frac{1}{2}\int_0^\pi (1 - \cos 2x)\, dx} = \frac{-\pi(-1) + 0 + [\sin x]_0^\pi}{\frac{1}{2}(\pi - 0)} = \frac{2}{\pi}(\pi + 0) = 2,$$

$$b = \frac{(\sin 2x \,|\, x)}{(\sin 2x \,|\, \sin 2x)} = \frac{\int_0^\pi \sin 2x\, x\, dx}{\int_0^\pi \sin^2 2x\, dx} = [\text{partialintegration}] =$$

$$= \frac{\left[-\frac{x}{2}\cos 2x\right]_0^\pi - \int_0^\pi -\frac{1}{2} \cdot \cos 2x\, dx}{\frac{1}{2}\int_0^\pi (1 - \cos 4x)\, dx} = \frac{-\frac{\pi}{2} \cdot 1 + 0 + \frac{1}{4}[\sin 2x]_0^\pi}{\frac{1}{2}(\pi - 0)} = \frac{2}{\pi}(-\frac{\pi}{2} + 0) = -1.$$

H.19

a)

Lättast är att välja funktioner som är konstant 1 på ett delintervall, och 0 på resterande. Alltså det som står i facit.

b)

Eftersom vi har valt en ortogonal bas kan vi direkt använda projektionssatsen, som säger att normuttrycket minimeras då vi väljer $v = P_{\mathcal{V}}u$. Med beteckningarna i facit är (för alla φ_k gäller det att $(\varphi_k \,|\, \varphi_k) = 1/2$)

$$v = P_{\mathcal{V}}u = \frac{(\varphi_1 \,|\, u)}{(\varphi_1 \,|\, \varphi_1)}\varphi_1 + \frac{(\varphi_2 \,|\, u)}{(\varphi_2 \,|\, \varphi_2)}\varphi_2 + \frac{(\varphi_3 \,|\, u)}{(\varphi_3 \,|\, \varphi_3)}\varphi_3 + \frac{(\varphi_4 \,|\, u)}{(\varphi_4 \,|\, \varphi_4)}\varphi_4 =$$

$$= \frac{\int_{-1}^{-1/2} u(x)\cdot 1\,dx}{1/2}\cdot\varphi_1 + \frac{\int_{-1/2}^{0} u(x)\cdot 1\,dx}{1/2}\cdot\varphi_2 + \frac{\int_{0}^{1/2} u(x)\cdot 1\,dx}{1/2}\cdot\varphi_3 + \frac{\int_{1/2}^{1} u(x)\cdot 1\,dx}{1/2}\cdot\varphi_4 =$$

$$= 2\int_{-1}^{-1/2}(x^2 - x)\,dx\cdot\varphi_1(x) + 2\int_{-1/2}^{0}(x^2 - x)\,dx\cdot\varphi_2(x) +$$

$$+2\int_{0}^{1/2}(x^2 - x)\,dx\cdot\varphi_3(x) + 2\int_{1/2}^{1}(x^2 - x)\,dx\cdot\varphi_4(x) = ...$$

$$= ...\frac{4}{3}\varphi_1(x) + \frac{1}{3}\varphi_2(x) - \frac{1}{6}\varphi_3(x) - \frac{1}{6}\varphi_4(x).$$

c)

Insättning av v från b) och uppdelning i fyra integraler för varje delintervall:

$$\int_{-1}^{1}|u(x) - v(x)|^2\,dx = \int_{-1}^{-1/2}|x^2 - x - \frac{4}{3}|^2\,dx + \int_{-1/2}^{0}|x^2 - x - \frac{1}{3}|^2\,dx +$$

$$+\int_{0}^{1/2}|x^2 - x + \frac{1}{6}|^2\,dx + \int_{1/2}^{1}|x^2 - x + \frac{1}{6}|^2\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{-1/2}|x^2 - x - \frac{4}{3}|^2\,dx + \int_{-1/2}^{0}|x^2 - x - \frac{1}{3}|^2\,dx + \int_{0}^{1}|x^2 - x + \frac{1}{6}|^2\,dx = ...$$

$$... = [\text{för numeriskt krävande}] = ... = \frac{17}{180}.$$

H.20

Monomen $1, x, x^2$ är ej parvis ortogonala i $L_2(x, [0,1])$ (notera viktsfunktionen $w(x) = x$), och alltså måste vi först bilda en ortogonal bas med hjälp av Gram-Schmidt. Vi börjar med att välja $p_0 = 1$. Projektionssatsen ger oss sedan att

$$p_1 = x - \frac{(p_0 \,|\, x)}{(p_0 \,|\, p_0)}p_0 = x - \frac{\int_0^1 1\cdot x\cdot x\,dx}{\int_0^1 1\cdot 1\cdot x\,dx}\cdot 1 = x - \frac{1/3}{1/2} = x - \frac{2}{3},$$

och

$$p_2 = x^2 - \frac{(p_0 \,|\, x^2)}{(p_0 \,|\, p_0)}p_0 - \frac{(p_1 \,|\, x^2)}{(p_1 \,|\, p_1)}p_1 =$$

$$= x^2 - \frac{\int_0^1 1\cdot x^2\cdot x\,dx}{\int_0^1 1\cdot 1\cdot x\,dx}\cdot 1 - \frac{\int_0^1 (x - \frac{2}{3})\cdot x^2\cdot x\,dx}{\int_0^1 (x - \frac{2}{3})\cdot (x - \frac{2}{3})\cdot x\,dx}\cdot (x - \frac{2}{3}) =$$

$$= x^2 - \frac{1/4}{1/2} - \frac{\int_0^1 (x^4 - \frac{2}{3}x^3)\,dx}{\int_0^1 (x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{9}x)\,dx} \cdot (x - \frac{2}{3}) =$$

$$= x^2 - \frac{1}{2} - \frac{1/5 - 1/6}{1/4 - 4/9 + 4/18} \cdot (x - \frac{2}{3}) = x^2 - \frac{1}{2} - \frac{6}{5}(x - \frac{2}{3}) = x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{3}{10}.$$

Vi kommer också att behöva

$$(p_2 \,|\, p_2) = \int_0^1 (x^2 - \frac{1/30}{1/36}x + \frac{3}{10})^2 x\,dx = \int_0^1 (x^5 - \frac{12}{5}x^4 + \frac{51}{25}x^3 - \frac{18}{25}x^2 + \frac{9}{100}x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{12}{25} + \frac{51}{100} - \frac{3}{25} + \frac{9}{200} = \frac{1}{600}.$$

Sammanställt har vi alltså den ortogonala basen

$$p_0 = 1, \quad p_1 = x - \frac{2}{3}, \quad p_2 = x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{3}{10},$$

och normerna

$$(p_0 \,|\, p_0) = \frac{1}{2}, \quad (p_1 \,|\, p_1) = \frac{1}{36}, \quad (p_2 \,|\, p_2) = \frac{1}{600}.$$

a)

I rummet vi är intresserade av skriver vi ett förstagradspolynom i vår ortogonala bas:

$$P_1 = ap_0 + bp_1 = a + b(x - \frac{2}{3}).$$

Projektionssatsen ger att den bästa approximationen till x^4 ges när

$$a = \frac{(p_0 \,|\, x^4)}{(p_0 \,|\, p_0)} = 2\int_0^1 1 \cdot x^4 \cdot x\,dx = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3},$$

$$b = \frac{(p_1 \,|\, x^4)}{(p_1 \,|\, p_1)} = 36\int_0^1 (x - \frac{2}{3}) \cdot x^4 \cdot x\,dx = 36(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}) = 36 \cdot \frac{2}{63} = \frac{8}{7}.$$

Alltså är

$$P_1 = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{8}{7}(x - \frac{2}{3}) = \frac{1}{7}(8x - 3).$$

b)

Vi har redan bestämt ett förstagradspolynom, så andragradspolynomet vi är intresserade av är

$$P_2 = P_1 + c(x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{3}{10}),$$

där

$$c = \frac{(p_2 \,|\, x^4)}{(p_2 \,|\, p_2)} = 600\int_0^1 (x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{3}{10}) \cdot x^4 \cdot x\,dx = 600(\frac{1}{8} - \frac{6}{35} + \frac{1}{20}) = 600 \cdot \frac{1}{280} = \frac{15}{7},$$

vilket ger oss att

$$P_2 = \frac{1}{7}(8x - 3) + \frac{15}{7}(x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{3}{10}) = \frac{1}{14}(30x^2 - 20x + 3).$$

H.27

a)

Säg att p har grad $m < n$. Eftersom ortogonalpolynomen utgör en bas kan vi skriva

$$p = \sum_{k=0}^{m} c_k p_k \implies (p_n \,|\, p) = \left(p_n \,\middle|\, \sum_{k=0}^{m} c_k p_k \right) = [\text{linjär i andra facket}] =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} c_k (p_n \,|\, p_k) = \sum_{k=0}^{m} c_k \cdot 0 = 0,$$

eftersom p_k är ortogonalpolynom. □

b)

Vi skriver

$$p = \sum_{k=0}^{m} c_k p_k,$$

och vi kan få koefficienterna c_k med projektionsformeln:

$$c_k = \frac{(p_k \,|\, p)}{(p_k \,|\, p_k)},$$

och eftersom $(p_k \,|\, p) = 0$ för $k = 0, 1, 2 \implies c_0 = c_1 = c_2 = 0$. Kravet att p ej är identiskt noll medför att grad $p \geq 3$. □

H.28

Om vi låter $t = \arccos x$ kan vi skriva $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ som $T_n(t) = \cos(nt)$. Betrakta

$$T_{n+1}(t) + T_{n-1}(t) = \cos((n+1)t) + \cos((n-1)t) = \cos(nt + t) + \cos(nt - t) =$$

$$= \cos nt \cos t - \sin nt \sin t + \cos nt \cos t + \sin nt \sin t = 2 \cos nt \cos t.$$

Vilket, om vi byter tillbaka till x, ger oss det rekursiva sambandet:

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2 \cos(n \arccos x) \cos(\arccos x) = 2x T_n(x) \implies$$

$$\implies T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x).$$

För att visa att T_n är ett polynom av grad n används induktion. Basfallet är när $n = 0$ och $n = 1$, vilket ger oss $T_0 = \cos(0 \cdot \arccos x) = 1$, vilket är ett polynom av grad 0, samt $T_1 = \cos(1 \cdot \arccos x) = x$, vilket är ett polynom av grad 1. Antag nu att T_n är ett polynom av grad n, då gäller det att grad $T_{n+1} = \text{grad}\,(2xT_n - T_{n-1}) = n + 1$, eftersom x ökar graden av T_n med ett, och den andra termen har grad $n - 1$, vilket betyder att den inte kan påverka högstagradstermen. Det rekursiva sambandet gör det också uppenbart att alla T_n är polynom. Detta visar att T_n är ett polynom av grad n. □

För att visa ortogonaliteten tar vi T_n och T_m, där $n \neq m$, och betraktar

$$(T_n \,|\, T_m) = \int_{-1}^{1} T_n(x) T_m(x)\, w(x)\, dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \cos(n \arccos x) \cos(m \arccos x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx =$$

$$= \begin{bmatrix} t = \arccos x \\ dt = -dx/\sqrt{1-x^2} \\ x:\ -1 \to 1 \implies t:\ \pi \to 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \int_{\pi}^{0} \cos nt \cos mt\,(-dt) = \underbrace{\int_{0}^{\pi} \cos nt \cos mt\, dt}_{=I} = [\text{partialintegration}] =$$

$$= \underbrace{\left[\frac{1}{m} \cos nt \sin mt\right]_0^{\pi}}_{=0,\ m\in\mathbb{N}} - \int_0^{\pi} -n \sin nt \frac{1}{m} \sin mt\, dt = \frac{n}{m} \int_0^{\pi} \sin nt \sin mt\, dt =$$

$$= [\text{partialintegration}] = \frac{n}{m} \underbrace{\left[-\frac{1}{m} \sin nt \cos mt\right]_0^{\pi}}_{=0,\ n\in\mathbb{N}} - \frac{n}{m} \int_0^{\pi} n \cos nt \frac{-1}{m} \cos mt\, dt =$$

$$= \frac{n^2}{m^2} I \implies (1 - \frac{n^2}{m^2}) I = 0 \implies I = 0,\ n \neq m \implies T_n \perp T_m. \quad \square$$

H.30

Eftersom graden för $p_n p_m$ är $n+m$ kan vi skriva polynomet som linjärkombinationen

$$p_n p_m = \sum_{k=0}^{n+m} c_k p_k,$$

där

$$c_k = \frac{(p_k \,|\, p_n p_m)}{(p_k \,|\, p_k)},$$

och

$$(p_k \,|\, p_n p_m) = \int_I p_k (p_n p_m) w\, dx = \int_I (p_k p_m) p_n w\, dx = (p_k p_m \,|\, p_n) = 0$$

om $k + m < n$ (från uppgift H.27), vilket betyder att $c_k = 0$ för $k < n - m$, och alltså är

$$p_n p_m = \sum_{k=n-m}^{n+m} c_k p_k. \quad \square$$

H.31

Från H.30 vet vi att vi kan skriva produkten $p_n p_1$, som har grad $n+1$ (p_1 har grad 1), som en summa på formen

$$p_n p_1 = \sum_{k=n-1}^{n+1} \alpha_k p_k = \alpha_{n-1} p_{n-1} + \alpha_n p_n + \alpha_{n+1} p_{n+1} \implies$$

$$\implies p_{n+1} = \frac{1}{\alpha_{n+1}} p_n p_1 - \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} p_n - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_{n+1}} p_{n-1} = \left(\frac{1}{\alpha_{n+1}} p_1 - \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\right) p_n - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_{n+1}} p_{n-1} =$$

$$= \left[\frac{1}{\alpha_{n+1}} p_1 - \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} = a_n x + b_n,\ -\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_{n+1}} = c_n\right] = (a_n x + b_n) p_n + c_n p_{n-1}. \quad \square$$

H.33

$$||f_n||_1 = \int_0^1 |x^n|\,dx = \frac{1}{n+1} \to 0,\ n \to \infty,$$

$$||f_n||_2 = \left(\int_0^1 |x^n|^2\,dx\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2n+1}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \to 0,\ n \to \infty,$$

$$||f_n||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f_n| = \sup_{x\in[0,1]} |x^n| = 1 \to 1,\ n \to \infty.$$

Punktvis gäller det att $f_n = x^n \to f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$

H.36

Enligt en lämplig sats, som har med att vi är i ett Hilbertrum att göra, gäller det att, om φ_k är en ortonomerad följd,

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k \text{ konvergerar i } \mathcal{H} \iff \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \text{ konvergent.}$$

Från funktionsteorin erinrar vi också att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \text{ konvergent} \iff p > 1.$$

a)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \implies c_k = 1 \implies \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} 1,$$

som divergerar, alltså konvergerar serien inte i $\mathcal{H}$.

b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}\varphi_k \implies c_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \implies \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k},$$

som divergerar, alltså konvergerar serien inte i $\mathcal{H}$.

c)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\varphi_k \implies c_k = \frac{1}{k} \implies \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

som konvergerar, alltså konvergerar serien i $\mathcal{H}$.

d)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\varphi_k \implies c_k = \frac{1}{k^2} \implies \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4},$$

som konvergerar, alltså konvergerar serien i $\mathcal{H}$.

H.38

Låt u vara en egenvektor till $\mathcal{A}$, med egenvärde λ. Då gäller det att

$$0 \leq (u \,|\, \mathcal{A}u) = (u \,|\, \lambda u) = \lambda(u \,|\, u) = \lambda ||u||^2 \iff [||u||^2 > 0,\ u \not\equiv 0] \iff \lambda \geq 0. \quad \square$$

H.39

Låt u vara en egenvektor till $\mathcal{A}$, med egenvärde λ. Betrakta skalärprodukten

$$(\mathcal{A}u \,|\, \mathcal{A}u) = (u \,|\, u) \implies [\mathcal{A}u = \lambda u] \implies (\lambda u \,|\, \lambda u) = \lambda(\lambda u \,|\, u) = \overline{\lambda}\lambda(u \,|\, u) =$$

$$= |\lambda|^2 ||u||^2 = (u \,|\, u) = ||u||^2 \implies [||u||^2 > 0,\ u \not\equiv 0] \implies |\lambda|^2| = 1 \implies |\lambda| = 1. \quad \square$$

H.45

Låt p_n vara ett ortogonalpolynom av grad n, och p ett polynom med grad $p \leq n-1$. Från H.27 vet vi att $(p_n \,|\, p) = 0$ och eftersom grad $\mathcal{A}(p) \leq$ grad $p \leq n-1$, så gäller det att $(p_n \,|\, \mathcal{A}(p)) = 0$, men eftersom $\mathcal{A}$ är symmetrisk, är

$$0 = (p_n \,|\, \mathcal{A}(p)) = (\mathcal{A}(p_n) \,|\, p),$$

där p är ett godtyckligt polynom med grad $p \leq n-1$. Alltså måste $\mathcal{A}(p_n)$ också vara ett ortogonalpolynom med grad $\mathcal{A}(p_n) = n$. Entydighet för baser i Hilbertrum medför då att $\mathcal{A}(p_n) = \lambda_n p_n$, vilket visar att p_n är egenfunktioner till $\mathcal{A}$. $\square$

H.47

Ta $u, v \in D_{\mathcal{A}}$, vilket innebär att $u'(0) = u(1) = v(0) = v'(1) = 0$. Symmetrisk innebär att $(u \,|\, \mathcal{A}v) = (\mathcal{A}u \,|\, v)$, och positivt semidefinit kräver att $(u \,|\, \mathcal{A}u) \geq 0$.

$$(u \,|\, \mathcal{A}v) = \int_0^1 \overline{u(x)}\mathcal{A}v(x)\,dx = \int_0^1 \overline{u(x)}(-v''(x))\,dx = [\text{partialintegration}] =$$

$$= \underbrace{\Big[-\overline{u(x)}v'(x)\Big]_0^1}_{=0} + \int_0^1 \overline{u'(x)}v'(x)\,dx = \underbrace{\int_0^1 \overline{u'(x)}v'(x)\,dx}_{\star} = [\text{partialintegration}] =$$

$$= \underbrace{\Big[\overline{u'(x)}v(x)\Big]_0^1}_{=0} - \int_0^1 \overline{u''(x)}v(x)\,dx = \int_0^1 \overline{-u''(x)}v(x)\,dx =$$

$$= \int_0^1 \overline{\mathcal{A}u(x)}v(x)\,dx = (\mathcal{A}u \,|\, v). \quad \square$$

För semidefiniteten sätter vi $v = u$ och utgår från $\star$, vilket ger oss att

$$(u \,|\, \mathcal{A}u) = \int_0^1 \overline{u'(x)}u'(x)\,dx = \int_0^1 |u'(x)|^2\,dx \geq 0. \quad \square$$

För att hitta egenvärden och egenfunktioner undersöker vi ekvationen

$$\mathcal{A}u = \lambda u \implies -u'' = \lambda u,\ u'(0) = u(1) = 0,$$

eftersom vi har visat att operatorn är positivt semidefinit räcker det med att titta på egenvärden $\lambda \geq 0$.

$$\lambda = 0 \implies u'' = 0 \implies u(x) = ax + b,$$

och $u'(0) = 0 \implies a = 0$, $u(1) = 0 \implies b = 0$, alltså är $\lambda = 0$ inte fruktbart.

$$\lambda > 0 \implies u'' = -\lambda u \implies u(x) = a\cos(\sqrt{\lambda}x) + b\sin(\sqrt{\lambda}x),$$

här ger $u'(0) = 0$ att $b = 0$.

$$u(1) = a\cos(\sqrt{\lambda}) = 0 \implies [a \neq 0] \implies \sqrt{\lambda_k} = \frac{\pi}{2} + k\pi \implies$$

$$\implies \lambda_k = \pi^2(k + \frac{1}{2})^2,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Detta ger oss egenfunktionerna

$$\varphi_k(x) = \cos(\pi(k + \frac{1}{2})x).$$

H.50

a)

Vi identifierar operatorn med en operator på Sturm-Liouville-form:

$$\mathcal{A}u = -\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x^2}u')' = -\frac{1}{w}(pu')' \implies w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Alltså är skalärprodukten

$$(u \mid v) = \int_{-1}^{1} \overline{u(x)}v(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

b)

$$(u \mid \mathcal{A}v) = \int_{-1}^{1} \overline{u(x)}\mathcal{A}v(x)w(x)\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \overline{u(x)}(-\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x^2}v'(x))')\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\int_{-1}^{1} \overline{u(x)}(\sqrt{1-x^2}v'(x))'\,dx =$$

$$= [\text{partialintegration}] = \underbrace{\left[-\overline{u(x)}\sqrt{1-x^2}v'(x)\right]_{-1}^{1}}_{=0} + \int_{-1}^{1} \overline{u'(x)}\sqrt{1-x^2}v'(x)\,dx =$$

$$= [\text{partialintegration}] = \underbrace{\left[-(\overline{u(x)}\sqrt{1-x^2})'v(x)\right]_{-1}^{1}}_{=0} - \int_{-1}^{1} (\overline{u'(x)}\sqrt{1-x^2})'v(x)\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \overline{(-\sqrt{1-x^2}u'(x))'}v(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \overline{-\sqrt{1-x^2}\left(\sqrt{1-x^2}u'(x)\right)'}v(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \overline{\mathcal{A}u(x)}v(x)w(x)\,dx = (\mathcal{A}u \mid v). \quad \square$$

De utintegrerade bitarna är 0 eftersom u och u' är begränsade.

c)

$$\mathcal{A}(1) = -\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x^2}(1)')' = 0 = 0 \cdot 1 \implies \lambda_0 = 0,$$
$$\mathcal{A}(x) = -\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x^2}(x)')' = -\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x^2})' =$$
$$= -\sqrt{1-x^2}\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = x = 1 \cdot x \implies \lambda_1 = 1,$$
$$\mathcal{A}(2x^2-1) = -\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x^2}(2x^2-1)')' = -\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x^2}4x)' =$$
$$= -\sqrt{1-x^2}\left(4\sqrt{1-x^2} + 4x\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right) = -\sqrt{1-x^2}\frac{4(1-x^2)-4x^2}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= 4x^2 - (4-4x^2) = 4(2x^2-1) \implies \lambda_2 = 4.$$

d)

Vi har konstaterat att 1 och $2x^2 - 1$ är egenfunktioner till operatorn, och vi vet från teorin att en bas av egenfunktioner är parvis ortogonala, vilket betyder att

$$0 = (1 \,|\, 2x^2-1) = \int_{-1}^{1} 1 \cdot (2x^2-1)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{2x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Integralen har alltså värdet 0. Om man vill kan man också göra variabelbytet $x = \cos t$, vilket förenklar integranden betydligt.

Egenfunktionerna är Chebyshevpolynomen som dök upp i uppgift H.28. $T_0 = 1$, $T_1 = x$, och $T_2 = 2x^2 - 1$.

H.51

a)

$$\mathcal{A}u = -u''+2u'+u = \frac{1}{w}(-(pu')'+qu) = \frac{1}{w}(-pu''-p'u'+qu) = -\frac{p}{w}u''-\frac{p'}{w}u'+\frac{q}{w}u \implies$$
$$\implies \begin{cases} -p/w = -1, \\ -p'/w = 2, \\ q/w = 1 \end{cases} \implies w = p = q \text{ och } p' = -2p \implies$$
$$w(x) = q(x) = p(x) = Ce^{-2x} = [C = 1] = e^{-2x}.$$

Konstanten kommer ändå att försvinna eftersom vi delar med w. Operatorn bör studeras i Hilbertrummet som utgör intervallet $[0,1]$ med viktsfunktionen $w(x) = e^{-2x}$ (alltså $L_2(w, I)$).

b)

Vi avser att lösa egenvärdesproblemet

$$\begin{cases} \mathcal{A}u = -u'' + 2u' + u = \lambda u \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

$-u'' + 2u' + u = \lambda u \implies u'' - 2u' + (\lambda - 1)u = 0 \implies$ karakteristiska ekvationen $\implies$

$$\implies r^2 - 2r + \lambda - 1 = 0 \implies r = 1 \pm \sqrt{1-(\lambda-1)} = 1 \pm \sqrt{2-\lambda}.$$

Här dyker tre olika fall upp: $\lambda < 2$, $\lambda = 2$, och $\lambda > 2$. Om $\lambda < 2$ får vi två reella rötter och alltså blir vår lösningen en summa av två exponentialtermer, men randvillkoren gör att funktionen blir identiskt 0, vilket inte är en giltig egenfunktion. Om $\lambda = 2$ kommer vi att få lösningen $u(x) = (ax+b)e^x$, återigen gör randvillkoren att $u \equiv 0$. Detta lämnar endast alternativet att $\lambda > 2$ (vi vet att det måste finnas ∞ med lösningar här eftersom vi har en Sturm-Liouville-operator), vilket ger två komplexa rötter. Rötterna är $r = 1 \pm i\sqrt{\lambda-2} = 1 \pm i\omega$, vilket ger oss

$$u(x) = e^x(a\cos\omega x + b\sin\omega x),$$

här ger $u(0) = 0$ att $a = 0$. Nu har vi villkoret att

$$u(1) = 0 \implies [b \neq 0] \implies \sin\omega = 0 \implies \omega_k = \sqrt{\lambda_k - 2} = k\pi \implies$$
$$\implies \lambda_k = 2 + k^2\pi^2,\ k \in \mathbb{N}\setminus\{0\},$$

med egenfunktioner

$$\varphi_k(x) = e^x \sin k\pi x.$$

H.52

$$(u\,|\,\mathcal{A}v) = \int_0^1 u(r)\mathcal{A}v(r)r^2\,dr = \int_0^1 u(r)\left(-\frac{1}{r^2}(r^2v'(r))'\right)r^2\,dr =$$
$$= -\int_0^1 u(r)(r^2v'(r))'\,dr = [\text{partialintegration}] =$$
$$= \underbrace{\left[-u(r)r^2v'(r)\right]_0^1}_{=0} + \int_0^1 u'(r)r^2v'(r)\,dr = [\text{partialintegration}] =$$
$$= \underbrace{\left[r^2u'(r)v(r)\right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 (r^2u'(r))'v(r)\,dr = \int_0^1 \left(-\frac{1}{r^2}(r^2u'(r))'\right)v(r)r^2\,dr =$$
$$= \int_0^1 \mathcal{A}u(r)v(r)r^2\,dr = (\mathcal{A}u\,|\,v). \quad \square$$

De utintegrerade bitarna är 0 eftersom u är begränsad nära 0, så $0 \cdot u(0^+) = 0$, och $u(1) = 0$ (motsvarande för v).

För att hitta egenvärden och egenfunktioner betraktar vi egenvärdesproblemet

$$\begin{cases} \mathcal{A}u = -\frac{1}{r}(ru)'' = \lambda u \implies -(ru)'' = \lambda(ru), \\ u \text{ begränsad nära } 0,\ u(1) = 0 \end{cases} \implies$$

$$\implies [v = ru] \implies \begin{cases} -v'' = \lambda v, \\ v(0) = v(1) = 0. \end{cases}$$

Detta är ett välbekant problem, homogena Dirichletvillkor, som vi har löst tidigare och därför tänker jag inte skriva ner räkningarna, utan direkt hoppa till att problemet har egenfunktionerna $\sin k\pi r$ och egenvärdena $\lambda_k = k^2\pi^2$, $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Detta är dock för v, och eftersom $u = v/r$ får vi att egenfunktionerna är

$$\varphi_k(r) = \frac{\sin k\pi r}{r},\ \lambda_k = k^2\pi^2,\ k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}.$$

H.55

Skalärprodukten vi använder är

$$(u \,|\, v) = \int_0^b \int_0^a \overline{u(x,y)} v(x,y)\, dxdy.$$

Ta $u, v \in D_{\mathcal{A}} \implies u(0,y) = u(a,y) = u_y(x,0) = u_y(x,b) = v(0,y) = v(a,y) = v_y(x,0) = v_y(x,b) = 0$.

$$(u \,|\, \mathcal{A}v) = \int_0^b \int_0^a \overline{u}(-\Delta v)\, dxdy = -\int_0^b \int_0^a \overline{u}(v_{xx} + v_{yy})\, dxdy =$$

$$= -\int_0^b \int_0^a \overline{u} v_{xx}\, dxdy - \int_0^a \int_0^b \overline{u} v_{yy}\, dydx = [\text{partialintegration}] =$$

$$= -\int_0^b \left(\underbrace{[\overline{u} v_x]_{x=0}^{x=a}}_{=0} - \int_0^a \overline{u}_x v_x\, dx \right) dy - \int_0^a \left(\underbrace{[\overline{u} v_y]_{y=0}^{y=b}}_{=0} - \int_0^b \overline{u}_y v_y\, dy \right) dx =$$

$$= \underbrace{\int_0^b \int_0^a \overline{u}_x v_x\, dxdy + \int_0^a \int_0^b \overline{u}_y v_y\, dydx}_{\star} = [\text{partialintegration}] =$$

$$= \int_0^b \left(\underbrace{[\overline{u}_x v]_{x=0}^{x=a}}_{=0} - \int_0^a \overline{u}_{xx} v\, dx \right) dy + \int_0^a \left(\underbrace{[\overline{u}_y v]_{y=0}^{y=b}}_{=0} - \int_0^b \overline{u}_{yy} v\, dy \right) dx =$$

$$= -\int_0^b \int_0^a \overline{u}_{xx} v\, dxdy - \int_0^a \int_0^b \overline{u}_{yy} v\, dydx = \int_0^b \int_0^a (-\overline{u}_{xx} - \overline{u}_{yy}) v\, dxdy =$$

$$= \int_0^b \int_0^a \overline{(-\Delta u)} v\, dxdy = (\mathcal{A}u \,|\, v). \quad \square$$

För att visa att operatorn är positivt semidefinit sätter vi $v = u$ och utgår från $\star$:

$$(u \,|\, \mathcal{A}u) = \int_0^b \int_0^a \overline{u}_x u_x\, dxdy + \int_0^a \int_0^b \overline{u}_y u_y\, dydx = \int_0^b \int_0^a (|u_x|^2 + |u_y|^2)\, dxdy \geq 0. \quad \square$$

För att lösa egenvärdesproblemet använder vi oss av variabelseparation: $u(x,y) = X(x)Y(y)$, där $X(0) = X(a) = 0$ och $Y'(0) = Y'(b) = 0$.

$$-\Delta u = \lambda u \implies -X''Y - XY'' = \lambda XY \implies -\frac{X''}{X} - \frac{Y''}{Y} = \lambda,$$

vi har här inget variabelberoende, alltså måste kvoterna vara konstanter, vilket betyder att vi nu har två nya delproblem

$$\begin{cases} -\frac{X''}{X} = \alpha, \ X(0) = X(a) = 0, \\ -\frac{Y''}{Y} = \beta, \ Y'(0) = Y'(b) = 0, \end{cases}$$

där $\alpha + \beta = \lambda$. Båda dessa delproblem bör kännas igen som homogena Dirichletvillkor (för X) och homogena Neumannvillkor (för Y). Alltså skulle vi kunna skriva ner lösningarna

direkt, men jag kan vara lite fullständig här. Vi börjar med att notera att det handlar om Sturm-Liouville-operatorer, vilket betyder att $\alpha, \beta, \lambda \geq 0$, (vi behöver alltså inte kontrollera negativa egenvärden eftersom operatorerna är positivt semidefinita). Vi börjar med X:

$$\alpha = 0 \implies -X'' = 0 \implies X(x) = cx + d \implies [X(0) = X(a) = 0] \implies$$
$$\implies X(x) = 0 \implies \alpha \neq 0,$$
$$\alpha > 0 \implies X'' = -\alpha X \implies X(x) = c\cos(\sqrt{\alpha}x) + d\sin(\sqrt{\alpha}x) \implies$$
$$\implies \begin{cases} X(0) = 0, \\ X(a) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} c = 0, \\ c\cos(\sqrt{\alpha}a) + d\sin(\sqrt{\alpha}a) = 0 \end{cases} \implies [d \neq 0] \implies$$
$$\implies \sin(\sqrt{\alpha}a) = 0 \implies \sqrt{\alpha_k}a = k\pi \implies \alpha_k = \frac{k^2\pi^2}{a^2},\ k \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

där

$$X_k(x) = \sin\frac{k\pi x}{a}.$$

I y-led får vi först

$$\beta = 0 \implies -Y'' = 0 \implies Y(y) = cy + d \implies [Y'(0) = Y'(b) = 0] \implies Y(y) = d,$$

vilket inte är nollfunktionen, så $\beta_0 = 0$ är ett giltigt egenvärde, med $Y_0(y) = 1$.

$$\beta > 0 \implies -Y'' = \beta Y \implies Y(y) = c\cos(\sqrt{\beta}y) + d\sin(\sqrt{\beta}y) \implies$$
$$\implies \begin{cases} Y'(0) = 0, \\ Y'(a) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} d\sqrt{\beta} = 0, \\ -c\sqrt{\beta}\sin(\sqrt{\beta}b) + d\sqrt{\beta}\cos(\sqrt{\beta}b) = 0 \end{cases} \implies$$
$$\implies [c, \beta \neq 0] \implies \sin(\sqrt{\beta}b) = 0 \implies \sqrt{\beta_n}b = n\pi \implies \beta_n = \frac{n^2\pi^2}{b^2},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Eftersom $\cos 0 = 1$ kan vi slå ihop alla egenvärden och egenfunktioner i y-led till

$$Y_n(y) = \cos\frac{n\pi y}{b},\ \beta_n = \frac{n^2\pi^2}{b^2},\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Sammanställt har vi nu egenfunkionerna

$$\varphi_{k,n}(x, y) = X_k(x)Y_n(y) = \sin\frac{k\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b},$$

med egenvärdena

$$\lambda_{k,n} = \alpha_k + \beta_n = \frac{k^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2} = \pi^2\left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right),$$

där $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ och $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Om man känner igen Dirichlet- och Neumannproblemet kan man direkt säga att $\sin\frac{k\pi x}{a}$ utgör en bas i x-led och $\cos\frac{n\pi y}{b}$ utgör en bas i y-led, vilket betyder att produkten kommer att utgöra en bas i Ω, där egenvärdena kommer att ges av summan av de enskilda egenvärdena. Att göra på detta sätt gör att räkningarna går mycket snabbare, men det kan vara bra att ha gjort allting rigoröst någon gång.

Kapitel S

S.1

För heltal $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gäller det att $\Gamma(n) = (n-1)!$, så $\Gamma(3) = 2! = 2$. Vidare är

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty t^{1/2-1} e^{-t}\, dt = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t}\, dt = \begin{bmatrix} x = \sqrt{t} \\ dx = dt/(2\sqrt{t}) \\ t:\ 0 \to \infty \\ x:\ 0 \to \infty \end{bmatrix} =$$

$$= 2\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

Slutligen är $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \implies \Gamma(1/2) = -\frac{1}{2}\Gamma(-1/2) \implies \Gamma(-1/2) = -2\Gamma(1/2) = -2\sqrt{\pi}$. Värdet på $\Gamma(1/2)$ står också i formelsamlingen.

S.5

$$\int_0^x \frac{u(y)}{\sqrt{x-y}}\, dy = 1,\ x > 0 \implies \theta(x) \int_0^x \frac{u(y)}{\sqrt{x-y}}\, dy = \theta(x),\ x \in \mathbb{R} \implies$$

$$\implies (u\theta * g\theta)(x) = \theta(x) \overset{\mathcal{L}}{\implies} U \cdot G = \frac{1}{s},$$

där $U(s)$ och $G(s)$ är Laplacetransformen av $u\theta$ och $g\theta$ respektive. Dessutom är $g(x) = 1/\sqrt{x} = x^{-1/2}$. I formelsamlingen finner vi att

$$G(s) = \mathcal{L}(x^{-1/2}\theta(x))(s) = \frac{\Gamma(1/2)}{s^{1/2}}.$$

Detta betyder att vi har ekvationen

$$U\frac{\Gamma(1/2)}{s^{1/2}} = \frac{1}{s} \implies U(s) = \frac{1}{\Gamma(1/2)}\frac{1}{s^{1/2}} = \frac{1}{(\Gamma(1/2))^2}\frac{\Gamma(1/2)}{s^{1/2}} \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\implies}$$

$$\overset{\mathcal{L}^{-1}}{\implies} u(x)\theta(x) = \frac{1}{(\Gamma(1/2))^2} x^{-1/2}\theta(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x}}\theta(x) \implies u(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x}},\ x > 0.$$

S.6

Vi utgår från monom och använder Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess. Det första polynomet kan vi enkelt välja till $p_0 = 1$, och för att få det andra subtraherar vi projektionen av x på p_0 från x.

$$p_1 = x - \frac{(p_0 \,|\, x)}{(p_0 \,|\, p_0)} \cdot p_0.$$

Vi beräknar skalärprodukterna separat.

$$(p_0 \,|\, x) = \int_{-1}^1 p_0(x)\, x\, w(x)\, dx = \int_{-1}^1 1 \cdot x\,(1-x)^\alpha (1+x)^\beta\, dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} (1+x-1)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} (1+x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,dx - \int_{-1}^{1} 1\cdot(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} (1-x)^\alpha(1+x)^{\beta+1}\,dx - \int_{-1}^{1} (1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,dx = [\text{den givna formeln}] =$$

$$= 2^{\alpha+(\beta+1)+1}B(\alpha+1,(\beta+1)+1) - 2^{\alpha+\beta+1}B(\alpha+1,\beta+1) =$$

$$= 2^{\alpha+\beta+2}B(\alpha+1,\beta+2) - 2^{\alpha+\beta+1}B(\alpha+1,\beta+1) =$$

$$= 2^{\alpha+\beta+1}\left(2\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1+\beta+2)} - \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1+\beta+1)}\right) =$$

$$= 2^{\alpha+\beta+1}\left(2\frac{\Gamma(\alpha+1)(\beta+1)\Gamma(\beta+1)}{(\alpha+\beta+2)\Gamma(\alpha+\beta+2)} - \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}\right) =$$

$$= 2^{\alpha+\beta+1}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1+\beta+1)}\left(2\frac{\beta+1}{\alpha+\beta+2} - 1\right) =$$

$$= 2^{\alpha+\beta+1}B(\alpha+1,\beta+1)\frac{2\beta+2-\alpha-\beta-2}{\alpha+\beta+2} = 2^{\alpha+\beta+1}B(\alpha+1,\beta+1)\frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta+2},$$

och

$$(p_0\,|\,p_0) = \int_{-1}^{1} p_0(x)\,p_0(x)\,w(x)\,dx = \int_{-1}^{1} 1^2\cdot(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,dx =$$

$$= 2^{\alpha+\beta+1}B(\alpha+1,\beta+1) \implies$$

$$\implies \frac{(p_0\,|\,x)}{(p_0\,|\,p_0)} = \frac{2^{\alpha+\beta+1}B(\alpha+1,\beta+1)\frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta+2}}{2^{\alpha+\beta+1}B(\alpha+1,\beta+1)} = \frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta+2}.$$

Detta ger oss nu det andra Jacobipolynomet:

$$p_1 = x - \frac{(p_0\,|\,x)}{(p_0\,|\,p_0)}\cdot p_0 = x - \frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta+2}\cdot 1 = x - \frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta+2}.$$

S.7

Det gäller att

$$e^{ir\sin\theta} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(r)e^{in\theta},$$

och Parsevals formel ger oss sambandet

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{e^{in\theta}}e^{in\theta}\,d\theta = \sum_{-\infty}^{\infty} \overline{J_n(r)}J_n(r) \implies \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta = \sum_{-\infty}^{\infty} |J_n(r)|^2 \implies$$

$$\implies \sum_{-\infty}^{\infty} |J_n(r)|^2 = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi = 1. \quad \square$$

S.11

Potensserien:

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \left(-\frac{x^2}{4}\right)^k = \frac{1}{2^\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{\nu+2k}}{k!\Gamma(k+\nu+1)4^k}.$$

a)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \left(-\frac{x^2}{4}\right)^k}{x^\nu}\right) =$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2^\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \left(-\frac{x^2}{4}\right)^k\right) = \frac{1}{2^\nu} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(-2x/4)}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \left(-\frac{x^2}{4}\right)^{k-1} =$$

$$= -\frac{x}{2^{\nu+1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!\Gamma(k+\nu+1)} \left(-\frac{x^2}{4}\right)^{k-1},$$

där k börjar på 1 eftersom den första termen är konstant och försvinner vid derivering. Om vi nu byter indexering i serien genom att ersätta $k-1$ med k (eller ekvivalent k med $k+1$), kommer serien att börja med $k=0$. Detta ger oss

$$-\frac{x}{2^{\nu+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(k+1+\nu+1)} \left(-\frac{x^2}{4}\right)^k =$$

$$= -\frac{1}{x^\nu}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(k+1+\nu+1)} \left(-\frac{x^2}{4}\right)^k = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}. \quad \square$$

b)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{J_{1/2}(x)}{x^{1/2}}\right) = -\frac{J_{3/2}(x)}{x^{1/2}} \implies J_{3/2}(x) = -\sqrt{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x}{\sqrt{x}}\right) =$$

$$= -\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = -\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{3/2}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}.$$

c)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{J_0(x)}{x^0}\right) = -\frac{J_1(x)}{x^0} \implies J_0'(x) = -J_1(x). \quad \square$$

d)

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\nu+1}J_{\nu+1}(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{\nu+1}\frac{1}{2^{\nu+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{\nu+1+2k}}{k!\Gamma(k+\nu+2)4^k}\right) =$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2^{\nu+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2\nu+2+2k}}{k!\Gamma(k+\nu+2)4^k}\right) = \frac{1}{2^{\nu+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2\nu+2k+2)x^{2\nu+2k+1}}{k!\Gamma(k+\nu+2)4^k} =$$

$$= \frac{2}{2^{\nu+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(\nu+k+1)x^{2\nu+2k+1}}{k!(k+\nu+1)\Gamma(k+\nu+1)4^k} = \frac{1}{2^\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2\nu+2k+1}}{k!\Gamma(k+\nu+1)4^k} =$$

$$= \frac{x^{2\nu+1}}{2^\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!\Gamma(k+\nu+1)4^k} = x^{\nu+1}\frac{x^\nu}{2^\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x^2)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)4^k} =$$

$$= x^{\nu+1}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \left(-\frac{x^2}{4}\right)^k = x^{\nu+1}J_\nu(x). \quad \square$$

S.12

Eftersom

$$e^{ir\sin\theta} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(r)e^{in\theta}$$

vet vi att (om vi inte bekymrar oss om konvergens)

$$2\frac{\partial}{\partial r}\left(e^{ir\sin\theta}\right) = 2\frac{\partial}{\partial r}\left(\sum_{-\infty}^{\infty} J_n(r)e^{in\theta}\right) \implies \sum_{-\infty}^{\infty} 2J_n'(r)e^{in\theta} = 2i\sin\theta e^{ir\sin\theta} =$$

$$= 2i\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}e^{ir\sin\theta} = e^{i\theta}e^{ir\sin\theta} - e^{-i\theta}e^{ir\sin\theta} = e^{i\theta}\sum_{-\infty}^{\infty} J_n(r)e^{in\theta} - e^{-i\theta}\sum_{-\infty}^{\infty} J_n(r)e^{in\theta} =$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(r)e^{i(n+1)\theta} - \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(r)e^{i(n-1)\theta} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_{n-1}(r)e^{in\theta} - \sum_{-\infty}^{\infty} J_{n+1}(r)e^{in\theta},$$

eftersom serierna löper över alla heltal kan vi byta index utan några problem (i den första ersätts $n+1$ med n, och i den andra ersätts $n-1$ med n).

$$\sum_{-\infty}^{\infty} J_{n-1}(r)e^{in\theta} - \sum_{-\infty}^{\infty} J_{n+1}(r)e^{in\theta} = \sum_{-\infty}^{\infty} \left(J_{n-1}(r) - J_{n+1}(r)\right)e^{in\theta} \implies$$

$$\implies \sum_{-\infty}^{\infty} 2J_n'(r)e^{in\theta} = \sum_{-\infty}^{\infty} \left(J_{n-1}(r) - J_{n+1}(r)\right)e^{in\theta} \implies \text{[entydighet]} \implies$$

$$\implies 2J_n'(r) = J_{n-1}(r) - J_{n+1}(r). \quad \square$$

S.13

Från formelbladet vet vi att Bessels differentialekvation,

$$y'' + \frac{1}{r}y' + \left(\lambda - \frac{\nu^2}{r^2}\right)y = 0,$$

har den allmänna lösningen

$$y(r) = \begin{cases} aJ_\nu(\sqrt{\lambda}r) + bY_\nu(\sqrt{\lambda}r), & \lambda > 0, \\ ar^\nu + br^{-\nu}, & \lambda = 0,\ \nu \neq 0, \\ a + b\ln r, & \lambda = \nu = 0. \end{cases}$$

Principen för deluppgifterna är sedan att identifiera vad λ och ν har för värden.

a)

$$r^2y'' + ry = 0 \implies y'' + \frac{1}{r}y' + (0 - \frac{0^2}{r^2})y = 0.$$

Vi ser att $\lambda = \nu = 0$, vilket ger oss lösningen $y(r) = a + b\ln r$. Den här hade man också kunnat lösa som en separabel differentialekvation, eller med integrerande faktor.

b)

$$r^2y'' + ry - y = 0 \implies y'' + \frac{1}{r}y' + (0 - \frac{1^2}{r^2})y = 0.$$

Nu kan vi identifiera att $\lambda = 0$, och att $\nu = \pm 1$, vilket ger oss lösningen $y(r) = ar + \frac{b}{r}$.

c)

$$r^2y'' + ry + r^2y = 0 \implies y'' + \frac{1}{r}y' + (1 - \frac{0^2}{r^2})y = 0.$$

Härur finner vi att $\lambda = 1$, och $\nu = 0$, vilket betyder att $y(r) = aJ_0(r) + bY_0(r)$.

S.14

a)

$$\mathcal{A}u = -\frac{1}{x}(xu')' = -\frac{1}{w}(pu')' \implies w(x) = x.$$

Vi identifierar operatorn på Sturm-Liouville-form och läser av viktsfunktionen, vilket betyder att vi enkelt kan skriva upp den korrekta skalärprodukten:

$$(u \mid v) = \int_0^2 \overline{u(x)}v(x)\, w(x)\, dx = \int_0^2 \overline{u(x)}v(x)\, x\, dx$$

b)

$$\mathcal{A}u = -\frac{1}{x}(xu')' = -\frac{1}{x}(xu'' + u') = -u'' - \frac{1}{x}u' = \lambda u \implies u'' + \frac{1}{x}u' + \lambda u = 0.$$

Identifiering med Bessels differentialekvation visar att $\nu = 0$ och därför är

$$u(x) = aJ_0(\sqrt{\lambda}x) + bY_0(\sqrt{\lambda}x).$$

Eftersom Y_0 är obegränsad nära $x = 0$ och, vi har kravet att u ska vara begränsad vid 0, måste vi välja $b = 0$.

$$u(x) = aJ_0(\sqrt{\lambda}x) \implies u'(x) = a\sqrt{\lambda}J_0'(\sqrt{\lambda}x) \implies$$

$$\implies u'(2) = 0 \implies a\sqrt{\lambda}J_0'(2\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Eftersom vi söker icke-triviala lösningar är $a \neq 0$, men vi ser att $\lambda = 0$ fungerar. Vilket betyder att det första egenvärdet är $\lambda_0 = 0$, med egenfunktionen $\varphi_0(x) = 1$ (eftersom $J_0(0) = 1$). För resterande egenvärden måste vi vända oss till tabellen av nollställen till derivatan av Besselfunktioner. Det första nollstället för derivatan är då argumentet är 0,

men vi har redan egenvärdet $\lambda_0 = 0$, och därför är endast de positiva nollställena till J_0' relevanta.

$$a\sqrt{\lambda}J_0'(2\sqrt{\lambda}) = 0 \implies [a, \lambda \neq 0] \implies 2\sqrt{\lambda_k} = \beta_{0,k} \implies \lambda_k = \left(\frac{\beta_{0,k}}{2}\right)^2,$$

där $\beta_{0,k} = \alpha'_{0,k+1}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (alltså alla positiva nollställen till J_0'). Egenfunktionerna till λ_k blir då $\varphi_k(x) = J_0(\frac{1}{2}\beta_{0,k}x)$.

c)

Gör själv.

d)

Enligt lämpliga satser utgör egenfunktionerna en ortogonal bas, vilket betyder att vi kan bestämma utvecklingen med projektionssatsen.

$$x = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_0(\frac{1}{2}\beta_{0,k}x),$$

där Fourierkoefficienterna ges av projektionssatsen (glöm inte bort viktsfunktionen):

$$c_0 = \frac{(\varphi_0 \,|\, x)}{(\varphi_0 \,|\, \varphi_0)} = \frac{\int_0^2 1 \cdot x \cdot x\, dx}{\int_0^2 1 \cdot 1 \cdot x\, dx} = \frac{8/3}{4/2} = \frac{4}{3},$$

$$c_k = \frac{(\varphi_k \,|\, x)}{(\varphi_k \,|\, \varphi_k)} = \frac{\int_0^2 \varphi_k(x) \cdot x \cdot x\, dx}{\int_0^2 \varphi_k(x) \cdot \varphi_k(x)\, x\, dx} = \frac{\int_0^2 x^2 J_0(\frac{1}{2}\beta_{0,k}x)\, dx}{\int_0^2 x(J_0(\frac{1}{2}\beta_{0,k}x))^2\, dx}.$$

S.15

Vi betraktar problemet i polära koordinater: $u = u(r, \theta)$, och skriver Laplaceoperatorn i polära koordinater.

$$\begin{cases} -\Delta u = -u_{rr} - \frac{1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = \lambda u, & 0 < r < 1,\ 0 < \theta < \pi/3, \\ u(1, \theta) = 0,\ u \text{ begr. nära } 0, & 0 < \theta < \pi/3, \\ u(r, 0) = u(r, \frac{\pi}{3}) = 0, & 0 < r < 1. \end{cases}$$

Vi separerar variablerna: $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$, vilket ger ger oss randvillkoren att $R(1) = 0$, samt att $\Theta(0) = \Theta(\pi/3) = 0$. Insättning i PDE:n ger att

$$-R''(r)\Theta(\theta) - \frac{1}{r}R'(r)\Theta(\theta) - \frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta) = \lambda R(r)\Theta(\theta) \implies -\frac{R''}{R} - \frac{1}{r}\frac{R'}{R} - \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda,$$

vi har inget θ-beroende i denna ekvation, så vi vet att

$$-\frac{\Theta''}{\Theta} = \alpha,$$

som tillsammans med våra homogena Dirichletvillkor i θ-led är ett välbekant problem. Vi vet att minus andra derivatan med homogena Dirichletvillkor är positivt definit och har

egenfunktioner i form av sinus (om man vill kan man lösa det nya egenvärdesproblemt för θ med $\Theta(0) = \Theta(\pi/3) = 0$). Alltså är lösningen i θ-led

$$\Theta_n(\theta) = \sin \frac{n\pi\theta}{\pi/3} = \sin 3n\theta,$$

med egenvärdena $\alpha_n = (3n)^2$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Detta betyder att vi kan ersätta $-\Theta''/\Theta$ i vår ursprungliga ekvation med $\alpha_n = (3n)^2$.

$$-\frac{R''}{R} - \frac{1}{r}\frac{R'}{R} - \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta} = -\frac{R''}{R} - \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{(3n)^2}{r^2} = \lambda \implies$$

$$\implies R'' + \frac{1}{r}R' + \left(\lambda - \frac{(3n)^2}{r^2}\right) R = 0,$$

vilket vi känner igen som Bessels differentialekvation med $\nu = 3n$, och alltså har vi, i r-led, lösningen

$$R(r) = aJ_{3n}(\sqrt{\lambda}r) + bY_{3n}(\sqrt{\lambda}r).$$

Eftersom vår funktion ska vara begränsad nära $r = 0$ sätter vi $b = 0$ och det andra randvillkoret ger då att ($a \neq 0$)

$$R(1) = 0 \implies J_{3n}(\sqrt{\lambda}) = 0 \implies \sqrt{\lambda_{n,k}} = \alpha_{3n,k} \implies \lambda_{n,k} = \alpha_{3n,k}^2,$$

vilket är det k:e nollstället till den $3n$:e Besselfunktionen. Sammanställt har vi alltså lösningen

$$u = \varphi_{n,k}(r,\theta) = R_k(r)\Theta_n(\theta) = J_{3n}(\alpha_{3n,k}r)\sin 3n\theta,\ n,k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

S.16

$$j_0(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{0+1/2}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{1/2}(x) = [\text{S.10}] = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x = \frac{\sin x}{x},$$

$$j_1(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{1+1/2}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{3/2}(x) = [\text{S.11 b)}] =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{3/2}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3} = \frac{\sin x - x\cos x}{x^2},$$

$$j_2(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{2+1/2}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{5/2}(x),$$

och

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{J_{3/2}(x)}{x^{3/2}}\right) = -\frac{J_{5/2}(x)}{x^{3/2}} \implies J_{5/2} = -x^{3/2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{3/2}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}}{x^{3/2}}\right) =$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{3/2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}\right) =$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{3/2}\frac{x^3(\cos x - \cos x + x\sin x) - 3x^2(\sin x - x\cos x)}{x^6} =$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{3/2}\frac{x^4\sin x - 3x^2\sin x + 3x^3\cos x}{x^6} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{3/2}\frac{x^2\sin x - 3\sin x + 3x\cos x}{x^4} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{3\sin x - 3x\cos x - x^2\sin x}{x^{5/2}} \implies$$

$$\implies j_2(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{5/2}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{3\sin x - 3x\cos x - x^2\sin x}{x^{5/2}} =$$

$$= \frac{3\sin x - 3x\cos x - x^2\sin x}{x^3} = \frac{(3-x^2)\sin x - 3x\cos x}{x^3}.$$

S.18

Från formelbladet vet vi att differentialekvationen

$$y'' + \frac{2}{r}y' + \left(\lambda - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right)y = 0$$

har den allmänna lösningen

$$y(r) = \begin{cases} aj_\ell(\sqrt{\lambda}r) + by_\ell(\sqrt{\lambda}r), & \lambda > 0, \\ ar^\ell + br^{-\ell-1}, & \lambda = 0,\ \ell \neq -1/2, \\ \frac{a+b\ln r}{\sqrt{r}}, & \lambda = 0,\ \ell = -1/2. \end{cases}$$

Principen för deluppgifterna är sedan att identifiera vad λ och ℓ har för värden.

a)

$$r^2y'' + 2ry' = 0 \implies y'' + \frac{2}{r}y' + \left(0 - \frac{0\cdot(0+1)}{r^2}\right)y = 0.$$

Vi ser att $\lambda = \ell = 0$ ($\ell = -1$ fungerar också, men man får samma svar). Alltså är $y(r) = ar^0 + b^{-0-1} = a + \frac{b}{r}$ (med $\ell = -1$ får man $y(r) = ar^{-1} + b^{-(-1)-1} = \frac{a}{r} + b$). Denna differentialekvation går, precis som S.13 a), att lösa med integrerande faktor eller som en separabel.

b)

$$r^2y'' + 2ry' - 2y = 0 \implies y'' + \frac{2}{r}y' + \left(0 - \frac{1\cdot(1+1)}{r^2}\right)y = 0.$$

Detta indikerar att $\lambda = 0$ och att $\ell = 1$, vilket ger oss lösningen $y(r) = ar^1 + br^{-1-1} = ar + \frac{b}{r^2}$.

c)

$$r^2y'' + 2ry' + r^2y = 0 \implies y'' + \frac{2}{r}y' + \left(1 - \frac{0\cdot(0+1)}{r^2}\right)y = 0.$$

Nu är $\lambda = 1$ och $\ell = 0$ (eller $\ell = -1$), vilket betyder att

$$y(r) = aj_0(r) + by_0(r) = a\frac{\sin r}{r} - b\frac{\cos r}{r}.$$

Man tycka att $\ell = -1$ bör ge en annan lösning, men det visar sig att en linjärkombination av j_0 och y_0 är linjärt beroende med j_{-1} och y_{-1}. Med räkneregler från till exempel S.11 kan man räkna sig fram till att

$$j_{-1}(r) = \frac{\cos r}{r} \text{ och } y_{-1}(r) = \frac{\sin r}{r}.$$

Alltså är $y_{-1} = j_0$ och $j_{-1} = -y_{-1}$.

S.20

a)

Eftersom problemet är vinkeloberoende är $u = u(r)$, och $\Lambda u = 0$ i Laplaceoperatorn för sfäriska koordinater. Att vi arbetar i enhetsklotet betyder att $0 < r < 1$ och vi har det homogena Dirichletvillkoret $u(1) = 0$. Slutligen vill vi också att vår funktion ska vara begränsad vi $r = 0$. Vi skall alltså lösa egenvärdesproblemet

$$\begin{cases} \mathcal{A}u = -\Delta u = -u'' - \frac{2}{r}u' = \lambda u, & 0 < r < 1, \\ u(1) = 0, \ u \text{ begr. nära } 0. \end{cases}$$

Eftersom vi känner oss lata identifierar vi

$$-u'' - \frac{2}{r}u' = \lambda u \implies u'' + \frac{2}{r}u' + \lambda u = 0$$

med differentialekvationen

$$u'' + \frac{2}{r}u' + \left(\lambda - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right)u = 0$$

och ser att $\ell = 0$, vilket ger oss lösningen

$$u(r) = aj_0(\sqrt{\lambda}r) + y_0(\sqrt{\lambda}r) = a\frac{\sin\sqrt{\lambda}r}{\sqrt{\lambda}r} - b\frac{\cos\sqrt{\lambda}r}{\sqrt{\lambda}r}.$$

Eftersom u är begränsad vi $r = 0$ måste $b = 0$ och $u(1) = 0$ ger att

$$\tilde{a}\sin\sqrt{\lambda} = 0 \implies [\tilde{a} \neq 0] \implies \sqrt{\lambda_k} = k\pi \implies \lambda_k = k^2\pi^2, \ k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Vi har alltså egenfunktionerna

$$\varphi_k(r) = \frac{\sin k\pi r}{k\pi r},$$

med egenvärdena

$$\lambda_k = k^2\pi^2, \ k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

b)

Egenfunktionerna vi fann i a) utgör en ortogonal bas i $L_2(r^2, (0,1])$, (r^2 är viktsfunktionen $w(r)$), vilket betyder att vi kan Fourierutveckla funktionen med hjälp av projektionssatsen. Vi kan först notera att

$$1(x,y,z) \equiv 1 \iff 1(r) \equiv 1,$$

och nu skriver vi

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(r) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{\sin k\pi r}{k\pi r},$$

där

$$c_k = \frac{(\varphi_k \,|\, 1)}{(\varphi_k \,|\varphi_k\,)} = \frac{\int_0^1 \frac{\sin k\pi r}{k\pi r} \cdot 1 \cdot r^2 \, dr}{\int_0^1 \left(\frac{\sin k\pi r}{k\pi r}\right)^2 \cdot r^2 \, dr} = k\pi \frac{\int_0^1 r \sin k\pi r \, dr}{\int_0^1 \sin^2 k\pi r \, dr} = [\text{partialintegration}] =$$

$$= k\pi \frac{\left[-\frac{r}{k\pi} \cos k\pi r\right]_0^1 - \int_0^1 -1 \cdot \frac{1}{k\pi} \cos k\pi r \, dr}{\frac{1}{2} \int_0^1 (1 - \cos 2k\pi r) \, dr} =$$

$$= 2k\pi \frac{-\frac{1}{k\pi} \cos k\pi - 0 + \left[\frac{1}{k^2\pi^2} \sin k\pi r\right]_0^1}{1 - 0} = 2k\pi(-\frac{1}{k\pi}(-1)^k + 0) = 2(-1)^{k+1} \implies$$

$$\implies 1 = \sum_{k=1}^{\infty} 2(-1)^{k+1} \frac{\sin k\pi r}{k\pi r}.$$

Kapitel D

D.1

Sträng betyder att det är endast en rumsvariabel ($u = u(x,t)$), och det handlar om vågekvationen eftersom vi pratar om svängningar (och strängar). Vidare är det homogena Dirichletvillkor ($u(0,t) = u(L,t) = 0$) eftersom den är fast inspänd. Det sägs ingenting om strängens initiala form, eller hastighet, så vi ansätter godtyckliga funktioner till begynnelsevillkoren, säg $u(x,0) = g(x)$ och $u_t(x,0) = h(x)$. Den punktformiga massan som är fäst i strängen kan representeras med en deltadistribution i punkten $x = a$, som verkar med tyngdkraften. Alltså är $f = -m_0 g\delta(x-a)$ i högerledet. Detta ger oss problemet

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = -\frac{m_0 g}{\rho}\delta(x-a), & 0 < x < L,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = g(x),\ u_t(x,0) = h(x), & 0 < x < L. \end{cases}$$

D.4

a)

Produktregeln säger att

$$(g\delta)' = g'\delta + g\delta' \iff g(x)\delta'(x) = (g(x)\delta(x))' - g'(x)\delta(x) =$$
$$= (g(0)\delta(x))' - g'(0)\delta = g(0)\delta'(x) - g'(0)\delta(x). \quad \square$$

b)

På samma sätt som ovan gäller det att

$$g(x)\delta''(x) = (g(x)\delta'(x))' - g'(x)\delta'(x) =$$
$$= (g(0)\delta'(x) - g'(0)\delta(x))' - (g'(0)\delta'(x) - g''(0)\delta(x)) =$$
$$= g(0)\delta''(x) - g'(0)\delta'(x) - g'(0)\delta'(x) + g''(0)\delta(x) =$$
$$= g(0)\delta''(x) - 2g'(0)\delta'(x) + g''(0)\delta(x). \quad \square$$

D.5

Vi använder förenklingsreglerna i D.4 och även att $f(x)\delta_a = f(a)\delta_a$ samt att $\int f(t)\delta_a\,dt = f(a)$..

a)

$$e^x\delta_1 = e\delta_1.$$

b)

$$x\delta' = 0 \cdot \delta' - 1 \cdot \delta = -\delta.$$

c)

$$\cos(x)\delta' = \cos 0 \cdot \delta' - (-\sin 0)\delta = \delta'.$$

d)

$$x^2\delta'' = 0^2 \cdot \delta'' - 2 \cdot 2 \cdot 0 \cdot \delta' + 2 \cdot \delta = 2\delta.$$

e)

$$\int g(t)\delta(t-1)\,dt = g(1).$$

D.6

a)

$$f(x) = e^{-x}\theta(x) \implies f'(x) = -e^{-x}\theta(x) + e^{-x}\delta(x) = e^{-0}\delta(x) - e^{-x}\theta(x) =$$
$$= \delta(x) - f(x) \implies f''(x) = \delta'(x) - f'(x) = \delta'(x) - \delta(x) + e^{-x}\theta(x).$$

b)

Vi börjar med att först beräkna derivatan av $g(x) = |x|$. Man kan skriva om absolutbeloppet i termer av stegfunktioner:

$$|x| = -x(1-\theta(x)) + x\theta(x) = x(2\theta(x) - 1).$$

Vi kan nu beräkna g' med produktregeln:

$$g'(x) = 2\theta(x) - 1 + x \cdot 2\delta(x) = 2\theta(x) - 1 \text{ (rimligt)} \implies g''(x) = 2\delta(x).$$

Med detta kan vi beräkna f' och f''.

$$f(x) = e^{-|x|} = e^{-g(x)} \implies f'(x) = -g'(x)e^{-g(x)} \implies$$
$$\implies f''(x) = -g''(x)e^{-g(x)} + (g'(x))^2 e^{-g(x)}.$$

Insättning av g, g', och g'':

$$f'(x) = (1 - 2\theta(x))e^{-|x|},$$
$$f''(x) = -2\delta(x)e^{-|x|} + (2\theta(x) - 1)^2 e^{-|x|} =$$
$$= \left[(2\theta(x) - 1)^2 = 1 \text{ för alla } x \neq 0\right] = e^{-|x|} - 2\delta(x).$$

D.8

a)

$$\left(x^2\theta(x-1)\right)' = 2x\theta(x-1) + x^2\delta(x-1) = 2x\theta(x) + \delta(x-1).$$

b)

Det gäller att

$$f(x) = g(x)\theta(x-a) \implies f'(x) = g'(x)\theta(x-a) + g(x)\delta(x-a) =$$
$$= g'(x)\theta(x-a) + g(a)\delta(x-a).$$

Alltså, om man vill integrera $g'(x)\theta(x-a)$ måste man kompensera för deltadistributionen som dyker upp när man deriverar sedan. Man vill alltså välja en primitiv så att funktionen är 0, då $x = a$. Detta åstadkommer genom att välja den primitiva funktionen $(g(x) - g(a))\theta(x-a)$, till integranden $g'(x)\theta(x-a)$. Med denna kunskap kan vi enkelt lösa uppgiften.

$$\int x\theta(x-1)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right)\theta(x-1) + C.$$

D.9

Problemställningen blir samma som i D.1, men istället för $f = -m_0 g\delta(x-a)$ kommer den här att bli $F\delta(x-a)$. Eftersom vi tittar på den stationära utböjningen kan vi ignorera begynnelsevillkoren och sätta alla tidsderivator till 0.

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = \frac{F}{\rho}\delta(x-a) \implies \left[u_{tt} = 0,\ c^2 = \frac{S}{\rho},\ u = u(x)\right] \implies -Su''(x) = F\delta(x-a),$$

där vi har randvillkoren $u(0) = u(1) = 0$ eftersom strängen är fast inspänd och har längden 1. Detta är en ordinär differentialekvation, som vi enkelt kan lösa.

$$u'' = -\frac{F}{S}\delta_a \implies u' = -\frac{F}{S}\theta_a + A \implies$$
$$\implies \text{[diskussionen i D.8 b)]} \implies u(x) = -\frac{F}{S}(x-a)\theta_a + Ax + B.$$

Eftersom $a \in (0,1)$ kommer $\theta(0-a) = 0$ och $\theta(1-a) = 1$, vilket ger oss ekvationssystemet

$$\begin{cases} u(0) = 0, \\ u(1) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} B = 0, \\ -\frac{F}{S}(1-a) + A + B = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = \frac{F}{S}(1-a), \\ B = 0 \end{cases} \implies$$
$$\implies u(x) = \frac{F}{S}((1-a)x - (x-a)\theta(x-a)).$$

D.10

Att koncentrationen är liten för stora x kan tolkas som att $\lim_{x\to\pm\infty} u(x) = 0$.

$$-((1+x^2)u')' = k\delta(x) \implies (1+x^2)u' = -k\theta(x) + A \implies$$
$$\implies u(x) = A\arctan x + B - k\arctan x\,\theta(x).$$

Vi behöver inte kompensera med den primitiva funktionen framför θ eftersom $\arctan 0 = 0$. Våra restriktioner på funktionen ger nu följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} \lim_{x\to-\infty} u(x) = 0, \\ \lim_{x\to\infty} u(x) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} -\frac{\pi}{2}A + B = 0, \\ \frac{\pi}{2}A + B - k\frac{\pi}{2} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = \frac{k}{2}, \\ B = \frac{k\pi}{4} \end{cases} \implies$$
$$\implies u(x) = \frac{k}{2}\arctan x + \frac{k\pi}{4} - k\arctan x\,\theta(x) = -k(\arctan x\,(\theta(x) - \frac{1}{2}) - \frac{\pi}{4}).$$

D.12

Detta är en linjär, första ordningens, ordinär differentialekvation, vilket betyder att vi kan lösa den med en integrerande faktor.

$$u' + (2x+1)u = \delta' \implies \mu(x) = e^{\int (2x+1)\,dx} = e^{x^2+x} \implies$$

$$\implies \left(e^{x^2+x}u\right)' = e^{x^2+x}\delta' = e^0\delta' - (2\cdot 0+1)e^0\delta = \delta' - \delta \implies$$

$$\implies e^{x^2+x}u = \delta - \theta + A \implies u(x) = (A-\theta(x))e^{-x^2-x} + e^{-x^2-x}\delta(x) =$$

$$= (A-\theta(x))e^{-x^2-x} + \delta(x).$$

D.15

Vi använder sats D.5, som säger att den allmänna lösningen till ekvationer av denna typ ges av en linjär kombination av deltadistributioner och dess derivator upp till ett mindre än ordningen av funktionens nollställe. Alltså i x^nU, har x^n ett nollställe av ordning n i $x=0$, vilket betyder att den allmänna lösningen till $x^nU = 0$ är $U = \sum_{k=0}^{n-1} c_k\delta^{(k)}$.

a)

Vi kan direkt använda satsen, vilket ger svaret $U = c\delta(x)$. Eftersom nollstället är av ordning 1 har vi bara en term i lösningen.

b)

Samma som a), men translaterad ett steg åt höger, $U = c\delta(x-1)$.

c)

Även här har funktionen framför ett enkelt nollställe, men nu i $x = \ln 2$, alltså är $U = c\delta(x - \ln 2)$.

d)

Har har vi två nollställen som båda är enkla ($x=-1$ och $x=1$), vilket betyder att vår lösningen kommer att bestå av två termer: $U = a\delta(x+1) + b\delta(x-1)$.

e)

Nu har vi oändligt många nollställen som alla är enkla ($x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$), vilket ger oss att

$$U = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\delta(x-k\pi).$$

f)

x^3 har ett nollställe ordning 3, vilket ger oss att $U = c_0\delta(x) + c_1\delta'(x) + c_2\delta''(x)$.

D.17

Om vi lämnar alla oegentligheter bakom oss och använder oss av integralnotationen för att skriva hur distributioner agerar på testfunktioner och sedan utför variabelbyten som vanligt kommer dessa uppgifter att, rent räknemässigt, bli enkla. I b)-d) är φ en godtycklig testfunktion.

a)

$$\theta(-2x+1) = \begin{cases} 1, & -2x+1>0, \\ 0, & -2x+1<0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1, & x<1/2, \\ 0, & x>1/2 \end{cases} = 1-\theta_{1/2}(x).$$

b)

$$\delta(2x)[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(2x)\varphi(x)\,dx = \begin{bmatrix} t=2x \implies dx = dt/2 \\ x:\ -\infty\to\infty \implies t:\ -\infty\to\infty \end{bmatrix} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t/2)\,\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\varphi(0/2) = \frac{1}{2}\varphi(0) = \frac{1}{2}\delta(x)[\varphi].$$

c)

$$\delta(-2x+1)[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(-2x+1)\varphi(x)\,dx = \begin{bmatrix} t=-2x+1 \implies dx = -dt/2 \\ x:\ -\infty\to\infty \implies t:\ \infty\to-\infty \end{bmatrix} =$$

$$= \int_{\infty}^{-\infty} \delta(t)\varphi\left(\frac{1-t}{2}\right)\frac{-dt}{2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi\left(\frac{1-t}{2}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{1-0}{2}\right) = \frac{1}{2}\varphi(1/2) = \frac{1}{2}\delta_{1/2}(x)[\varphi].$$

d)

$$\delta'(2x)[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(2x)\varphi(x)\,dx = \begin{bmatrix} t=2x \implies dx = dt/2 \\ x:\ -\infty\to\infty \implies t:\ -\infty\to\infty \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)\varphi(t/2)\,dt = [\text{partialintegration}] = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)(\varphi(t/2))'\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\cdot\frac{1}{2}\varphi'(t/2)\,dt = -\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi'(t/2)\,dt =$$

$$= -\frac{1}{4}\varphi'(0/2) = -\frac{1}{4}\varphi'(0) = \frac{1}{4}\delta'(x)[\varphi].$$

Den utintegrerade biten i partialintegrationen försvinner eftersom testfunktioner har kompakt stöd, och vidare gäller det att $\delta'[\varphi] = -\varphi'(0)$, vilket förklarar den sista likheten.

D.18

Deltadistributionen är enhet vid faltning, alltså $(\delta * f)(x) = f(x)$, och eftersom man kan flytta derivator samt translatering i faltningar gäller det att $(\delta_a^{(k)} * f)(x) = f^{(k)}(x-a)$.

a)

$$\delta * e^{-x^2} = e^{-x^2}.$$

b)

$$\delta' * (e^{-x}\theta(x)) = (e^{-x}\theta(x))' = [\text{D.6 a)}] = \delta(x) - e^{-x}\theta(x).$$

c)

$$\delta_1 * \sin 2x = \sin(2(x-1)) = \sin(2x-2).$$

D.22

$$\delta'(x - \frac{\pi}{2}) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos kx,$$

där

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \delta'(x - \frac{\pi}{2})\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\delta(x - \frac{\pi}{2})\right]_0^{\pi} = 0,$$

eftersom deltadistributionen har kompakt stöd och är 0 utanför $x = 0$.

$$c_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \delta'(x - \frac{\pi}{2})\cos kx\,dx = [f(x)\delta_a' = f(a)\delta_a' - f'(a)\delta_a] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\cos\frac{k\pi}{2}\delta'(x - \frac{\pi}{2}) - (-k\sin\frac{k\pi}{2})\delta(x - \frac{\pi}{2})\right)dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\cos\frac{k\pi}{2}\delta(x - \frac{\pi}{2}) + k\sin\frac{k\pi}{2}\theta(x - \frac{\pi}{2})\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(0 + k\sin\frac{k\pi}{2} - 0\right) = \frac{2}{\pi}k\sin\frac{k\pi}{2},$$

där den första 0:an uppstår av samma anledning som när c_0 blev 0. Detta betyder att

$$\delta'(x - \frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} k\sin\frac{k\pi}{2}\cos kx.$$

D.23

I S.20 utgör egenfunktionerna $\varphi_k(x) = \sin(k\pi r)/r$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, en ortogonal bas i $L_2(r^2, [0,1])$, där viktsfunktionen alltså är $w(r) = r^2$. Vi kan alltså skriva

$$\delta(r - \frac{1}{2}) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(r) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\frac{\sin k\pi r}{r},$$

där Fourierkoefficienterna c_k fås av projektionsformeln:

$$c_k = \frac{(\varphi_k \mid \delta(r - \frac{1}{2}))}{(\varphi_k \mid \varphi_k)} = \frac{\int_0^1 \varphi_k(r)\delta(r - \frac{1}{2})\,r^2\,dr}{\int_0^1 (\varphi_k(r))^2\,r^2\,dr} = \frac{\int_0^1 r\sin k\pi r\,\delta(r - \frac{1}{2})\,dr}{\int_0^1 \sin^2 k\pi r\,dr} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\sin\frac{k\pi}{2}}{\frac{1}{2}\int_0^1 (1 - \cos 2k\pi r)\,dr} = \frac{\frac{1}{2}\sin\frac{k\pi}{2}}{\frac{1}{2}(1-0)} = \sin\frac{k\pi}{2}.$$

Integralen av $\cos 2k\pi r$ blir 0 eftersom man integrerar över ett helt antal perioder. När vi nu har Fourierkoefficienterna explicit kan vi skriva

$$\delta(r - \frac{1}{2}) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{k\pi}{2}\frac{\sin k\pi r}{r}.$$

D.24

Det handlar om diffusion, så vi vänder oss till diffusionsekvationen. Eftersom röret är smalt kan vi säga att $u = u(x,t)$. Att röret är slutet i ändarna betyder att ämnet ej kan passera genom randen, vilket innebär homogena Neumannvillkor. Vidare sker ingen produktion inuti röret efter $t = 0$, och ampullen med massan M kan representeras av en deltadistribution i begynnelsevillkoret: $u(x,0) = M\delta_{L/2}$. Detta ger oss problemet

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0, & 0 < x < L,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = M\delta_{L/2}(x), & 0 < x < L. \end{cases}$$

Vi har homogena Neumannvillkor, så vi ansätter en lösning i form av en cosinusserie

$$u(x,t) = u_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\cos\frac{k\pi x}{L}.$$

Insättning ger att

$$0 = u_t - Du_{xx} = u_0'(t) + \sum_{k=1}^{\infty}(u_k'(t) + D\frac{k^2\pi^2}{L^2}u_k(t))\cos\frac{k\pi x}{L} \implies \text{[entydighet]} \implies$$

$$\implies \begin{cases} u_0'(t) = 0, \\ u_k'(t) + D\frac{k^2\pi^2}{L^2}u_k(t) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} u_0(t) = c_0, \\ u_k(t) = c_k e^{-D\frac{k^2\pi^2}{L^2}t} \end{cases} \implies$$

$$\implies u(x,0) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k\cos\frac{k\pi x}{L} = M\delta_{L/2}(x),$$

där vi får Fourierkoefficienterna från halvperiodsutvecklingarna:

$$c_0 = \frac{1}{L}\int_0^L M\delta_{L/2}(x)\,dx = \frac{M}{L},$$

$$c_k = \frac{2}{L}\int_0^L M\delta_{L/2}(x)\cos\frac{k\pi x}{L}\,dx = \frac{2M}{L}\cos\frac{k\pi}{2}.$$

Detta ger oss lösningen

$$u(x,t) = \frac{M}{L}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\cos\frac{k\pi}{2}e^{-D\frac{k^2\pi^2}{L^2}t}\cos\frac{k\pi x}{L}\right).$$

D.25

a)

$$\delta(x)\delta(y)\delta(z)[\varphi] = \iiint_{\mathbb{R}^3} \delta(x)\delta(y)\delta(z)\varphi(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} \delta(y)\delta(z)\varphi(0,y,z)\,dydz = \int_{\mathbb{R}} \delta(z)\varphi(0,0,z)\,dz = \varphi(0,0,0).$$

b)

$$\delta(x)\delta(y)[\varphi] = \iiint_{\mathbb{R}^3} \delta(x)\delta(y)\varphi(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} \delta(y)\varphi(0,y,z)\,dydz = \int_{\mathbb{R}} \varphi(0,0,z)\,dz.$$

c)

$$\delta(x)[\varphi] = \iiint_{\mathbb{R}^3} \delta(x)\varphi(x,y,z)\,dxdydz = \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(0,y,z)\,dydz.$$

D.27

Problemet har sfärisk symmetri, så vi kan söka en lösning på formen $u = u(r)$. Laplaceoperatorn i sfäriska koordinater, där vi sätter alla vinkelderivator till 0, är

$$\Delta u = \frac{1}{r}(ru)_{rr} + \frac{1}{r^2}\cdot 0 = \frac{1}{r}(ru)''.$$

Vi vill alltså lösa problemet

$$\begin{cases} \frac{1}{r}(ru)'' = \delta(r-2), \\ u(1) = 1,\ u(3) = 3. \end{cases}$$

$$\frac{1}{r}(ru)'' = \delta(r-2) \implies (ru)'' = r\delta(r-2) = 2\delta(r-2) \implies (ru)' = 2\theta(r-2) + A \implies$$

$$\implies ru = 2(r-2)\theta(r-2) + Ar + B \implies u(r) = 2(1-\frac{2}{r})\theta(r-2) + A + \frac{B}{r}.$$

$$\begin{cases} u(1) = 1, \\ u(3) = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} 0 + A + B = 1, \\ \frac{2}{3} + A + \frac{B}{3} = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} A = 3, \\ B = -2 \end{cases} \implies$$

$$\implies u(r) = 2(1-\frac{2}{r})\theta(r-2) + 3 - \frac{2}{r}.$$

D.29

Lösning finns redan.

D.30

Vi utnyttjar transformtabellen och räkneregler som återfinns i formelsamlingen.

a)

f	$\mathcal{F}(f)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-1)$	$e^{-i\omega} \cdot 1$

$$\mathcal{F}(\delta(t-1)) = e^{-i\omega}.$$

b)

f	$\mathcal{F}(f)$
$\delta(t)$	1
$\delta'(t)$	$i\omega \cdot 1$
$\delta'(t+2)$	$e^{i2\omega} \cdot i\omega$

$$\mathcal{F}(\delta(t-1)) = i\omega e^{2i\omega}.$$

c)

$$\mathcal{F}(2) = 4\pi\delta(\omega).$$

d)

$$\sin 2t = \frac{e^{i2t} - e^{-i2t}}{2i} = \frac{1}{2i}e^{i2t} \cdot 1 - \frac{1}{2i}e^{-i2t} \cdot 1.$$

f	$\mathcal{F}(f)$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{i2t} \cdot 1$	$2\pi\delta(\omega-2)$
$e^{-i2t} \cdot 1$	$2\pi\delta(\omega+2)$

$$\mathcal{F}(\sin 2t) = \frac{1}{2i}2\pi\delta(\omega-2) - \frac{1}{2i}2\pi\delta(\omega+2) = \frac{\pi}{i}(\delta(\omega-2) - \delta(\omega+2)).$$

e)

f	$\mathcal{F}(f)$
1	$2\pi\delta(\omega)$
t	$i(2\pi\delta(\omega))' = 2\pi i\delta'(\omega)$
t^2	$i(2\pi i\delta'(\omega))' = -2\pi\delta''(\omega)$
$(t+1)^2$	$i(2\pi i\delta'(\omega))' = e^{i\omega}(-2\pi\delta''(\omega))$

$$\mathcal{F}((t+1)^2) = -2\pi e^{i\omega}\delta''(\omega) = [\text{D.4 b)}] = -2\pi(e^0\delta''(\omega) - 2ie^0\delta'(\omega) + i^2e^0\delta(\omega)) =$$
$$= 2\pi(-\delta''(\omega) + 2i\delta'(\omega) + \delta(\omega)).$$

f)

Funktionen är ej tempererad (integralen divergerar).

D.31

Vi gör som i D.30 - fast baklänges.

a)

f	$\mathcal{F}(f)$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{it}\cdot 1$	$2\pi\delta(\omega-1)$

$$\mathcal{F}^{-1}(\delta(\omega-1)) = \frac{1}{2\pi}e^{it}.$$

b)

f	$\mathcal{F}(f)$
1	$2\pi\delta(\omega)$
t	$i(2\pi\delta(\omega-1))' = 2\pi i\delta'(\omega)$
te^{-i2t}	$2\pi i\delta'(\omega+2)$

$$\mathcal{F}^{-1}(\delta'(\omega+2)) = \frac{1}{2\pi i}te^{-2it}.$$

c)

f	$\mathcal{F}(f)$
$\delta(t)$	1

$$\mathcal{F}^{-1}(2) = 2\delta.$$

d)

$$\sin 2\omega = [\text{D.30 d)}] = \frac{1}{2i}e^{2i\omega}\cdot 1 - \frac{1}{2i}e^{-2i\omega}\cdot 1.$$

f	$\mathcal{F}(f)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t+2)$	$e^{2i\omega}\cdot 1$
$\delta(t-2)$	$e^{-2i\omega}\cdot 1$

$$\mathcal{F}^{-1}(\sin 2\omega) = \frac{1}{2i}\delta(t+2) - \frac{1}{2i}\delta(t-2) = \frac{1}{2i}(\delta_{-2}-\delta_2).$$

e)

$$(\omega+1)^2 = \omega^2 + 2\omega + 1.$$

f	$\mathcal{F}(f)$
$\delta(t)$	1
$\delta'(t)$	$i\omega\cdot 1$
$\delta''(t)$	$(i\omega)^2\cdot 1 = -\omega^2$

$$\mathcal{F}^{-1}((\omega+1)^2) = -\delta'' + \frac{2}{i}\delta' + \delta = -\delta'' - 2i\delta' + \delta.$$

D.34

Vid Fouriertransformationen övergår faltning till en produkt.

$$\mathcal{F}(U) = \hat{U},$$

$$g(x) = e^{-x^2} \implies \hat{g}(\xi) = \sqrt{\pi} e^{-\xi^2/4},$$

$$\widehat{\sin x} = [\text{samma princip som i D.30 d)}] = \frac{\pi}{i}(\delta(\xi - 1) - \delta(\xi + 1)).$$

Med detta får vi att

$$U * g(x) = \sin x \overset{\mathcal{F}}{\implies} \hat{U}\hat{g} = \frac{\pi}{i}(\delta(\xi - 1) - \delta(\xi + 1)) \implies$$

$$\implies \hat{U} = \frac{\pi}{i}(\delta(\xi - 1) - \delta(\xi + 1))\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\xi^2/4} = \frac{e^{1/4}}{\sqrt{\pi}}\frac{\pi}{i}(\delta(\xi - 1) - \delta(\xi + 1)) \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\implies}$$

$$\overset{\mathcal{F}^{-1}}{\implies} U(x) = \frac{e^{1/4}}{\sqrt{\pi}} \sin x.$$

D.36

a)

f	$\mathcal{L}(f)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-1)$	$e^{-s} \cdot 1$

$$\mathcal{L}(\delta(t-1)) = e^{-s}.$$

b)

f	$\mathcal{L}(f)$
$\delta(t)$	1
$\delta'(t)$	s
$\delta'(t+2)$	$e^{2s} \cdot s$

$$\mathcal{L}(\delta'(t+2)) = se^{2s}.$$

c)

Går ej att Laplacetransformera.

d)

Går ej att Laplacetransformera.

e)

Går ej att Laplacetransformera.

f)

f	$\mathcal{L}(f)$
$\theta(t)$	$\frac{1}{s}$
$e^t\theta(t)$	$\frac{1}{s-1}$

$$\mathcal{L}(e^t\theta(t)) = \frac{1}{s-1},$$

dock för att denna Laplacetransform ska existera måste integralen vara konvergent, och alltså måste strimlan vi befinner oss i vara $\mathrm{Re}(s) > 1$.

D.41

Lemma D.3 (speglingslemmat), som återfinns på sida 391 i boken, gör att man direkt kan skriva ner svaret till dessa uppgifter.

a)

Låt den udda speglingen/utvidgningen av funktionen u betecknas med v

$$\begin{cases} u''(x) - iu(x) = 0, \ x > 0, \\ u(0) = 1 \end{cases} \iff$$

$$\iff v''(x) - iv(x) = 2u(0)\delta'(x), \ x \in \mathbb{R} \iff v''(x) - iv(x) = 2\delta'(x), \ x \in \mathbb{R}.$$

b)

Låt den jämna speglingen/utvidgningen av funktionen u betecknas med v

$$\begin{cases} u''(x) - iu(x) = 0, \ x > 0, \\ u(0) = 1 \end{cases} \iff$$

$$\iff v''(x) - iv(x) = 2u'(0)\delta(x), \ x \in \mathbb{R} \iff v''(x) - iv(x) = 2\delta(x), \ x \in \mathbb{R}.$$