Endimensionell analys

Markus Bolinder

Juni 2023

Förord

Det bör nämnas att övningsboken som jag har till mitt förfogande är den första upplagan, och jag är medveten om att det finns en andra upplaga - som bland annat innehåller ett kapitel 16 med blandade uppgifter. Detta betyder att om något verkar helknas med en uppgift, så kan det ha att göra med att det är baserat på den första upplagan. Vidare kan det givetvis förekomma fel, och om man tror sig ha hittat ett fel i en uppgift/lösning, bör man först kontrollera att det verkligen är fel, och sedan kan man poängtera det om man möter mig på stan (osannolikt, men möjligt). Sättet jag har skrivit lösningarna på bygger på att man har koll på kapitel som föregår det aktuella. Detta förklarar varför jag väldigt detaljerat hänvisar till, exempelvis, konjugatregeln i kapitel 2, men sedan nästan aldrig kommenterar när den används i efterföljande kapitel.

Mina lösningar är inte nödvändigtvis "tentakvalitet" (även om de oftast är det), speciellt generaliserade integraler gör jag ganska handviftande när man egentligen bör skriva det som ett gränsvärde, men jag anser dock att det svåra med de generaliserade integralerna är inte att man kan skriva $\lim_{X\to\infty}$, eller något i den stilen, utan mer hur man faktiskt bemöter integralen och bestämmer en primitiv. Vad detta betyder är att syftet med lösningarna är mer som ett hjälpmedel för hur man kan lösa en uppgift, och inte ett exakt recept på hur man ska presentera sin lösning. Jag känner mig också tvungen att poängtera detta för att undvika juridiska implikationer om folk skulle referera till dessa lösningar för hur något "bör" vara. Jag förklarar även en del i uppgifter hur jag tänker med lösningarna, vilket inkluderar en del som jag har skrivit här också.

På en del uppgifter står det "Inses lätt.", vilket är en kombination av att jag inte orkar skriva en lösning, att de faktiskt *inses lätt*, och att det är enklare att bara använda en grafritare eller dylikt för att lösa uppgiften/få en bättre insikt i hur man löser uppgiften. Personligen anser jag mig ha rätt till lite dispens gällande att jag har skippat att skriva lösningar till en del uppgifter - 340 sidor i LaTeX skrivs nämligen inte över en natt. Utöver detta kan det också nämnas att jag i början av dem första kapitlen skriver upp vissa ekvationer och sedan refererar till dem i uppgifterna, vilket jag sedan slutar med. Det beror inte på att det inte finns typiska ekvationer/formler för resterande kapitel, utan dels på att antalet relevanta formler är proportionellt med kapitelnumret, och dels på att jag inte orkade. Dock kan man hitta lite utförligare förklaringar om vissa ekvationer i den första uppgiften på ett nytt avsnitt (exempelvis pratas det lite om partialintegration när uppgifterna på det börjar i kapitel 12).

I allmänhet tror jag att det märks att jag mot slutet mest bara ville bli klar med detta Sisyfosarbete. Jag tänker dock bortförklara att lösningarna blir lite mer kortfattade på det jag skrev ovan om att man förväntas ha kunskap från tidigare kapitel, vilket betyder att lösningarna inte behöver vara lika utförliga. Förhoppningsvis har detta förord varit läsvärt, och kom ihåg: *With great access to extensive solutions for exercises in Calculus in one variable comes great responsibility.* Man lär sig inget på att bara skriva av lösningar!

Innehåll

Kapitel 1

1.1

Inses lätt.

1.2

a)

Inses lätt.

b)

Eftersom talet har en periodisk decimaldel är talet rationellt. Låt

$$x = 0,272727... \iff 100x = 27,272727... \iff 100x - x = 27 \iff x = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}.$$

c)

Eftersom decimaldelen upprepar sig är detta också ett rationellt tal.

$$x = 5,199999... \iff 10x = 51,99999... \text{ och } 100x = 519,99999... \iff$$
$$\iff 100x - 10x = 519,99999... - 51,99999... = 519 - 51 = 468 \iff$$
$$\iff 90x = 468 \iff x = \frac{468}{90} = \frac{26}{5}.$$

Detta kunde man även komma fram till genom att visa att

$$0,9999999... = 1,$$

vilket betyder att

$$0,199999... = 0,2.$$

1.3

Tecknet $\subseteq$ betecknar att en mängd är en delmängd till en annan, det vill säga om en mängds alla element ingår i en annan mängd så är det en delmängd. Exempelvis kan talmängderna rangordnas såhär $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. Man hade kunnat byta ut $\subseteq$ med $\subset$ (äkta delmängd) eftersom mängderna inte är av samma storlek som den mängd de är delmängd till.

Vad det gäller uppgiften, kan man göra några omskrivningar:

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R}; x^2 = 1\} = \{x \in \mathbb{R}; x = \pm 1\} = \{-1,\ 1\},$$
$$M_2 = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\},$$
$$M_3 = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 1\},$$
$$M_2 = \{x \in \mathbb{R}; x^2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R}; |x| \geq 0\} = \mathbb{R}.$$

Absolutbeloppet i M_4 kommer från att x^2 är ickenegativt för reella tal. Med vår nyvunna, eller påminda, kunskap om delmängder kan vi nu bilda följande relationer:

$$M_1 \subseteq M_4,$$
$$M_3 \subseteq M_2 \subseteq M_4.$$

1.4

$$A: \ x^2 < 16 \iff -4 < x < 4,$$
$$B: \ x > -4,$$
$$C: \ -4 < x < 4.$$

Eftersom A och C beskriver samma utsaga går det att bilda A från C eller vice versa, det är alltså en ekvivalens mellan dem. Om $x > -4$ måste inte $x < 4$, men om $-4 < x < 4$ måste x åtminstone vara större än -4, vilket betyder att A och C implicerar B. Detta ger

$$A \iff C \implies B,$$

vilket också kan skrivas

$$A \implies B, \ C \implies B, \ A \iff C.$$

1.5

a)

$$A: \ a = b,$$
$$B: \ a^2 = b^2,$$
$$C: \ ab = b^2, \ a, \ b \in \mathbb{R}.$$

Eftersom A beskriver en direkt likhet mellan a och b är det ganska uppenbart att de kommer implicera de andra utsagorna,

$$a = b \implies ab = bb \implies ab = b^2,$$

$$a = b \implies aa = ba \implies a^2 = bb \implies a^2 = b^2,$$

men vad det gäller B och C är det inte tvunget några implikationer. Detta beror på definitionsmängden, a och b kan vara godtyckliga reella tal, vilket inkluderar 0 och negativa tal. B medför att att absolutbeloppet av a och b är lika, men de kan ha olika tecken. Vidare är likheten i C uppfylld om $b = 0$, oavsett a, och därmed medför den inte någon av de andra utsagorna heller.

$$A \implies B \text{ och } A \implies C.$$

b)

$$A: \ a = b,$$
$$B: \ a^2 = b^2,$$
$$C: \ ab = b^2,$$
$$D: \ \sqrt{a} = \sqrt{b},$$
$$a, \ b \in M = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}.$$

Enligt ovan var problemet i a) just att a och b inte enbart var positiva, vilket har ändrats på här, och alltså kan man ta roten ur och dela hej vilt utan att stöta på problem. Detta betyder att alla utsagor är ekvivalenta,

$$A \iff B \iff C \iff D.$$

1.6

$$A: \ \frac{1}{x} > 0 \iff x > 0,$$
$$B: \ |x| > 0 \iff x \neq 0,$$
$$C: \ x \neq 0,$$
$$D: \ -x < 0 \iff x > 0, \ x \in \mathcal{R}.$$

Detta visar att A och D är ekvivalenta samt att B och C är ekvivalenta. Dessutom är $x \neq 0$ om $x > 0$, vilket betyder att A och D medför B och C.

$$A \iff D \implies B \iff C.$$

1.7

$$A: \ x^2 - 3x + 2 = 0 \iff (x-1)(x-2) = 0 \iff \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases},$$
$$B: \ |x-2| = 1 \iff \begin{cases} x - 2 = 1, & x \geq 2 \\ x - 2 = -1, & x < 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases},$$
$$C: \ x \geq 1,$$
$$D: \ \ln x + \ln x^3 = 0, \ x > 0, \ x^3 > 0 \iff x > 0,$$

där lämplig metod för att lösa andragradare har använts för A, och villkoren för D ges av definitionsmängden för den naturliga logaritmen. Man kan göra ytterligare omskrivningar för att lösa ekvationen i D:

$$\ln x + \ln x^3 = 0 \implies \ln x + 3\ln x = 0 \implies 4\ln x = 0 \implies \ln x = 0 \implies x = e^0 = 1,$$

och ett snabbt test av lösningen visar att det är en äkta lösning. Anledningen till implikationerna är just eftersom logaritmekvationer kan ge upphov till falska lösningar och man bör därför kontrollera sitt svar, vidare har jag valt att använda den logaritmlag som inte gör några inskränkningar i definitionsmängden här ($\ln x^\alpha = \alpha \ln x$), men om man hade använt lagen som säger att addition av logaritmer ger multiplikation inuti logaritmen ($\ln x^\alpha + \ln x^\beta = \ln x^{\alpha+\beta}$) hade man ändrat definitionsmängden eftersom man hade fått x^4 inuti logaritmen, vilket betyder att x kan vara allt utom 0, men det stämmer ju inte enligt omskrivningen som gjordes ovan. Efter denna utläggning kan vi sammanfatta utsagorna i deras förenklade form

$$A: \ \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases},$$
$$B: \ \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases},$$
$$C: \ x \geq 1,$$
$$D: \ x = 1,$$

varpå vi ser att D implicerar samtliga utsagor samt att A och B implicerar C,

$$A \implies C, \ B \implies C, \ D \implies A, \ D \implies B \text{ och } D \implies C.$$

1.8

$$A: \ x \geq 0,$$
$$B: \ \ln x \geq 0 \iff x \geq e^0 = 1,$$
$$C: \ e^x \geq 0 \iff x \in \mathbb{R},$$
$$D: \ |x-2| < 1 \iff -1 < x-2 < 1 \iff 1 < x < 3.$$

I B behöver man egentligen ta hänsyn till definitionsmängden ($x > 0$), men den uppfylls ju av $x \geq 1$, så det är okej, och C följer av att exponentialfunktionen är positiv för alla reella tal. Efter en stunds betraktande kommer man fram till att samtliga utsagor implicerar C, B och D implicerar A samt att D implicerar B, det vill säga

$$A \implies C, \ B \implies C, \ D \implies C, \ B \implies A, \ D \implies A \text{ och } D \implies B.$$

1.9

$$A: \ |x| > 0 \iff x \neq 0,$$
$$B: \ e^x > 1 \iff x > \ln 1 = 0,$$
$$C: \ \cos x \leq 0 \iff x \in \mathbb{R},$$
$$D: \ \ln(1+x^2) > 0 \iff 1+x^2 > 1 \iff x^2 > 0 \iff |x| > 0 \iff x \neq 0.$$

Anledningen till att man bara kan applicera logaritmen och exponentialfunktionen i B respektive D är att det man inte påverkar definitionsmängden och dessutom är båda funktionerna strängt växande, så olikheten ändras inte heller. Värdemängden för cosinus är $[-1, 1]$, så olikheten uppfylls av alla reella tal.

Vi har alltså relationerna $B \implies A \iff D \implies C$ som gör att vi kan uttala oss om vilka implikationer/ekvivalenser som är sanna, varur vi kan ta reda på de sanna implikationerna.

1.10

Låt x och y beteckna antalet pojkar respektive flickor.

$$A: \ y = 5,$$
$$B: \ x \leq 4,$$
$$C: \ x \geq 3,$$
$$D: \ y \leq 5,$$
$$E: \ y \geq 2.$$

Dessutom gäller det att $x + y = 10 \implies x = 10 - y$, vilket gör att B och C kan skrivas om med y,

$$B: \ 10 - y \leq 4 \iff y \geq 6,$$
$$C: \ 10 - y \geq 3 \iff y \leq 7.$$

Härur ser vi att A medför C, D och E, B implicerar E, samt att C följer från D, vilket uttryckt mer matematiskt blir

$$A \implies C, \ A \implies D, \ A \implies E, \ B \implies E \text{ och } D \implies C.$$

1.11

Utgå från definitionerna av de geometriska figurerna. Kvadrat är mest restriktiv och kan klassificeras som alla former, därefter kommer rektangeln som uppfyller samtliga krav utom att sidorna är lika långa - alltså är det inte en romb eller en kvadrat. Vidare uppfyller romben kraven för en parallellogram och ett parallelltrapets. Slutligen är ett parallelltrapets minst krävande av former med fyra kanter och därför klassas en parallellogram även som en sådan.

$$E \implies A,\ E \implies B,\ E \implies C,\ E \implies D,\ D \implies A,$$

$$D \implies C,\ B \implies A,\ B \implies C \text{ och } A \implies B.$$

Kapitel 2

Följande relationer kan vara till nytta:

$$(x-y)(x+y) = x^2 - y^2, \tag{1}$$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \text{ och } (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2. \tag{2}$$

(1) är konjugatregeln och (2) är kvadreringsreglerna. Jag kommer emellanåt att referera till dessa i vissa av uppgifterna när de används, men inte alltid.

2.1

a)

$$(x+3)(x-3) - (x+3)^2 = x^2 - 9 - (x^2 + 6x + 9) = -9 - 6x - 9 = -6x - 18,$$

alternativt

$$(x+3)(x-3) - (x+3)^2 = (x+3)(x-3-(x+3)) = (x+3)(-6) = -6x - 18.$$

b)

$$(x+3)(x-3) - (x-3)^2 = (x-3)(x+3-(x-3)) = (x-3)\cdot 6 = 6x - 18.$$

c)

$$\begin{aligned}(3x+5)^2 - (3x-5)^2 &= ((3x+5)-(3x-5))((3x+5)+(3x-5)) = \\ &= (3x+5-3x+5)(3x+5+3x-5) = 10\cdot 6x = 60x\end{aligned}$$

2.2

Om man genomför algebran finner man svaret $(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)$. Mönstret som man kanske ser är det som dyker upp i Pascals triangel - en snabb sökning med lämplig sökmotor ger en nog tillräckligt med information om man inte känner Pascal och hans triangel. Koefficienterna i binomialutvecklingen är alltså samma som dyker upp på motsvarande rad i Pascals triangel. Detta kommer att bli tydligare i kapitel fyra.

2.3

Eftersom $a \neq b$ är det ekvivalent att bevisa likheten efter en multiplikation av $a - b$. Därefter är det bara att tillämpa konjugatregeln, (1), ett antal gånger.

$$(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16}) =$$

$$= (a^2-b^2)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16}) = (a^4-b^4)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16}) =$$

$$= (a^8-b^8)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16}) = (a^{16}-b^{16})(a^{16}+b^{16}) = a^{32}+b^{32} \iff$$

$$\iff (a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16}) = \frac{a^{32}-b^{32}}{a-b}.$$

$\square$

2.4

Inses lätt.

2.5

a)

$$\frac{1}{7} - (\frac{15}{14} + \frac{1}{2}) = \frac{2}{14} - \frac{15}{14} - \frac{7}{14} = \frac{-20}{14} = -\frac{10}{7}.$$

b)

$$\frac{5}{6} - (\frac{3}{4} + \frac{1}{3}) = \frac{10}{12} - \frac{9}{12} - \frac{4}{12} = \frac{-3}{12} = -\frac{1}{4}.$$

2.6

a)

$$\frac{1}{60} + \frac{1}{108} - \frac{1}{72} = \frac{1}{12}(\frac{1}{5} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6}) = \frac{1}{12}\frac{9\cdot 6 + 5\cdot 6 - 5\cdot 9}{5\cdot 9\cdot 6} =$$

$$= \frac{54+30-45}{12\cdot 270} = \frac{39}{3\cdot 4\cdot 270} = \frac{13}{1080}.$$

b)

$$\frac{3}{4} - \frac{5}{6} + \frac{1}{9} = \frac{3\cdot 9}{4\cdot 9} - \frac{5\cdot 2\cdot 3}{6\cdot 2\cdot 3} + \frac{4}{9\cdot 4} = \frac{27-30+4}{36} = \frac{1}{36}.$$

c)

$$\frac{1}{35} - \frac{1}{25} + \frac{1}{63} - \frac{1}{245} = \frac{1}{5\cdot 7} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{3^2\cdot 7} - \frac{1}{5\cdot 7^2} = \frac{3^2\cdot 5\cdot 7 - 3^2\cdot 7^2 + 5^2\cdot 7 - 3^2\cdot 5}{3^2\cdot 5^2\cdot 7^2} =$$

$$\frac{315-441+175-45}{11025} = \frac{4}{11025}.$$

2.7

Det gäller att

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

a)

$$\frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{4}} = \frac{a}{2} \cdot \frac{4}{a} = 2.$$

b)

$$\frac{\frac{a}{2}}{\frac{4}{a}} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4} = \frac{a^2}{8}.$$

c)

$$\frac{\frac{14a}{a+2}}{\frac{7}{6a+12}} = \frac{14a}{a+2} \cdot \frac{6(a+2)}{7} = 2a \cdot 6 = 12a.$$

d)

$$\frac{\frac{a}{a+3}}{a^2+3a} = \frac{a}{a+3} \cdot \frac{1}{a(a+3)} = \frac{1}{(a+3)^2}.$$

2.8

a)

$$\frac{\frac{3}{5x} - \frac{x}{15}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{3 \cdot 3 - x^2}{15x}}{\frac{3-x}{3x}} = \frac{9-x^2}{15x} \cdot \frac{3x}{3-x} = [(1)] = \frac{(3-x)(3+x)}{5(3-x)} = \frac{x+3}{5}.$$

b)

$$\frac{x^2+1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{x^2(x^2+1)}{x^2+1} = x^2.$$

c)

$$\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}{\frac{x^2-y^2}{(xy)^2}} = \left(\frac{y-x}{xy}\right)\frac{(xy)^2}{x^2-y^2} = \frac{-(x-y)xy}{(x-y)(x+y)} = -\frac{xy}{x+y}.$$

2.9

a)

$$\frac{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2} = \frac{xy}{xy} \cdot \frac{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2-2xy} =$$

$$= [(1) \text{ och } (2)] = \frac{(x-y)(x+y)}{(x-y)^2} = \frac{x+y}{x-y}.$$

b)

$$\frac{\frac{16x^4}{81}-y^4}{\frac{2x}{3}+y}=\frac{\left(\frac{2x}{3}\right)^4-y^4}{\frac{2x}{3}+y}=\frac{(\left(\frac{2x}{3}\right)^2-y^2)(\left(\frac{2x}{3}\right)^2+y^2)}{\frac{2x}{3}+y}=$$
$$=\frac{(\frac{2x}{3}-y)(\frac{2x}{3}+y)(\left(\frac{2x}{3}\right)^2+y^2)}{\frac{2x}{3}+y}=(\frac{4x^2}{9}+y^2)(\frac{2x}{3}-y).$$

c)

$$\frac{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}}=\frac{(x-1)+(x+1)}{(x+1)-(x-1)}=\frac{2x}{2}=x.$$

2.10

a)

Låt den ekvivalenta resistansen betecknas med R.

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{3\cdot 4+2\cdot 4+2\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 4}=\frac{12+8+6}{24}=\frac{26}{24}=\frac{13}{12}\implies R=\frac{12}{13}\ \Omega.$$

b)

Låt den ekvivalenta resistansen, återigen, betecknas med R.

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{R}+\frac{1}{5}\iff\frac{1}{R}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{5-3}{15}=\frac{2}{15}\implies R=\frac{15}{2}\ \Omega.$$

2.11

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}\iff\frac{1}{b}=\frac{1}{f}-\frac{1}{a}=\frac{a-f}{af},$$

med $a=600$ mm och $f=100$ mm blir

$$b=\frac{af}{a-f}=\frac{600\cdot 100}{600-100}=120\text{ mm}.$$

2.12

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{1+\frac{2}{3}}=\frac{1}{\frac{5}{3}}=\frac{3}{5}.$$

Notera att det är Fibonaccitalen som dyker upp. Man kanske då inser att om kedjebråket hade fortsatt för evigt att man hade närmat sig det gyllene snittet (egentligen ett delat på det gyllene snittet, men det är ju typ samma sak), eftersom det är gränsvärdet av kvoten mellan två intilliggande Fibonaccital. Uttryckt mer matematiskt kan man få fram det gyllene snittet på följande vis.

$$x=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}}}=\frac{1}{1+x}\iff x(1+x)=1\iff x^2+x-1=0\implies x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},$$

där den negativa roten har förkastats eftersom gränsvärdet är positivt.

2.13

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} = \frac{3+\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} \cdot \frac{2-\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}} = \frac{(3+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}{4-5} = \frac{6-3\sqrt{5}+2\sqrt{5}-5}{-1} =$$
$$= -(1-\sqrt{5}) = \sqrt{5}-1.$$

2.14

a)

$$\frac{1+2\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = \frac{1+2\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} \cdot \frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} = \frac{(1+2\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}{9-2} = \frac{7+7\sqrt{2}}{7} = 1+\sqrt{2}.$$

b)

$$\frac{1}{\sqrt{13}+\sqrt{11}} = \frac{1}{\sqrt{13}+\sqrt{11}} \cdot \frac{\sqrt{13}-\sqrt{11}}{\sqrt{13}-\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{13}-\sqrt{11}}{13-11} = \frac{\sqrt{13}-\sqrt{11}}{2}.$$

c)

$$\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} =$$
$$= \frac{2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}{(x+1)-(x-1)} = \frac{2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}{2} = \sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}.$$

2.15

a)

$$\sqrt{12}-\sqrt{3} = \sqrt{3}(\sqrt{4}-1) = \sqrt{3}.$$

b)

$$\frac{\sqrt{42}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{6}} = \sqrt{7}.$$

c)

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{12} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{4} = 6.$$

d)

$$\frac{\sqrt{18}+\sqrt{8}}{5} = \frac{\sqrt{3^2\cdot 2}+\sqrt{2^2\cdot 2}}{5} = \frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{5} = \sqrt{2}.$$

e)

$$\sqrt{3^2+4^2}-3-4 = \sqrt{25}-7 = 5-7 = -2.$$

f)

$$\sqrt{5^2+12^2}=\sqrt{169}=\sqrt{13^2}=13.$$

2.16

a)

$$\frac{\sqrt{162}+\sqrt{98}}{\sqrt{50}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2\cdot 9^2}+\sqrt{2\cdot 7^2}}{\sqrt{2\cdot 5^2}+\sqrt{2}}=\frac{9+7}{5+1}=\frac{8}{3}.$$

b)

$$\frac{\sqrt{(-4)^2}}{4^2}=\frac{|-4|}{4}=1.$$

c)

$$(\sqrt{12}-\frac{1}{\sqrt{3}})^2=(\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{36}-1))^2=\frac{1}{3}(6-1)^2=\frac{25}{3}.$$

d)

$$((\sqrt{x}+\sqrt{y})+\sqrt{x+y})((\sqrt{x}+\sqrt{y})-\sqrt{x+y})=[(1)]=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-(x+y)=[(2)]=$$
$$=x^2+2\sqrt{x}\sqrt{y}+y-x-y=2\sqrt{xy}.$$

2.17

$$\frac{\sqrt{216}}{3\sqrt{2}}=\frac{6^3}{3\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}=2\sqrt{3},$$
$$\frac{\sqrt{108}}{3}=\frac{27\cdot 4}{3}=\frac{2^2\cdot 3^3}{3}=\frac{6\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3},$$
$$\sqrt{12}=\sqrt{3\cdot 4}=2\sqrt{3}.$$

2.18

a)

$$3^4\cdot 3^2=3^6.$$

b)

$$2^7\cdot 2^{-3}=2^4.$$

c)

$$4^2\cdot 4^{-5}\cdot 4=4^{2-5+1}=4^{-2}.$$

d)

$$\frac{3^7}{3^3}=3^7\cdot 3^{-3}=3^4.$$

e)

$$\frac{4^5}{4^9} = 4^{5-9} = 4^{-4}.$$

f)

$$\frac{2^{-7}}{2^5} = 2^{-7-5} = 2^{-12}.$$

2.19

a)

$$3^5 \cdot 10^5 \cdot 3^{-3} \cdot 10^3 = 3^2 \cdot 10^8 = 9 \cdot 10^8.$$

b)

$$\frac{2^8 \cdot 5^6}{2^6 \cdot 5^5} = 2^{8-6} \cdot 5^{6-5} = 4 \cdot 5 = 20.$$

c)

$$\frac{2^4 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^5} = \frac{2^4 \cdot 10^4}{10 \cdot 2 \cdot 10^4} = \frac{2^3}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

2.20

a)

$$b^{-0,2} \cdot b^{1,7} \cdot b^{-2,5} = b^{-0,2+1,7-2,5} = b^{-1}.$$

b)

$$(a^3)^{-0,5} \cdot (a^{-5})^{-0,3} = a^{3\cdot(-0,5)} \cdot a^{-5\cdot(-0,3)} = a^{-1,5+1,5} = a^0 = 1.$$

c)

$$\frac{a}{a^{-3,7} \cdot a^{0,5}} = \frac{a}{a^{-3,2}} = a^{1-(-3,2)} = a^{4,2}.$$

d)

$$\frac{x \cdot x^{-1,6} \cdot x^{0,2}}{x^{-1,4}} = \frac{x^{1-1,6+0,2}}{x^{-1,4}} = x^{-0,4-(-1,4)} = x.$$

2.21

a)

$$\frac{3^2 \cdot 2^4}{6^3} = \frac{3^2 \cdot 2^4}{(3 \cdot 2)^3} = \frac{2}{3}.$$

b)

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-1/2} = \left(\frac{4}{1}\right)^{1/2} = 4^{1/2} = \sqrt{4} = 2.$$

c)

$$(\sqrt{64})^{2/3} = (64^{1/2})^{2/3} = 64^{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}} = (4^3)^{1/3} = 4^{3\cdot\frac{1}{3}} = 4.$$

d)

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{1} = 3.$$

e)

$$2^{(2^3)} = 2^8 = 256.$$

f)

$$(2^2)^3 = 2^{2\cdot 3} = 2^6 = 64.$$

Skillnaden från e)-uppgiften är var parentesen är placerad, vilket påverkar ordningen.

2.22

a)

$$(\sqrt{5})^{-4} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}.$$

b)

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}.$$

c)

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{3/2} = \frac{1}{(\sqrt{9})^3} = \frac{1}{27}.$$

d)

$$16^{1/4} = (2^4)^{1/4} = 2.$$

e)

$$(\sqrt{8})^{2/3} = (8^{1/2})^{2/3} = 8^{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}} = (2^3)^{1/3} = 2.$$

f)

$$\left(\frac{27}{8}\right)^{-4/3} = \left(\frac{2^3}{3^3}\right)^{4/3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3\cdot\frac{4}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{4} = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}.$$

2.23

a)

$$\frac{a^{3,3}\cdot a^{-2,1}}{a^{0,8}} = a^{3,3-2,1-0,8} = a^{0,4}.$$

b)

$$\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{a\cdot a^{1/2}}{a^{2/3}} = a^{1+1/2-2/3} = a^{5/6}.$$

c)

$$\sqrt{\sqrt[3]{x}}\cdot\sqrt[6]{x^{-1}}\cdot(x^2)^{2/3} = (x^{1/3})^{1/2}\cdot x^{-1/6}\cdot x^{4/3} = x^{1/6-1/6+4/3} = x^{4/3}.$$

d)

$$\frac{\sqrt[4]{a^3\sqrt{a}}}{\sqrt[8]{1/a}} = \frac{(a^3\cdot a^{1/2})^{1/4}}{(a^{-1})^{1/8}} = a^{(3+\frac{1}{2})\cdot\frac{1}{4}-(-\frac{1}{8})} = a^{\frac{7}{8}+\frac{1}{8}} = a.$$

e)

$$\frac{\sqrt[4]{x^2\sqrt{y^5}}}{\sqrt{xy}} = \frac{x^{2\cdot\frac{1}{4}}y^{\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^{1/2}y^{5/8}}{x^{1/2}y^{1/2}} = y^{5/8-1/2} = y^{1/8}.$$

f)

$$\left(ab\sqrt[4]{\frac{a^3}{\sqrt{b\sqrt{b}}}}\right)^2 = \left(ab\left(\frac{a^3}{(b\cdot b^{1/2})^{1/2}}\right)^{1/4}\right)^2 = a^2b^2\left(\frac{a^3}{(b^{3/2})^{1/2}}\right)^{1/2} =$$

$$= a^2b^2\frac{a^{3/2}}{(b^{3/4})^{1/2}} = \frac{a^{3/2+2}b^2}{b^{3/8}} = a^{7/2}b^{2-3/8} = a^{7/2}b^{13/8}.$$

2.24

Börja med att förenkla högerledet.

$$\frac{(2^6\cdot 5^5)^3}{(2^4\cdot 5^2)^4}\cdot\frac{2^{18}}{5^7} = \frac{2^{6\cdot 3+18}\cdot 5^{5\cdot 3}}{2^{4\cdot 4}\cdot 5^{2\cdot 4+7}} = \frac{2^{36}\cdot 5^{15}}{2^{16}\cdot 5^{15}} =$$

$$= 2^{36-16} = 2^{20} = (2^2)^{10} = 4^{2\cdot 5} = (4^2)^5 = (4^x)^5 \iff x = 2.$$

2.25

a)

$$x^2 - 1 = [(1)] = (x-1)(x+1).$$

b)

$$x^2 + 2x + 1 = [(2)] = (x+1)^2.$$

c)

$$x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = [(1)] = x(x-2)(x+2).$$

d)

$$x^2 - 2x + 1 = [(2)] = (x-1)^2.$$

e)

$$x^4 + x^2 = x^2(x^2 + 1).$$

f)

$$x^2 - 4x + 4 = [(2)] = (x-2)^2.$$

g)

$$a^3 - ab^2 = a(a^2 - b^2) = [(1)] = a(a-b)(a+b).$$

h)

$$a^2b + 2ab^2 + b^3 = b(a^2 + 2ab + b^2) = [(2)] = b(a+b)^2.$$

i)

$$a^3b - 2a^2b^2 + ab^3 = ab(a^2 - 2ab + b^2) = [(2)] = ab(a-b)^2.$$

2.26

a)

$$x(x+2) - 4(x+2) = (x+2)(x-4).$$

b)

$$x^2(x^2-9)+x^2-9 = x^2(x^2-9)+1\cdot(x^2-9) = (x^2+1)(x^2-9) = [(1)] = (x^2+1)(x-3)(x+3).$$

c)

$$x^4 - 16 = [(1)] = (x^2-4)(x^2+4) = [(1)] = (x-2)(x+2)(x^2+4).$$

d)

$(a+b)(a-b)+a^2-ab=(a+b)(a-b)+a(a-b)=(a-b)(a+b+a)=(a-b)(2a+b).$

e)

$$(a-b)^2-4=[(1)]=((a-b)-2)((a-b)+2)=(a-b-2)(a-b+2).$$

f)

$$a^4-2a^2b^2+b^4=[(2)]=(a^2-b^2)^2=[(1)]=((a-b)(a+b))^2=(a-b)^2(a+b)^2.$$

2.27

a)

$$x^2-7x+xy-7y=x(x+y)-7(x+y)=(x-7)(x+y).$$

b)

$a^6-a^4+a^2-1=a^4(a^2-1)+(a^2-1)=(a^4+1)(a^2-1)=[(1)]=(a^4+1)(a-1)(a+1).$

c)

$x^2y+2x^2-y-2=x^2(y+2)-(y+2)=(x^2-1)(y+2)=[(1)]=(x-1)(x+1)(y+2).$

d)

$$7x^5+7xy^4-14x^3y^2=7x(x^4+y^4-2x^2y^2)=[(2)]=$$
$$=7x(x^2-y^2)^2=[(1)]=7x(x-y)^2(x+y)^2.$$

e)

$$a^2-(b+c)^2=[(1)]=(a-(b+c))(a+(b+c))=(a-b-c)(a+b+c).$$

f)

$$(x^2+y^2)^2-(2xy)^2=[(1)]=$$
$$=(x^2+y^2-2xy)(x^2+y^2+2xy)=[(2)]=(x-y)^2(x+y)^2.$$

g)

$$(x^2+y^2-z^2)^2-4x^2y^2=(x^2+y^2-z^2)^2-(2xy)^2=[(1)]=$$
$$=((x^2+y^2-z^2)-2xy)((x^2+y^2-z^2)+2xy)=(x^2-2xy+y^2-z^2)(x^2+2xy+y^2-z^2)=$$
$$=[(2)]=((x-y)^2-z^2)((x+y)^2-z^2)=[(1)]=$$
$$=((x-y)-z)((x-y)+z)((x+y)-z)((x+y)+z)=(x-y-z)(x-y+z)(x+y-z)(x+y+z).$$

2.28

I följande uppgifter används (2) upprepade gånger, men jag kommer inte referera till det. Kvadratkompletteringen går ju ut på att använda kvadreringsreglerna.

a)

$$x^2 + 6x + 7 = x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 9 - 2 = (x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2) - 2 = (x+3)^2 - 2.$$

b)

$$x^2 - 7x + 13 = x^2 - 2 \cdot \frac{7}{2} \cdot x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 13 = (x - \frac{7}{2})^2 - \frac{49}{4} + \frac{52}{4} = (x - \frac{7}{2})^2 + \frac{3}{4}.$$

c)

$$x^2 + 18x + 81 = x^2 + 2 \cdot 9 \cdot x + 9^2 = (x+9)^2.$$

d)

$$x^2 + 5x = x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = (x + \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4}.$$

e)

$$x^2 + 17.$$

Uttrycket är redan kvadratkompletterat eftersom det endast innehåller kvadrater och konstanter.

2.29

$$x^2 + ax = x^2 + 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot x \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = (x + \frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4} = (x+b)^2 + c \iff \begin{cases} b = \frac{a}{2} \\ c = -\frac{a^2}{4}. \end{cases}$$

2.30

a)

$$\frac{4x^2 - 4}{2x + 2} = \frac{4(x^2 - 1)}{2(x+1)} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x+1} = 2(x-1).$$

b)

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{x+1}{x-1}.$$

c)

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} + \frac{x^2 - y^2}{(xy)^2} = \frac{y^2 - x^2 + x^2 - y^2}{(xy)^2} = \frac{0}{(xy)^2} = 0.$$

2.31

a)

$$\frac{2}{3x+9}+\frac{x}{x^2-9}-\frac{1}{2x-6}=\frac{2}{3(x+3)}+\frac{x}{(x+3)(x-3)}-\frac{1}{2(x-3)}=$$
$$=\frac{2\cdot 2(x-3)+x\cdot 3\cdot 2-3(x+3)}{3\cdot 2(x-1)(x+1)}=\frac{4x-12+6x-3x-9}{6(x-3)(x+3)}=$$
$$=\frac{7x-21}{6(x-3)(x+3)}=\frac{7(x-3)}{6(x-3)(x+3)}=\frac{7}{6(x+3)}.$$

b)

$$\frac{5}{x-1}+\frac{8}{x+1}-\frac{3x+7}{x^2-1}=\frac{5(x+1)+8(x-1)-(3x+7)}{x^2-1}=$$
$$=\frac{5x+5+8x-8-3x-7}{(x+1)(x-1)}=\frac{10x-10}{(x+1)(x-1)}=\frac{10(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{10}{x+1}.$$

2.32

a)

$$\frac{3x-y}{x^2-2xy+y^2}-\frac{2}{x-y}-\frac{2y}{(x-y)^2}=\frac{3x-y-2(x-y)-2y}{(x-y)^2}=\frac{x-y}{(x-y)^2}=\frac{1}{x-y}.$$

b)

$$\frac{a}{a^2+4ab+4b^2}+\frac{2b}{a^2-4b^2}=\frac{a}{(a+2b)^2}+\frac{2b}{(a-2b)(a+2b)}=$$
$$=\frac{a(a-2b)+2b(a+2b)}{(a-2b)(a+2b)^2}=\frac{a^2-2ab+2ab+4b^2}{(a-2b)(a+2b)^2}=\frac{a^2+4b^2}{(a-2b)(a+2b)^2}.$$

2.33

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)}+\frac{1}{(x-1)(x-3)}+\frac{1}{(x-2)(x-3)}=\frac{(x-3)+(x-2)+(x-1)}{(x-1)(x-2)(x-3)}=$$
$$=\frac{3x-6}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{3}{(x-1)(x-3)}.$$

2.34

a)

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2+3x-3 \\ \cline{2-2}
x^5+3x^4-2x^3 \quad + \quad 2x-1 & x^3+x+1 \\ \cline{1-1}
-x^2(x^3+x+1) & \\ \cline{1-1}
3x^4-3x^3-x^2+2x-1 & \\
-3x(x^3+x+1) & \\ \cline{1-1}
-3x^3-4x^2-x-1 & \\
-(-3)(x^3+x+1) & \\ \cline{1-1}
-4x^2+2x+2 &
\end{array}
$$

Härur avläses följande

$$\text{kvot: } x^2+3x-3; \text{ rest: } -4x^2+2x+2.$$

b)

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 \\ \cline{2-2}
x^6 \quad - \quad 1 & x-1 \\ \cline{1-1}
-x^5(x-1) & \\ \cline{1-1}
x^5 \quad - \quad 1 & \\
-x^4(x-1) & \\ \cline{1-1}
x^4 \quad - \quad 1 & \\
-x^3(x-1) & \\ \cline{1-1}
x^3 \quad - \quad 1 & \\
-x^2(x-1) & \\ \cline{1-1}
x^2 \quad - \quad 1 & \\
-x(x-1) & \\ \cline{1-1}
x-1 & \\
-1\cdot(x-1) & \\
0 &
\end{array}
$$

Ur detta finner vi

$$\text{kvot: } x^5+x^4+x^3+x^2+x+1; \text{ rest: } 0.$$

Att resultatet blir som det blir kan identifieras med geometriska serier/summor.

c)

$$
\begin{array}{rl}
x^2 - 2x + 3 & \\
\hline
x^4 + 2x^3 \qquad + \qquad 25 & \big|\ x^2 + 4x + 5 \\
\cline{2-2}
-x^2(x^2 + 4x + 5) & \\
\hline
-2x^3 - 5x^2 \quad + \quad 25 & \\
-2x(x^2 + 4x + 5) & \\
\hline
3x^2 + 10x + 25 & \\
-3(x^2 + 4x + 5) & \\
\hline
-2x + 10 &
\end{array}
$$

Härur avläses följande

$$\text{kvot: } x^2 - 2x + 3; \text{ rest: } -2x + 10.$$

2.35

a)

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2).$$

b)

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2.$$

c)

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1).$$

d)

Hitta nollställen på lämpligt sätt.

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \implies x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}} =$$

$$= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \implies \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \implies$$

$$\implies x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2).$$

e)

Nollställen man bör hitta är $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, alltså kan polynomet skrivas

$$2 - x - x^2 = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x + 2)(x - 1),$$

där $a = -1$ (koefficienten framför termen med högst grad).

$$2 - x - x^2 = -(x + 2)(x - 1).$$

f)

$$x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2(x^2 - 2x + 1) = x^2(x-1)^2.$$

2.36

a)

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1).$$

b)

Polynomet har inga reella rötter, och kan därför inte faktoriseras mer.

$$x^2 + 1.$$

c)

Polynomet har en rot i $x = 1$, vilket betyder att det kan faktoriseras med hjälp av polynomdivision.

$$\begin{array}{rl}
 & x^2 + x + 1 \\
\hline
x^3 \quad - \quad 1 & \big|\ x - 1 \\
\cline{2-2}
 & -x^2(x-1) \\
\cline{1-1}
 & x^2 \quad - \quad 1 \\
 & -x(x-1) \\
\cline{1-1}
 & x - 1 \\
 & -1 \cdot (x-1) \\
\cline{1-1}
 & 0
\end{array}$$

Vi har alltså att

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1),$$

och den andra faktorn har inga reella rötter.

d)

Rot i $x = -1$. Polynomdivision.

$$\begin{array}{rl}
 & x^2 - x + 1 \\
\hline
x^3 \quad + \quad 1 & \big|\ x + 1 \\
\cline{2-2}
 & -x^2(x+1) \\
\cline{1-1}
 & -x^2 \quad + \quad 1 \\
 & -(-x)(x+1) \\
\cline{1-1}
 & x + 1 \\
 & -1 \cdot (x+1) \\
\cline{1-1}
 & 0
\end{array}$$

Detta betyder att

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1),$$

där den andra faktorn återigen inte har några reella rötter.

e)

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1).$$

f)

$x^4 + 27x = x(x^3 + 27)$ och $x^3 + 27$ har en rot i $x = -3$, vilket återigen gör polynomdivision lämpligt.

$$\begin{array}{rl}
 & x^2 - 3x + 9 \\ \hline
x^3 \quad + \quad 27 & \big|\ x + 3 \\ \hline
 & -x^2(x+3) \\ \hline
-3x^2 \quad + \quad 27 & \\
 & -(-3x)(x+3) \\ \hline
 & 9x + 27 \\
 & -9 \cdot (x+3) \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

$$x^4 + 27x = x(x + 3)(x^2 - 3x + 9).$$

g)

$x^6 - 64 = (x^3 - 8)(x^3 + 8)$, dessa två faktorer hanteras lättast separat, den första har en rot i $x = 2$; den andra i $x = -2$. För den första faktorn fås

$$\begin{array}{rl}
 & x^2 + 2x + 4 \\ \hline
x^3 \quad - \quad 8 & \big|\ x - 2 \\ \hline
 & -x^2(x-2) \\ \hline
2x^2 \quad - \quad 8 & \\
 & -2x(x-2) \\ \hline
 & 4x - 8 \\
 & -4 \cdot (x-2) \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

och för den andra blir räkningarna i stort sett analoga

$$\begin{array}{rl}
 & x^2 - 2x + 4 \\ \hline
x^3 \quad + \quad 8 & \big|\ x + 2 \\ \hline
 & -x^2(x+2) \\ \hline
-2x^2 \quad + \quad 8 & \\
 & -(-2x)(x+2) \\ \hline
 & 4x + 8 \\
 & -4 \cdot (x+2) \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

Sammanställt har vi att

$$x^6 - 64 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)(x + 2)(x^2 - 2x + 4).$$

2.37

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 + x^3 + x^2 - 9x + 6 & \\
\hline
x^5 \quad - \quad 10x^2 + 15x - 6 & x - 1 \\
\cline{2-2}
-x^4(x-1) & \\
\hline
x^4 \quad - \quad 10x^2 + 15x - 6 & \\
-x^3(x-1) & \\
\hline
x^3 - 10x^2 + 15x - 6 & \\
-x^2(x-1) & \\
\hline
-9x^2 + 15x - 6 & \\
-(-9x)(x-1) & \\
\hline
6x - 6 & \\
-6(x-1) & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Detta visar att

$$x^5 - 10x^2 + 15x - 6 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 - 9x + 6),$$

men $x = 1$ är fortfarande en rot till polynomet, vilket betyder att polynomdivisionen fortsätter.

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 + 2x^2 + 3x - 6 & \\
\hline
x^4 + x^3 + x^2 - 9x + 6 & x - 1 \\
\cline{2-2}
-x^3(x-1) & \\
\hline
2x^3 + x^2 - 9x + 6 & \\
-2x^2(x-1) & \\
\hline
3x^2 - 9x + 6 & \\
-3x(x-1) & \\
\hline
-6x - 6 & \\
-(-6)(x-1) & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Nu har vi att

$$x^5 - 10x^2 + 15x - 6 = (x-1)^2(x^3 + 2x^2 + 3x - 6),$$

dock är $x = -1$ ännu en lösning, och vi har få alternativ, förutom att polynomdividera lite mera.

$$
\begin{array}{r|l}
x^2 + 3x + 6 & \\
\hline
x^3 + 2x^2 + 3x - 6 & x - 1 \\
\cline{2-2}
-x^2(x-1) & \\
\hline
3x^2 + 3x - 6 & \\
-3x(x-1) & \\
\hline
6x - 6 & \\
-6(x-1) & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Slutligen landar vi med faktoriseringen

$$x^5 - 10x^2 + 15x - 6 = (x-1)^3(x^2+3x+6)$$

eftersom andragradaren inte har några reella rötter. Vidare kan vi konstatera att nollstället $x = 1$ har en multiplicitet av 3 (potensen på faktorn).

Alternativt hade man kunnat göra en kvalificerad gissning att, eftersom tredjegradspolynom är svåra att lösa och att vi började med ett femtegradspolynom, att nollstället troligen har en multiplicitet av 3 och då kunde man utfört polynomdivisionen med $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ direkt istället.

$$\begin{array}{rl}
 & x^2 + 3x + 6 \\ \cline{2-2}
x^5 \quad - \quad 10x^2 + 15x - 6 & \big|\ x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \\ \cline{1-1}
-x^2(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) & \\ \cline{1-1}
3x^4 - 3x^3 - 9x^2 + 15x - 6 & \\
-3x(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) & \\ \cline{1-1}
6x^3 - 18x^2 + 18x - 6 & \\
-6(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

2.38

Eftersom man inte vill använda den slutna formeln för ett tredjegradspolynom, börjar man med att gissa en rot. Till sin hjälp kan man använda en sats, nämligen *rational root theorem* (man kan säkert söka sig till ytterligare information). Satsen säger bland annat att om ett heltal är en rot till ett polynom så måste det vara en faktor av den konstanta termen, detta kan ses av att ett polynom går att skriva som produkten mellan alla nollställen.

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ \dots \ + a_1x + a_0 = (x-\alpha_n)(x-\alpha_{n-1})\dots(x-\alpha_2)(x-\alpha_1),$$

där $\alpha_i \in \mathbb{C},\ i = 1,\ 2,\ \dots,\ n$ är polynomets nollställen. Faktoriseringen visar tydligt att $a_0 = (-1)^n\alpha_n\dots\alpha_1$, vilket betyder att om ett heltal ska vara en lösning måste det vara en faktor till den konstanta termen. Efter detta handviftande troliggörande av satsen kan vi nu tillämpa den.

$$p(x) = x^3 - 2x - 4,$$

och 4 har faktorerna ± 1, ± 2 och ± 4, vilket betyder att <u>om</u> ett heltal är en rot måste det vara något av dessa alternativ. Man ser ganska snabbt att $x = 2$ är en lösning. Bruket av denna sats kan verka lite överflödigt i detta fall, men det är bra att känna till eftersom man kan spara en massa tid på att använda den för mer komplicerade polynom.

$$\begin{array}{rl}
 & x^2 + 2x + 2 \\ \cline{2-2}
x^3 \quad - \quad 2x - 4 & \big|\ x - 2 \\ \cline{1-1}
-x^2(x-2) & \\ \cline{1-1}
2x^2 - 2x - 4 & \\
-2x(x-2) & \\ \cline{1-1}
2x - 4 & \\
-2(x-2) & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Kvoten går inte att faktorisera mer, så vi slutar med följande resultat

$$p(x) = x^3 - 2x - 4 = (x - 2)(x^2 + 2x + 2).$$

Kapitel 3

Några saker som är viktiga att tänka på när man löser vissa ekvationer, eller olikheter: om ekvationen innehåller rotuttryck, logaritmer, eller andra funktioner som inte är definierade på för alla reella tal är det viktigt att man kontrollerar att man inte har fått en falsk lösning. Detta gäller även för ekvationer som innehåller flera absolutbelopp. Vidare, när det gäller olikheter, är det viktigt att alla steg är ekvivalenser och inte bara implikationer. Exempelvis kan man inte multiplicera med x om det skulle stå i en nämnare eftersom man inte vet om x är positivt, negativt, eller noll och alltså gör man ett inskränkande antagande. Dessutom kanske det är så att x tillhör ett intervall som passerar nollan, vilket betyder att x både antar positiva och negativa värden. Problemet med att bara multiplicera är att man inte vet hur olikheten påverkas - om man multiplicerar/delar med ett negativt tal måste olikheten byta riktning.

Hur ska man göra då? - Jo, man flyttar allting till samma sida om olikhetstecknet och sätter det på ett gemensamt bråkstreck. Sedan faktoriserar man allting så långt som möjligt och gör till sist en teckenstudie för att se när uttrycket är positivt, negativt, noll, och/eller odefinierat.

3.1

a)

Likheten är uppfylld när någon av faktorerna är noll.

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

b)

$$x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2) = 0 \implies \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = -2, \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

c)

$$x^2 + 10x + 24 = x^2 + 10x + 25 - 1 = (x+5)^2 - 1 = 0 \implies x + 5 = \pm 1 \implies \begin{cases} x_1 = -6, \\ x_2 = -4. \end{cases}$$

d)

$$x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2 = 0 \implies x_1 = x_2 = -5 \text{ (dubbelrot).}$$

e)

$$x^3 + 10x^2 + 24x = x(x^2 + 10x + 24) = 0 \implies \begin{cases} x = 0, \\ x^2 + 10x + 24 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = -6 \\ x_3 = -4. \end{cases}$$

f)

$$x^4 + 10x^3 + 25x^2 = x^2(x+5)^2 = 0 \implies \begin{cases} x_1 = x_2 = 0, \\ x_3 = x_4 = -5. \end{cases}$$

3.2

a)

Vi vill att uttrycket ska bli noll vid insättning av $x = 2$,

$$x^2 + 4x + a\big|_{x=2} = 0 \implies 2^2 + 4 \cdot 2 + a = 12 + a = 0 \implies a = -12.$$

b)

$$x^2 + bx + 12\big|_{x=3} = 0 \implies 3^2 + b \cdot 3 + 12 = 21 + 3b = 0 \implies b = -7.$$

3.3

För ett allmänt polynom av grad n gäller

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ ... \ + a_1 x + a_0 = a_n(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_{n-1})(x - x_n),$$

där $x_k,\ k = 1, ..., n$ är polynomets nollställen. Alltså behöver man bara hitta alla nollställen och identifiera koefficienten framför termen med högst grad. Jag kommer inte att explicit skriva ner pq-formeln/kvadratkompletteringen för varje ekvation eftersom det är bara mödosamt.

a)

Lösningarna till $p(x) = x^2 - x - \frac{3}{4} = 0$ är

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2}, \\ x_2 = -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$n = 2,\ a_2 = 1 \implies p(x) = a_2(x - x_1)(x - x_2) = (x - \frac{3}{2})(x + \frac{1}{2}).$$

b)

Lösningarna till $p(x) = 2x^2 - 3x - 2 = 0 \iff x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0$ är

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$n = 2,\ a_2 = 2 \implies p(x) = a_2(x - x_1)(x - x_2) = 2(x - 2)(x + \frac{1}{2}).$$

c)

Lösningarna till $p(x) = -x^2 + x + 12 = 0$ är

$$\begin{cases} x_1 = 4, \\ x_2 = -3, \end{cases}$$

$$n = 2,\ a_2 = -1 \implies p(x) = a_2(x - x_1)(x - x_2) = -(x - 4)(x + 3).$$

d)

$$p(x) = x^3 - x^2 + \frac{1}{4}x = x(x^2 - x + \frac{1}{4}) = x(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2) = x(x - \frac{1}{2})^2 \implies$$

$$\implies p(x) = 0 \implies \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = x_3 = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$n = 3,\ a_3 = 1 \implies p(x) = a_3(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = (x-0)(x-\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2}) = x(x-\frac{1}{2})^2,$$

den faktorisering var redan gjord ovan och att den skrivs ner igen är mer för att vissa hur allmänna polynom skrivs som en produkt av deras nollställen.

e)

$$p(x) = 3x^3 - 6x^2 + 15x = 3x(x^2 - 2x + 5),$$

andragradsfaktorn har inga reella rötter, så faktoriseringen är redan färdig och den enda (reella) roten är $x = 0$.

f)

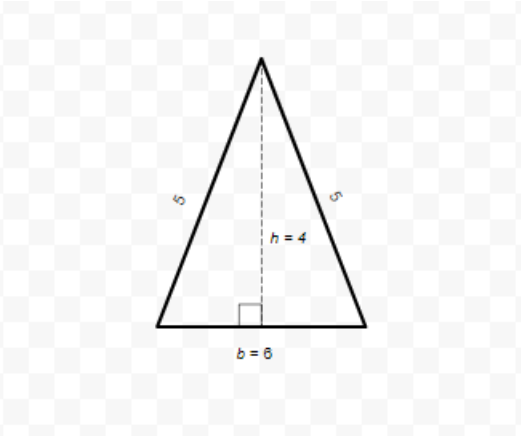
$$p(x) = x^4 - 6x^2 + 8 = [t = x^2] = t^2 - 6t + 8 = 0 \implies$$

$$\implies \begin{cases} t = 2, \\ t = 4 \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 = 2, \\ x^2 = 4 \end{cases} \implies \begin{cases} x_{1,2} = \pm\sqrt{2}, \\ x_{3,4} = \pm 2, \end{cases}$$

$$n = 4,\ a_4 = 1 \implies p(x) = a_4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) =$$

$$= (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - 2)(x + 2).$$

3.4



Basen 6 cm och benlängden 5 cm ger omkretsen $O = 6 + 2 \cdot 5 = 16$ cm. Höjden kan fås genom att betrakta halva basen och sedan använda Pythagoras sats, eftersom det ger en rätvinklig triangel. Detta betyder att benet kommer att vara hypotenusan,

$$\left(\frac{6}{2}\right)^2 + h^2 = 5^2 \implies h^2 = 16 \implies h = \underset{(-)}{+}4 \text{ cm},$$

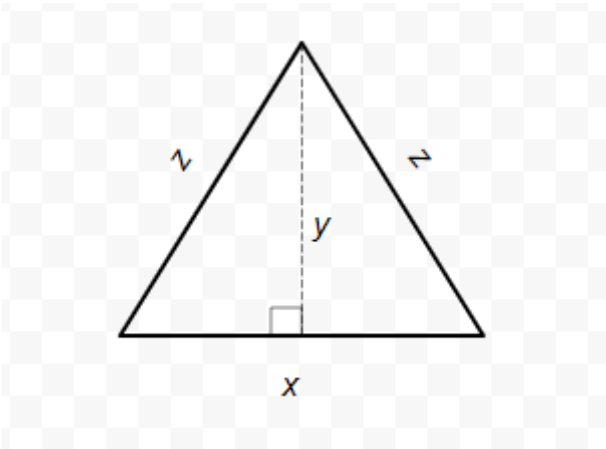
där den negativa lösningen förkastas eftersom den inte är fysikalisk. Med detta kan vi beräkna arean, basen b och höjden h,

$$A = \frac{bh}{2} = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12 \text{ cm}^2.$$

Vi söker nu en annan likbent triangel med samma omkrets och area. Låt basen betecknas med x, och höjden med y. Vi kan nu bestämma benlängden genom att använda Pythagoras sats igen:

$$z^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 \implies z = \underset{(-)}{+}\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2},$$

där den negativa roten återigen förkastas.



Ekvationerna för arean och omkretsen blir nu

$$\begin{cases} A = 12 = \frac{xy}{2}, \\ O = 16 = x + 2z = x + 2\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2} \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{24}{y}, \\ x + 2\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2} = 16, \end{cases}$$

insättning i den andra ekvationen ger

$$\frac{24}{y} + 2\sqrt{\left(\frac{24}{2y}\right)^2 + y^2} = 16 \implies 8 - \frac{12}{y} = \sqrt{\frac{12^2}{y^2} + y^2} \implies$$

$$(8 - \frac{12}{y})^2 = \frac{12^2}{y^2} + y^2 \implies 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot \frac{12}{y} + \frac{12^2}{y^2} = \frac{12^2}{y^2} + y^2 \implies$$

$$\implies 64 - \frac{192}{y} + \frac{12^2}{y^2} = \frac{12^2}{y^2} + y^2 \implies y^2 - 64 + \frac{192}{y} = 0 \implies y^3 - 64y + 192 = 0.$$

Den triangeln vi började med uppfyller ekvationen som har ställts upp, vilket betyder att vi vet att $y = h = 4$ är en lösning. Detta betyder att vi kan utföra polynomdivision.

$$\begin{array}{rl} & y^2 + 4y - 48 \\ \hline y^3 - 64y + 192 & | \; y - 4 \\ \cline{2-2} -y^2(y-4) & \\ \hline 4y^2 - 64y + 192 & \\ -4y(y-4) & \\ \hline -48y + 192 & \\ -(-48)(y-4) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Alltså är $y^3 - 64y + 192 = (y-4)(y^2 + 4y - 48)$ och

$$y^3 - 64y + 192 = 0 \implies \begin{cases} y_1 = 4, \\ y_{2,3} = -2 \pm \sqrt{52} = -2 \underset{(-)}{+} 2\sqrt{13}, \end{cases}$$

där y_3 ignoreras eftersom den är negativ, vilket inte är en önskvärd egenskap hos höjd. Slutligen kan vi nu beräkna triangelns sidor.

$$x = \frac{24}{y} = \frac{24}{-2 + 2\sqrt{13}} = \frac{12}{-1 + \sqrt{13}} \cdot \frac{-1 - \sqrt{13}}{-1 - \sqrt{13}} = \frac{-12(1 + \sqrt{13})}{(-1)^2 - 13} = 1 + \sqrt{13} \text{ cm},$$

$$z = \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right)^2 + (-2 + 2\sqrt{13})^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1 + 2\sqrt{13} + 13}{4} + 4 - 8\sqrt{13} + 52} = \sqrt{\frac{14 + 2\sqrt{13} + 224 - 32\sqrt{13}}{4}} =$$

$$= \frac{\sqrt{225 - 30\sqrt{13} + 13}}{2} = \frac{\sqrt{(15 - \sqrt{13})^2}}{2} = \frac{15 - \sqrt{13}}{2} \text{ cm}.$$

3.5

I samtliga deluppgifter kommer jag att skriva vilka värden på x som inte är tillåtna, och sedan antar jag indirekt att x inte antar dessa värden, vilket tillåter mig att multiplicera med nämnarna - jag multiplicerar alltså inte med 0.

a)

Först konstaterar vi att $x \neq -1,\ 0,\ 1$ eftersom nämnarna då blir 0.

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = 0 \implies$$

$$\implies x(x+1) + (x-1)(x+1) + x(x-1) = x^2 + x + x^2 - 1 + x^2 - x = 3x^2 - 1 = 0 \implies$$

$$\implies x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

b)

Återigen kan $x \neq 1,\ 2,\ 3,\ 4$.

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4} \implies \frac{(x-2)-(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(x-4)-(x-3)}{(x-3)(x-4)} \implies$$

$$\implies \frac{-1}{(x-1)(x-2)} = \frac{-1}{(x-3)(x-4)} \implies (x-1)(x-2) = (x-3)(x-4) \implies$$

$$\implies x^2 - 3x + 2 = x^2 - 7x + 12 \implies 4x - 10 = 0 \implies x = \frac{5}{2}.$$

c)

$x \neq 0,\ 2,\ -3$.

$$\frac{1}{x^2-2x} + \frac{1}{x^2+3x} \implies x + 3 + x - 2 = 0 \implies x = -\frac{1}{2}.$$

d)

$x \neq -2,\ 2$.

$$\frac{1}{x+2} - \frac{x+2}{x-2} = \frac{x^2}{4-x^2} = \frac{-x^2}{(x-2)(x+2)} \implies x - 2 - (x+2)^2 = -x^2 \implies$$

$$\implies x - 2 - (x^2 + 4x + 4) = -x^2 \implies -3x - 6 = 0 \implies x = -2,$$

men som jag har skrivit ovan får $x \neq -2$, vilket betyder att det saknas lösning till ekvationen.

3.6

Anta att båten ros med konstant hastighet. Vi måste dela upp problemet i två fall, först när man ror längs med strömmen och sedan när man ror mot strömmen. Några beteckningar: sträckan $s = 6,4$ km, total tid $t = 2$ h, tiden det tar att ro med strömmen t_1, tiden det tar att ro mot strömmen t_2, strömhastigheten $u = 2,4$ km/h och den sökta hastigheten v. Av rimlighetsskäl måste även $t_1 + t_2 = t$ och $t_1 < t_2$ (det går snabbare att ro med strömmen). Vi får följande ekvationssytem ($s = vt$):

$$\begin{cases} (v+u)t_1 = s, \\ (v-u)t_2 = s, \\ t_1 + t_2 = t \implies t_2 = t - t_1 \end{cases} \implies \begin{cases} t_1 = \frac{s}{v+u}, \\ (v-u)(t-t_1) = s \implies t_1 = \frac{(v-u)t-s}{v-u} \end{cases} \implies$$

$$\implies \frac{s}{v+u} = \frac{(v-u)t-s}{v-u} \implies s(v-u) = (v-u)(v+u)t - s(v+u) \implies$$

$$\implies sv - su = (v^2 - u^2)t - sv - su \implies u^2 t = v^2 t - 2sv \implies v^2 - 2\frac{s}{t}v - u^2 = 0 \implies$$

$$\implies v = \frac{s}{t} \pm \sqrt{\left(\frac{s}{t}\right)^2 + u^2} = \frac{6,4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6,4}{2}\right)^2 + 2,4^2} = 3,2 \underset{(-)}{+} 4 = 7,2 \text{ km/h}.$$

Den negativa lösningen har förkastats av ett antal skäl.

3.7

a)

$$\sqrt{x+2} = x \implies x + 2 = x^2 \iff \begin{cases} x = -1, \\ x = 2. \end{cases}$$

Eftersom vi har kvadrerat ett rotuttryck och ändrat definitionsmängden vi jobbar i ($x \geq -2 \to x \in \mathbb{R}$) är det klokt att testa de möjliga lösningarna. Detta visar att $x = -1$ är en falsk lösning, men $x = 2$ fungerar.

b)

$$\sqrt{x+2} = -x \implies x + 2 = x^2 \iff \begin{cases} x = -1, \\ x = 2. \end{cases}$$

Återigen testar vi det vi har fått fram, och här ser vi att $x = 2$ är en falsk lösning, medan $x = -1$ är giltig.

c)

$$x - \sqrt{x-2} = 4 \iff \sqrt{x-2} = x - 4 \implies x - 2 = x^2 - 8x + 16 \implies$$

$$\implies x^2 - 9x + 18 = 0 \implies \begin{cases} x = 3, \\ x = 6. \end{cases}$$

Test av lösningskandidaterna ger att endast $x = 6$ fungerar.

3.8

a)

$$\sqrt{x+2} = \sqrt{2x+1} \implies x+2 = 2x+1 \iff x = 1 \text{ (giltig)}.$$

b)

$$\sqrt{3x+2} = \sqrt{2x+1} \implies 3x+2 = 2x+1 \iff x = -1,$$

vilket är en falsk rot eftersom diskriminanterna blir negativa.

c)

$$\sqrt{x+2} = \sqrt{x} \implies x+2 = x \implies \text{ lösning saknas.}$$

d)

$$\sqrt{x-2}\sqrt{x+3} = x \implies (x-2)(x+3) = x^2 \iff$$
$$\iff x^2 + x - 6 = x^2 \iff x = 6 \text{ (giltig)}.$$

e)

$$(3+\sqrt{x})(3-\sqrt{x}) = 8\sqrt{x} \implies (9-x)^2 = 64x \iff$$
$$\iff 81 - 18x + x^2 = 64x \iff x^2 - 82x + 81 \iff \begin{cases} x = 1 \text{ (giltig)}, \\ x = 81 \text{ (falsk)}. \end{cases}$$

f)

$$\sqrt{x} = \frac{3}{\sqrt{x}} + \sqrt{3+x} \iff \sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}} = \sqrt{3+x} \implies$$
$$\implies x - 2\sqrt{x}\frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{9}{x} = 3 + x \iff \frac{9}{x} = 9 \iff x = 1 \text{ (falsk)}.$$

3.9

Inses lätt.

3.10

Inses lätt.

3.11

a)

$$3x + 1 < 2 \iff x < \frac{1}{3}.$$

b)

$$-3x + 2 \leq 1 \iff 1 \leq 3x \iff x \geq \frac{1}{3}.$$

c)

$$3x + 1 > 4x + 5 \iff -4 > x \iff x < -4.$$

d)

$$(x-3)(x+3) \leq x^2 \iff x^2 - 9 \leq x^2 \iff -9 \leq 0,$$

olikheten är oberoende av x och sann, vilket betyder att den är uppfylld för alla värden på x.

3.12

a)

Lösning finns redan.

b)

$$\frac{x+4}{x-1} < 0.$$

Det är i princip samma uppgift som a), men med olikheten vänd åt andra hållet, så det är bara att vända alla olikheter, vilket ger att

$$-4 < x < 1.$$

c)

$$\frac{x+1}{x(x-1)} < 0.$$

Faktorisering och uppställning på gemensamt bråkstreck är redan gjort, så det är bara att skriva upp teckentabellen direkt. De värden på x som är relevanta är alla som faktorerna byter tecken vid, det vill säga deras nollställen. Uttrycket är negativt när vi har ett udda antal faktorer som är negativa, §-tecknet betyder att uttrycket inte är definierat för det värdet på x.

x		-1		0		1	
$x+1$	-	0	+	+	+	+	+
x	-	-	-	0	+	+	+
$x-1$	-	-	-	-	-	0	+
$\frac{x+1}{x(x-1)}$	-	0	+	§	-	§	+

Vi ser nu att

$$\frac{x+1}{x(x-1)} < 0 \iff x < -1 \text{ eller } 0 < x < 1.$$

d)

Olikheten $(x+2)(2x-1) > 0$ ger följande teckentabell:

x		-2		1/2	
$x+2$	-	0	+	+	+
$2x-1$	-	-	-	0	+
$(x+2)(2x-1)$	+	0	-	0	+

$$\implies (x+2)(2x-1) > 0 \iff x < -2 \text{ eller } x > \frac{1}{2}.$$

3.13

Lösning finns redan.

3.14

a)

$$\frac{x^2+1}{x} < x \iff \frac{x^2}{x} + \frac{1}{x} < x \iff x + \frac{1}{x} < x \iff \frac{1}{x} < 0 \iff x < 0.$$

b)

$$\frac{2x^2}{x+2} < x - 2 \iff \frac{2x^2}{x+2} - x + 2 < 0 \iff \frac{2x^2 - (x+2)(x-2)}{x+2} < 0 \iff$$
$$\iff \frac{2x^2 - (x^2-4)}{x+2} = \frac{x^2+4}{x+2} < 0,$$

$x^2+4 > 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$, vilket betyder att det bara är nämnarens tecken som är relevant. $x+2 < 0 \iff x < -2$, vilket är vårt svar.

c)

$$\frac{x^2+2}{x^2+1} > 1 \iff \frac{x^2+1+1}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} = 1 + \frac{1}{x^2+1} > 1 \iff \frac{1}{x^2+1} > 0,$$

likartat med b)-uppgiften är $x^2+1 > 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$, vilket betyder att olikheten är uppfylld för alla reella x.

3.15

a)

$$x^2 < 4 \iff x^2 - 4 < 0 \iff (x+2)(x-2) < 0 \implies$$

x		-2		2	
$x+2$	-	0	+	+	+
$x-2$	-	-	-	0	+
$(x+2)(x-2)$	+	0	-	0	+

$$\implies x^2 < 4 \iff -2 < x < 2.$$

Alternativt kan man se lösningen direkt eftersom ± 2 kvadreras till 4 och därmed måste x ligga mellan.

$$x^2 < 4 \iff |x| < 2 \iff -2 < x < 2,$$

men metoden ovan med teckentabeller är mer allmän och algoritmisk, och bör nog användas om man känner sig osäker.

b)

Samma som a), men med vänd olikhet, och alltså får man att

$$x < -2 \text{ eller } x > 2.$$

c)

$$(x+1)^2 > (x+5)^2 \iff (x+1)^2 - (x+5)^2 > 0 \iff$$
$$\iff ((x+1)-(x+5))((x+1)+(x+5)) > 0 \iff -4(2x+6) = -8(x+3) > 0 \iff$$
$$\iff x+3 < 0 \iff x < -3.$$

Notera att olikheten byter riktning när man delar med -8.

3.16

$$\frac{1-x^4}{1-(x^2+1)^2} < 1 \iff \frac{1-x^4}{1-(x^2+1)^2} < 1 \iff \frac{1-x^4}{1-(x^4+2x^2+1)} < 1 \iff$$
$$\iff \frac{1-x^4}{-x^4-2x^2} = \frac{x^4-1}{x^4+2x^2} < 1 \iff \frac{x^4-1}{x^4+2x^2} - 1 < 0 \iff$$
$$\iff \frac{x^4-1}{x^4+2x^2} - \frac{x^4+2x^2}{x^4+2x^2} < 0 \iff \frac{-1-2x^2}{x^4+2x^2} < 0 \iff \frac{2x^2+1}{x^2(x^2+1)} > 0.$$

Olikheten bytte riktning i det sista steget eftersom jag delade med -1. Utifrån denna uppställning ser man att både $2x^2+1$ och x^2+1 är strikt positiva för reella x. Vidare är även $x^2 > 0,\ x \neq 0$, vilket betyder att olikheten är uppfylld för alla $x \neq 0$.

3.17

a)

$$x + \frac{4}{x} = 5 \implies x^2 + 4 = 5x \iff x^2 - 5x + 4 \iff \begin{cases} x = 1, \\ x = 4. \end{cases}$$

b)

$$x + \frac{4}{x} > 5 \iff x + \frac{4}{x} - 5 > 0 \iff \frac{x^2+4-5x}{x} > 0 \iff \frac{(x-1)(x-4)}{x} > 0,$$

vilket ger upphov till följande teckenschema,

x		0		1		4	
x	-	0	+	+	+	+	+
$x-1$	-	-	-	0	+	+	+
$x-4$	-	-	-	-	-	0	+
$\frac{(x-1)(x-4)}{x}$	-	§	+	0	-	0	+

där vi ser att olikheten är uppfylld precis då $0 < x < 1$ eller $x > 4$.

Kapitel 4

Nedan följer några relationer som antagligen kommer att vara till hjälp. Om man har en aritmetisk talföljd, det vill säga en talföljd där skillnaden mellan två efterföljande element är konstant ($a_{k+1} = a_k + d \implies a_k = a_1 + kd$), gäller den här formeln för summan av alla termer.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}. \tag{3}$$

Uttryckt i ord säger (3) att summan är lika med antalet termer gånger medelvärdet av den första och sista termen. Härnäst har vi formeln för en geometrisk summa. En geometrisk talföljd är en där kvoten mellan två efterföljande element är konstant ($b_{k+1} = rb_k \implies b_k = r^k b_1$).

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = b_1 \frac{r^n - 1}{r - 1} = b_1 \frac{1 - r^n}{1 - r} (\text{första termen}) \cdot \frac{(\text{kvoten})^{(\text{antalet termer})} - 1}{(\text{kvoten}) - 1}. \tag{4}$$

$$n! = n(n-1)(n-2)... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1. \tag{5}$$

(5) beskriver hur fakultetfunktionen är definierad, speciellt är $0! = 1$. Den kombinatoriska tolkningen är att $n!$ beskriver hur många olika sätt man kan ordna n olika saker, det vill säga antalet permutationer. Exempelvis är antalet ördman kan bilda med bokstäverna äbcd"$4! = 24$.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)...(n-k+2)(n-k+1)}{k!}. \tag{6}$$

Binomialkoefficienten, som visas i (6), anger hur man sätt man kan välja k saker från n ting, det vill säga antalet kombinationer. Exempelvis om man köper glass och det finns tio smaker och man vill ha två kulor, så kan man bilda $\binom{10}{2} = 45$ olika glasstrutar om man inte bryr sig om ordningen. Slutligen har vi binomialsatsen, (7), som är en generalisering av kvadreringsreglerna.

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k. \tag{7}$$

Som i Kapitel 2 kommer jag inte alltid att hänvisa till ovanstående relationer när jag använder dem i uppgifterna, men ibland gör jag det.

4.1

a)

Det bara att beräkna alla termer för sig, eller så använder man den slutna formeln för summan av kuber som man definitivt har i huvudet:

$$\sum_{n=1}^{m} n^3 = \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2 = [m=5] = \left(\frac{5(5+1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{30}{2}\right)^2 = 15^2 = 225.$$

Anmärkning.

$$\frac{m(m+1)}{2} = \sum_{n=1}^{m} n \implies \left(\sum_{n=1}^{m} n\right)^2 = \sum_{n=1}^{m} n^3 \iff$$

$$\iff (1+2+3+\ \dots\ +(m-1)+m)^2 = 1^3+2^3+3^3+\ \dots\ +(m-1)^3+m^3,$$

vilket är en ganska häftig likhet.

b)

Återigen är det bara att sätta in värden och beräkna summan för hand, men man kan också använda slutna formler igen (första termen är 0):

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \implies$$

$$\implies \sum_{k=0}^{4}(k^2-3k) = \sum_{k=1}^{4} k^2 - 3\sum_{k=1}^{4} k = \frac{4(4+1)(2\cdot 4+1)}{6} - 3\cdot\frac{4(4+1)}{2} = \frac{180}{6} - 3\cdot\frac{20}{2} = 0.$$

c)

$$\sum_{k=2}^{100} 3 = (100-2+1)\cdot 3 = 297,$$

det är 99 termer eftersom man inkluderar både $k=2$ och $k=100$.

d)

$$\sum_{k=m}^{n} 3 = (n-m)\cdot 3 = 3(n-m+1).$$

4.2

a)

Det som varierar är nämnaren och den ökar med 1 i varje term

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k}.$$

b)

Den sista termen anger formen på termerna i summan, och den börjar med $2\cdot 3$, vilket ger

$$\sum_{k=2}^{n} k(k+1).$$

c)

Geometrisk summa med kvoten $r = 3$ som börjar med $1 = 3^0$ och slutar på $243 = 3^5$, alltså kan summan skrivas

$$\sum_{k=0}^{5} 3^k.$$

4.3

Använd (3)

$$1 + 2 + 3 + ... + 99 + 100 = \frac{100(1 + 100)}{2} = 5050.$$

4.4

Ännu en aritmetisk summa, men nu är termerna de som ingår i talföljden $3,\ 6, ..., 96,\ 99$. Detta är 33 termer, vilket betyder att

$$\sum_{k=1}^{33} 3k = \frac{33(3 + 99)}{2} = 1683.$$

4.5

I följande deluppgifter används (3).

a)

$$1 + 2 + 3 + ... + 9 + 10 = \sum_{k=1}^{10} k = \frac{10(1 + 10)}{2} = 55.$$

b)

$$4 + 8 + 12 + ... + 36 + 40 = \sum_{k=1}^{10} 4k = \frac{10(4 + 40)}{2} = 220.$$

Alternativt kan man faktorisera ut 4 och sedan använda resultatet från a)-uppgiften.

c)

$$3 + 7 + 11 + ... + 35 + 39 = \sum_{k=0}^{9} (4k + 3) = \frac{10(3 + 39)}{2} = 210.$$

d)

$$-3 + 7 + 17 + ... + 87 + 97 = \sum_{k=0}^{10} (10k - 3) = \frac{11(-3 + 97)}{2} = 517.$$

4.6

a)

$$\sum_{k=1}^{15} 3k = \frac{15(3 \cdot 1 + 3 \cdot 15)}{2} = 360.$$

b)

$$\sum_{k=1}^{15} (3k+2) = \frac{15((3 \cdot 1 + 2) + (3 \cdot 15 + 2))}{2} = 390.$$

c)

$$\sum_{k=1}^{n} (3k+2) = \frac{n((3 \cdot 1 + 2) + (3n + 2))}{2} = \frac{n(3n+7)}{2} =$$

$$= \frac{n(3n+3) + 4n}{2} = \frac{3n(n+1)}{2} + 2n.$$

d)

$$\sum_{k=1}^{n} (ak+d) = a \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} d = \frac{an(n+1)}{2} + nd.$$

4.7

Nu kommer (4) att användas flitigt. Man kan alltid få kvoten genom att dela två på varandra följande element i talföljden, vilket demonstreras övertydligt i a), men inte i resterande deluppgifter - dock används samma metod.

a)

$r = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = \frac{32}{16} = 2$, och det är 6 termer.

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = \sum_{k=0}^{5} 2^k = 2^0 \cdot \frac{2^6 - 1}{2 - 1} = 2^6 - 1 = 63.$$

b)

$$r = -3 \implies 1 - 3 + 9 - 27 + 81 - 243 = \sum_{k=0}^{5} (-3)^k = (-3)^0 \cdot \frac{(-3)^6 - 1}{-3 - 1} = \frac{728}{-4} = -182.$$

c)

$$r = \frac{1}{2} \text{ och } \frac{1}{128} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 \text{(alltså är det 9 termer)} \implies$$

$$\implies 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{128} = \sum_{k=0}^{8} 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^9}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{512}}{1/2} = 4 \cdot \frac{511}{512} = \frac{511}{128}.$$

d)

$$r = e \text{ och 10 termer} \implies e + e^2 + e^3 + ... + e^{10} = \sum_{k=1}^{10} e^k = e \cdot \frac{e^{10} - 1}{e - 1}.$$

e)

$$r = -x \text{ och 10 termer} \implies 1 - x + x^2 - x^3 + ... - x^9 = \sum_{k=0}^{9} x^k = x^0 \frac{(-x)^{10} - 1}{-x - 1} = \frac{1 - x^{10}}{1 + x}.$$

4.8

Bara tänk igenom hur många termer som varje summa innehåller och vilken den första termen är, sedan är det bara att använda (4).

a)

$$\sum_{k=0}^{10} 3 \cdot 2^k = 1 \cdot \frac{2^{11} - 1}{2 - 1} = 3(2^{11} - 1).$$

b)

$$\sum_{k=1}^{10} 3 \cdot 2^k = 3 \cdot 2 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 6(2^{10} - 1).$$

c)

$$\sum_{k=3}^{10} 3 \cdot 2^k = 3 \cdot 2^3 \cdot \frac{2^8 - 1}{2 - 1} = 24(2^8 - 1).$$

d)

$$\sum_{k=m}^{n} 3 \cdot 2^k = 3 \cdot 2^m \cdot \frac{2^{n-m+1} - 1}{2 - 1} = 3 \cdot 2^m \cdot (2^{n-m+1} - 1).$$

4.9

a)

$$\sum_{k=0}^{n} 3 \cdot 2^{-k} = 3 \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 3 \cdot 1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 6(1 - \frac{1}{2^{n+1}}).$$

b)

$$\sum_{k=1}^{n} \cdot e^{-k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{e}\right)^k = \frac{1}{e} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{e}\right)^n}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{1 - e^{-n}}{e - 1}.$$

c)

$$\sum_{n=0}^{100} 1000 \cdot (1,05)^n = 1000 \cdot 1 \cdot \frac{(1,05)^{101} - 1}{1,05 - 1} = 20000 \cdot ((1,05)^{101} - 1).$$

d)

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^{2n}} = [r = -1/2] = \sum_{k=0}^{2n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = 1 \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}{1 - (-\frac{1}{2})} =$$

$$= \frac{2}{3}(1 + 2^{-2n-1}) = \frac{2^{-2n} + 1}{3},$$

eftersom $2n + 1$ är ett udda tal är $(-1)^{2n+1} = -1$.

e)

Lättast är att bara beräkna termerna för hand, men med lite vilja och kunskap om derivator kan man fixa en sluten formel. Betrakta funktionen

$$f(x) = \sum_{k=2}^{n} kx^k,$$

vi vill bestämma $f(-\frac{1}{2})$, då $n = 5$.

$$f(x) = \sum_{k=2}^{n} kx^k = x \sum_{k=2}^{n} kx^{k-1} = x \sum_{k=2}^{n} \frac{d}{dx}(x^k) = x \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=2}^{n} x^k\right) =$$

$$= x \frac{d}{dx}\left(x^2 \cdot \frac{x^{n-1} - 1}{x - 1}\right) = x \frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1} - x^2}{x - 1}\right) =$$

$$= x \cdot \frac{((n+1)x^n - 2x)(x-1) - (x^{n+1} - x^2) \cdot 1}{(x-1)^2} =$$

$$= x \cdot \frac{(n+1)x^{n+1} - (n+1)x^n - 2x^2 + 2x - x^{n+1} + x^2}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} - x^3 + 2x^2}{(x-1)^2}.$$

Uttrycket ovan gäller dock bara om $x \neq 1$ eftersom vi har använt formeln för en geometrisk summa. Att byta plats på summatecknet och derivatan går också bra eftersom vi har en ändlig summa, så konvergens är inget bekymmer. Om $x = 1$ blir

$$f(1) = \sum_{k=2}^{n} k \cdot 1^k = \sum_{k=2}^{n} k = \frac{(n-1)(2+n)}{2} = \frac{(n+2)(n-1)}{2}.$$

Vi har nu bestämt en sluten form för $f(x)$, nämligen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} - x^3 + 2x^2}{(x-1)^2}, & x \neq 1, \\ \frac{(n+2)(n-1)}{2}, & x = 1. \end{cases}$$

Detta betyder att värdet vi söker blir, med $n = 5$,

$$f(-\frac{1}{2}) = \frac{5\big(-\frac{1}{2}\big)^{5+2} - (5+1)\big(-\frac{1}{2}\big)^{5+1} - \big(-\frac{1}{2}\big)^3 + 2\big(-\frac{1}{2}\big)^2}{(-\frac{1}{2}-1)^2} =$$

$$= \frac{-\frac{5}{2^7} - \frac{6}{2^6} + \frac{1}{2^3} + \frac{2}{2^2}}{(-3/2)^2} = \frac{\frac{-5-6\cdot 2+2^4+2^6}{128}}{9/4} = \frac{4}{9} \cdot \frac{-5-12+16+64}{128} = \frac{4 \cdot 63}{9 \cdot 128} = \frac{7}{32}.$$

Om man läser Funktionsteori kommer denna typ av beräkningar för att bestämma en formel för en summa att dyka upp igen.

4.10

$$p(x) = 2 + 2x + 2x^2 + ... + 2x^7 = \sum_{k=0}^{7} 2x^k = 2 \cdot \frac{x^8 - 1}{x - 1} \implies$$

$$\implies p(3) = 2 \cdot \frac{3^8 - 1}{3 - 1} = 3^8 - 1 = 6560.$$

4.11

Från 2011/12 till 2020/21 är det 10 årsskiften, vilket betyder att det totalt är 12 stycken. Vidare kommer varje insättning att växa med en faktor $1,02$ varje år som det har suttit på banken, den första insättningen växer därmed 11 gånger. Om man lägger ihop detta ska man alltså beräkna summan

$$2000 \cdot (1,02)^{11} + 2000 \cdot (1,02)^{10} + 2000 \cdot (1,02)^9 + ... + 2000 \cdot (1,02)^1 + 2000 \cdot (1,02)^0 =$$

$$= \sum_{k=0}^{11} 2000 \cdot (1,02)^k = 2000 \cdot \frac{(1,02)^{12} - 1}{1,02 - 1} = 100000((1,02)^{12} - 1) \approx 26800 \text{ kr.}$$

4.12

Mellan varje studs, förutom den första, rör den sig först upp en viss sträcka och sedan ner samma sträcka igen, vilket betyder att man måste multiplicera alla intermediära studsars höjd med två. Vi antar också att all energi bevaras och att all kinetisk energi omvandlas till potentiell energi, som är proportionell mot höjden på studsen. Detta betyder att bollens studsar kommer att minska i höjd med en tiondel också (alltså nio tiondelar bevaras). Innan den första studsen rör sig bollen 1 meter, mellan den första och andra rör den sig $2 \cdot 1 \cdot \frac{9}{10}$ och så vidare. Vi betraktar sträckan vid den tionde studsen, vilket betyder att den sista sträckan som inkluderas i summan är $2 \cdot \big(\frac{9}{10}\big)^9$.

$$1 + 2 \cdot \frac{9}{10} + 2 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^2 + ... + 2 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^8 + 2 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^9 =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{9} 2 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^k = 1 + 2 \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{1 - \big(\frac{9}{10}\big)^9}{1 - \frac{9}{10}} = 1 + 2 \cdot \frac{9}{10} \cdot 10 \cdot \big(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^9\big) =$$

$$= 1 + 18\big(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^9\big) \approx 12 \text{ m.}$$

4.13

a)

Använd (5), $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$.

b)

Använd (6), $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$.

c)

Använd (6), $\binom{1001}{999} = \binom{1001}{1001-999} = \binom{1001}{2} = \frac{1001 \cdot 1000}{2 \cdot 1} = 500500$.

4.14

För dessa uppgifter kan man antingen använda (7) direkt, eller känna igen mönstret i Pascals triangel och direkt skriva upp utvecklingen, vilket d)-uppgiften antyder. För fullständighet skriver jag upp hela binomialsatsen för att göra dessa utvecklingar.

a)

$$(a+b)^2 = [n=2] = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} a^{2-k} b^k =$$

$$= \binom{2}{0} a^{2-0} b^0 + \binom{2}{1} a^{2-1} b^1 + \binom{2}{2} a^{2-2} b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

b)

$$(a+b)^3 = [n=3] = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} a^{3-k} b^k =$$

$$= \binom{3}{0} a^{3-0} b^0 + \binom{3}{1} a^{3-1} b^1 + \binom{3}{2} a^{3-2} b^2 + \binom{3}{3} a^{3-3} b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

c)

$$(a+b)^4 = [n=4] = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} a^{4-k} b^k =$$

$$= \binom{4}{0} a^{4-0} b^0 + \binom{4}{1} a^{4-1} b^1 + \binom{4}{2} a^{4-2} b^2 + \binom{4}{3} a^{4-3} b^3 + \binom{4}{4} a^{4-4} b^4 =$$

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

d)

Raderna i Pascals triangel ges av att man adderar dem två ovanliggande talen för att få det aktuella talet. Det som talen anger är binomialkoefficienterna, (6), där n ges av raden och k av hur långt in i raden man är - båda räknat från 0.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & 2 & 1 & & & \\
 & & 1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & & \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & & \\
1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 & \\
1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1
\end{array}$$

Ur detta kan man alltså direkt se att, exempelvis,

$$(a+b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8.$$

Dock måste man vara försiktig om man har något i stil med

$$(2a-b)^3(2a+(-b))^3 = 1\cdot(2a)^3 + 3\cdot(2a)^2(-b) + 3\cdot(2a)(-b)^2 + 1\cdot(-b)^3 =$$
$$= 8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3,$$

eftersom koefficienterna 2 och -1 påverkas av potenserna också.

4.15

a)

Som 4.14 b) med $a = 1$ och $b = x$: $1 + 3x + 3x^2 + x^3$.

b)

$$(3-2x)^3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} 3^{3-k}(-2x)^k =$$
$$= \binom{3}{0}3^{3-0}(-2x)^0 + \binom{3}{1}3^{3-1}(-2x)^1 + \binom{3}{2}3^{3-2}(-2x)^2 + \binom{3}{3}3^{3-3}(-2x)^3 =$$
$$= 1\cdot 3^3\cdot 1 + 3\cdot 3^2(-2x) + 3\cdot 3(-2x)^2 + 1\cdot 1\cdot(-2x)^3 = 27 - 54x + 36x^2 - 8x^3.$$

c)

Som 4.14 c) med $a = 1$ och $b = x$: $1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$.

4.16

$$(x+1)^{15} = \sum_{k=0}^{15} \binom{15}{k} x^{15-k} 1^k = \sum_{k=0}^{15} \binom{15}{k} x^{15-k} \implies [x^{13} \implies k=2] \implies$$
$$\implies \binom{15}{2} = \frac{15 \cdot 14}{2 \cdot 1} = 105.$$

4.17

$$(3-x)^8 = \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} 3^{8-k}(-x)^k = \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} (-1)^k 3^{8-k} x^k \implies [x^3 \implies k=3] \implies$$
$$\implies \binom{8}{3} \cdot (-1)^3 \cdot 3^{8-3} = -\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 3^5 = -13608.$$

4.18

Den konstanta termen fås då man har $x^0 = 1$ som en faktor.

$$(x^2 + \frac{1}{x^3})^{15} = \sum_{k=0}^{15} \binom{15}{k} \left(x^2\right)^{15-k} \left(\frac{1}{x^3}\right)^k = \sum_{k=0}^{15} \binom{15}{k} x^{2(15-k)} x^{-3k} =$$
$$= \sum_{k=0}^{15} \binom{15}{k} x^{30-2k-3k} = \sum_{k=0}^{15} \binom{15}{k} x^{30-5k} \implies$$
$$\implies [x^0 \implies 30-5k=0 \iff k=6] \implies$$
$$\implies \binom{15}{6} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{6!} = \ ... \ = 5005.$$

4.19

$$(x^3-2)^{16} - (x^4+3)^{12} = \sum_{k=0}^{16} \binom{16}{k} \left(x^3\right)^{16-k} (-2)^k - \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} \left(x^4\right)^{12-k} 3^k =$$
$$= \sum_{k=0}^{16} \binom{16}{k} x^{3(16-k)} (-2)^k - \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} x^{4(12-k)} 3^k =$$
$$= \sum_{k=0}^{16} \binom{16}{k} (-2)^k x^{48-3k} - \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} 3^k x^{48-4k}.$$

Utifrån detta ska vi nu hitta den högsta möjliga potensen av x, så det är bara att betrakta $48-3k$ och $48-4k$, vilket visar att den högsta potensen är 48, följt av 45. För x^{48} blir koefficienten

$$\binom{16}{0}(-2)^0 - \binom{12}{0}3^0 = 0,$$

alltså tar x^{48}-termerna ut varandra i respektive binomialutveckling. Detta betyder att x^{45} är den högsta potensen, och den förekommer bara i den ena utvecklingen, så den kommer inte att försvinna. Termen fås av att sätta $k=1$ i den första summan:

$$\binom{16}{1}(-2)^1 x^{48-3\cdot 1} = -32x^{45}.$$

4.20

Lösning finns redan.

4.21

Inspirerade av uppgift 4.20 gör vi följande omskrivningar:

$$\text{VL} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - ... + (-1)^n \binom{n}{n} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k = (1-1)^n = 0 = \text{HL}.$$

$\square$

4.22

$$(a+2x)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} a^{10-k} (2x)^k = \sum_{k=0}^{10} 2^k a^{10-k} x^k \implies [x^8 \implies k = 8] \implies$$

$$\implies \binom{10}{8} \cdot 2^8 \cdot a^{10-8} = 180 \iff 256a^2 \binom{10}{2} = 256a^2 \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 256 \cdot 45a^2 = 180 \iff$$

$$\iff a^2 = \frac{4}{256} = \frac{1}{64} \iff a = \pm\frac{1}{8}.$$

4.23

a)

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_k = 2a_{k-1}, \quad k = 1,\ 2,\ ... \end{cases} \implies$$

$$\implies a_1 = 2a_0 = 2 \implies a_2 = 2a_1 = 4 \implies a_3 = 2a_2 = 8.$$

b)

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_k = a_{k-1}^2 - 1, \quad k = 1,\ 2,\ ... \end{cases} \implies$$

$$\implies a_1 = a_0^2 - 1 = 0 \implies a_2 = a_1^2 - 1 = -1 \implies a_3 = a_2^2 - 1 = 0.$$

4.24

Basfallet är för $k = 1$, vilket summeras till 1, och

$$\frac{1 \cdot (1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = 1,$$

vilket visar basfallet. Vi antar nu att formeln gäller upp till n:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

och vill visa att det gäller för $n+1$ också.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$

$$= (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right) = (n+1)\frac{2n^2+n+6n+6}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = [pq\text{-formeln}] = \frac{(n+1)(2n+3)(n+2)}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)(2(n+1))((n+1)+1)}{6}. \quad \square$$

4.25

Basfallet ($n=1$):

$$x_1 = 1 \cdot \frac{x_1 + x_1}{2}.$$

Antag nu att

$$x_1 + \cdots + x_n = n\frac{x_1 + x_n}{2}.$$

Vi vill visa att

$$x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1} = (n+1)\frac{x_1 + x_{n+1}}{2}.$$

$$x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1} = (x_1 + \cdots + x_n) + x_{n+1} = n\frac{x_1 + x_n}{2} + x_{n+1}.$$

Eftersom x_k är en aritmetisk talföljd gäller det att

$$x_{k+1} = x_k + d,$$

där d är en konstant. Detta betyder att vi kan skriva

$$x_n = x_{n+1} - d,$$

upprepad användning av rekursionsformeln ger också att

$$x_{n+1} = x_1 + nd.$$

Alltså är

$$n\frac{x_1 + x_n}{2} + x_{n+1} = n\frac{x_1 + x_{n+1} - d}{2} + \frac{2x_{n+1}}{2} =$$

$$= n\frac{x_1 + x_{n+1}}{2} + \frac{x_1 + x_{n+1}}{2} - \frac{x_1}{2} - \frac{nd}{2} + \frac{x_{n+1}}{2} = (n+1)\frac{x_1 + x_{n+1}}{2} - \frac{1}{2}(x_1 + nd) + \frac{1}{2}x_{n+1} =$$

$$= (n+1)\frac{x_1 + x_{n+1}}{2} - \frac{1}{2}x_{n+1} + \frac{1}{2}x_{n+1} = (n+1)\frac{x_1 + x_{n+1}}{2}. \quad \square$$

4.26

a)

Låt vikterna vara högskolepoängen: $v_1 = 5,\ v_2 = 3,\ v_3 = 4$, med resultaten $x_1 = 3,2,\ x_2 = 4,2,\ x_3 = 5,0$. Slutbetyget är nu

$$\overline{x} = \sum_{k=1}^{3} v_k x_k \Big/ \sum_{k=1}^{3} x_k = \frac{5 \cdot 3,2 + 3 \cdot 4,2 + 4 \cdot 5,0}{5+3+4} = \frac{48,6}{12} = 4,05 \implies 4.$$

b)

Beteckna medelpunktens position med x. Vi vill då att summan

$$\sum_{k=1}^{4} v_k(x_k - x) = 0,$$

där x_k och v_k är avstånden respektive vikterna i uppgiften.

$$\sum_{k=1}^{4} v_k(x_k - x) = 5 \cdot (0 - x) + 3 \cdot (2 - x) + 3 \cdot (4 - x) + 1 \cdot (10 - x) =$$

$$= -5x + 6 - 3x + 12 - 3x + 10 - x = 28 - 12x = 0 \iff x = \frac{28}{12} = \frac{7}{3} \text{ dm},$$

räknat från änden där vikten som väger 5 kg hänger.

c)

Om vi betecknar

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = v,$$

så blir

$$\alpha_k = \frac{v_k}{v},$$

eftersom

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{v_k}{v} = \frac{\sum_{k=1}^{n} v_k}{\sum_{i=1}^{n} v_i} = 1,$$

och alla vikter är ickenegativa, vilket betyder att

$$v_i \leq \sum_{i=1}^{n} v_i = v \implies \alpha_k = \frac{v_k}{v} \in [0, 1].$$

d)

$$\underline{\implies}: \ \tilde{x} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2.$$

Här ser vi att med $\alpha_1 = \alpha$ och $\alpha_2 = 1 - \alpha$, där $\alpha \in [0, 1]$, blir $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 1$ och $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

$$\underline{\impliedby}: \ \tilde{x} = \alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2,$$

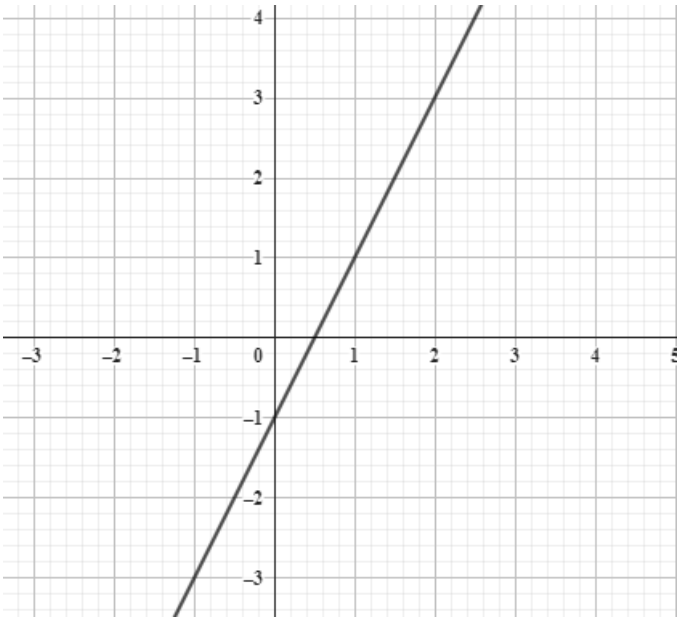
om vi väljer $\alpha_1 = \alpha$ och $\alpha_2 = 1 - \alpha$ är vi klara, eftersom definitionen för en konvexkombination är uppfylld. $\square$

Kapitel 5

5.1

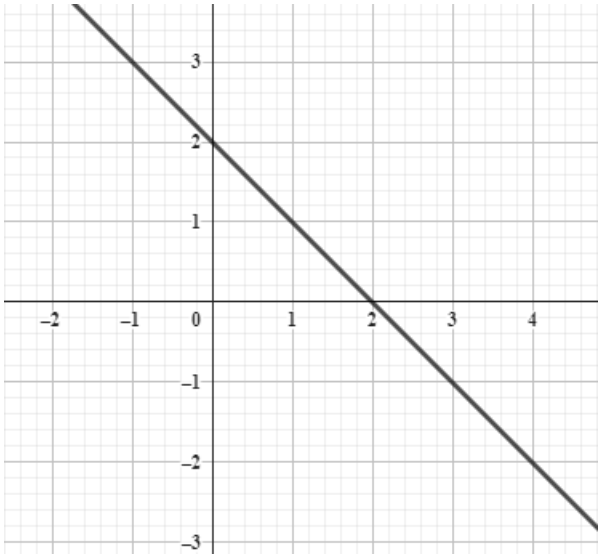
a)

Riktningskoefficient $k = 2$ och skärning $m = -1$.



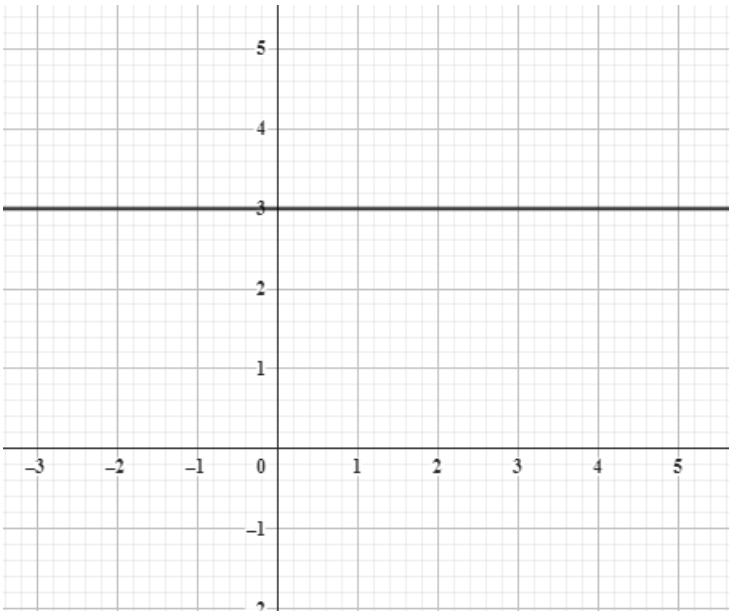
b)

Riktningskoefficient $k = -1$ och skärning $m = 2$.



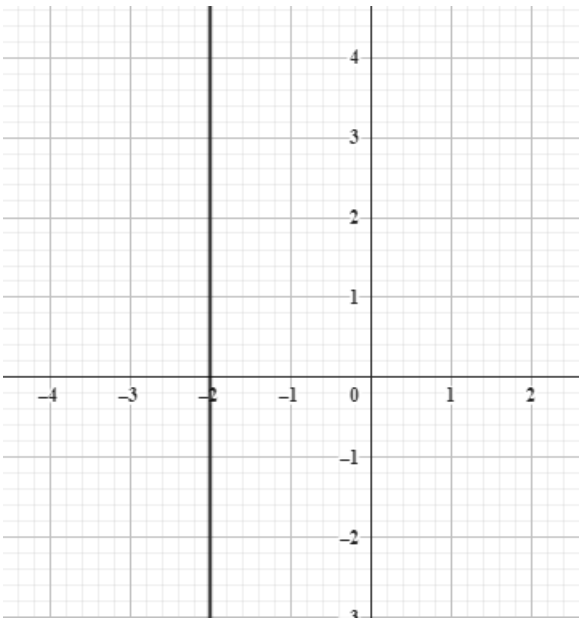
c)

En konstant, horisontell, rak linje vid $y = 3$.



d)

Som i c), men vertikal eftersom den bestäms av x-koordinaten.



5.2

I dessa deluppgifter är det lättast att använda räta linjens ekvation på punktform:

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

där k är riktningskoefficienten och (x_0, y_0) en punkt på linjen.

a)

$$k = -1,\ (x_0, y_0) = (0, 2) \implies y - 2 = -1 \cdot (x - 0) \iff y = 2 - x.$$

b)

$$k = 3,\ (x_0, y_0) = (2, 1) \implies y - 1 = 3 \cdot (x - 2) \iff y = 3x - 5.$$

c)

$$k = k,\ (x_0, y_0) = (a, b) \implies y - b = k(x - a).$$

d)

Punkterna (a, b) och $(a + 1, b + 1)$ ger

$$k = \frac{(a+1) - a}{(b+1) - b} = 1 \implies y - b = 1 \cdot (x - a) \iff y = x + b - a.$$

5.3

Det är bara att sätta in punktens koordinater och bestämma a så att likheten uppfylls.

$$5 = a(-2) - 3 \iff a = -4.$$

5.4

Anta att $y = kx + m$ i alla deluppgifter.

a)

Punkterna $(-2, 1)$ och $(1, -2)$ ger

$$k = \frac{-2 - 1}{1 - (-2)} = -1 \implies y = -x + m \implies 1 = -(-2) + m \implies m = -1 \implies$$

$$\implies y = -x - 1.$$

b)

Punkterna $(-1, 2)$ och $(2, 2)$ ger

$$k = \frac{2 - 2}{2 - (-1)} = 0 \implies y = m \implies y = 2.$$

c)

Samma x-koordinat i punkterna betyder att det är en horisontell linje $x = 1$.

5.5

Allmän form är $ay + bx + c = 0$ och k-form är $y = kx + m$.

a)

Punkterna $(-1, 2)$ och $(2, 3)$ ger

$$k = \frac{3-2}{2-(-1)} = \frac{1}{3} \implies y = \frac{x}{3} + m \implies 2 = -1/3 + m \implies m = \frac{7}{3} \implies$$

$$\implies y = \frac{x}{3} + \frac{7}{3} \iff 3y = x + 7 \iff 3y - x - 7 = 0.$$

b)

Punkterna $(2, 3)$ och $(-7, 3)$ ger

$$k = \frac{3-3}{-7-2} = 0 \implies y = m \implies 3 = m \implies y = 3 \iff y - 3 = 0.$$

5.6

Låt punkterna betecknas med (x_1, y_1), (x_2, y_2), och (x_3, y_3). Det räcker med att kolla om de ger samma riktningskoefficient, det vill säga om

$$k_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = k_2.$$

a)

$(x_1, y_1) = (-6, 5)$, $(x_2, y_2) = (-2, 2)$, och $(x_3, y_3) = (10, -8)$.

$$k_1 = \frac{2-5}{-2-(-6)} = -\frac{3}{4},$$

$$k_2 = \frac{-8-2}{10-(-2)} = -\frac{10}{12} = -\frac{5}{6},$$

eftersom $k_1 \neq k_2$ ligger de inte på samma linje.

b)

$(x_1, y_1) = (-7, -5)$, $(x_2, y_2) = (3, 1)$, och $(x_3, y_3) = (8, 4)$.

$$k_1 = \frac{1-(-5)}{3-(-7)} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5},$$

$$k_2 = \frac{4-1}{8-3} = \frac{3}{5},$$

eftersom $k_1 = k_2$ ligger de på samma linje.

5.7

Sätt $y = y$ i samtliga deluppgifter.

a)

$2x+1 = -3x+11 \iff 5x = 10 \iff x = 2 \implies y = 2\cdot 2+1 = 5 \implies (x,y) = (2,5).$

b)

$$2x - 3 = 5 \iff 2x = 8 \iff x = 4 \implies (x,y) = (4,5).$$

c)

$$x = 4 \implies y = 3x - 2 = 3\cdot 4 - 2 = 10 \implies (x,y) = (4,10).$$

d)

$$5x - 4 = 5x + 6 \iff -4 = 6 \text{ (men det stämmer ju inte).}$$

5.8

Lösning finns redan.

5.9

För att rita kurvorna kan det vara lämpligt att tänka sig att man utgår från $y = x^2$ och sedan translaterar och skalar parabeln tills den blir på rätt form. Alltså om man har

$$y = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c = a\big(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\big) + c =$$

$$= a(x + \frac{b}{2a})^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c \iff y - \big(c - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\big) = a(x - \big(-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\big).$$

Alltså är en allmän parabel samma sak som $y = x^2$ skalad med en faktor a och translaterad till punkten $(x_0, y_0) = (c - \left(\frac{b}{2a}\right)^2, -\left(\frac{b}{2a}\right)^2)$.

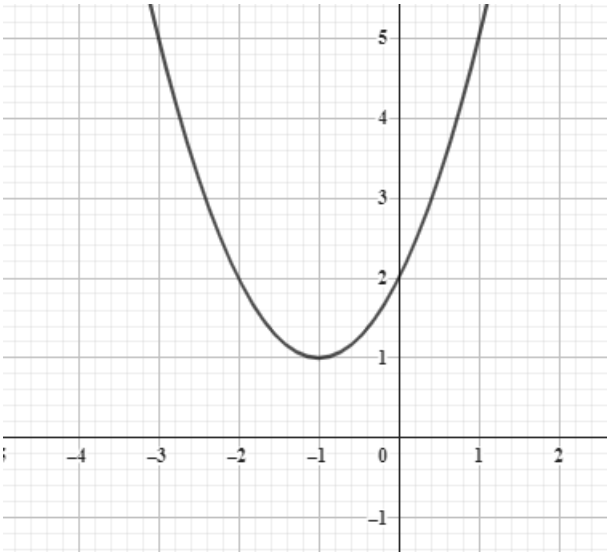
a)

$$x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1 + 1 = (x+1)^2 + 1,$$

vilket visar att minimipunkten är då $x + 1 = 0 \implies (x,y) = (-1,1)$.

$$x^2 + 2x + 2 = 0 \iff (x+1)^2 + 1 = 0 \text{ (inga reella lösningar).}$$

Eftersom det minsta värdet som $x^2 + 2x + 2$ antar är 1, så är olikheten uppfylld för alla reella x.



b)

$$x^2 - x = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4},$$

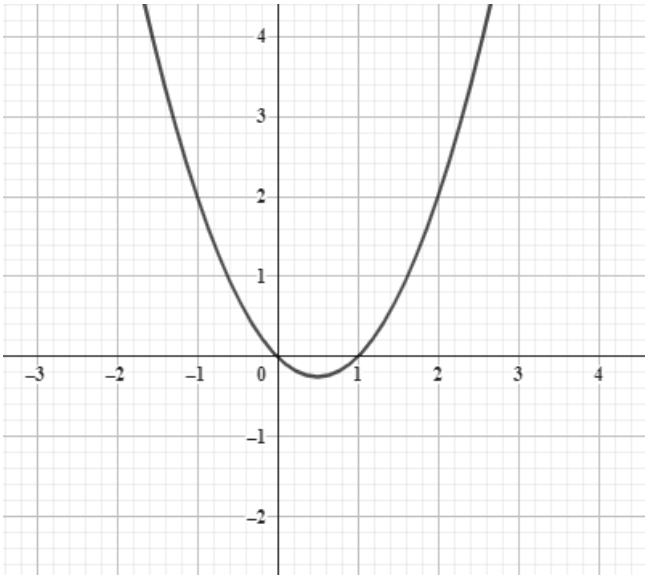
minimipunkten ges återigen av att $x + \frac{1}{2} = 0$, vilket ger $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$. Vidare blir

$$x^2 - x = 0 \iff x(x-1) = 0 \iff \begin{cases} x = 0, \\ x = 1. \end{cases}$$

För att lösa olikheten $x^2 - x$ kan man antingen faktorisera och använda en teckentabell, eller resonera utifrån kvadratkompletteringen.

$$x^2 - x \geq 0 \iff (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \geq 0 \iff (x - \frac{1}{2})^2 \geq \frac{1}{4} \iff$$

$$\iff x - \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \text{ eller } x - \frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2} \iff x \geq 1 \text{ eller } x \leq 0.$$



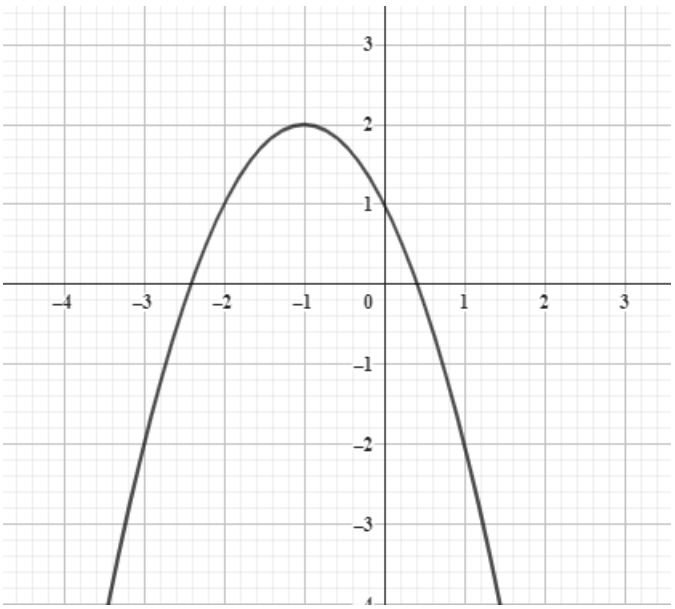
c)

$1-2x-x^2 = -(x^2+2x)+1 = -(x^2+2x+1-1)+1 = -((x+1)^2-1)+1 = 2-(x+1)^2.$

Parabeln har inget minsta värde, eftersom den kvadratiska termen är negativ, så y-koordinaten går mot $-\infty$, men den har en maximipunkt då $x+1=0 \implies y=2$.

$$1-2x-x^2=0 \iff (x+1)^2=2 \iff x=-1\pm\sqrt{2}.$$

$$1-2x-x^2 \geq 0 \iff 2-(x+1)^2 \geq 0 \iff (x+1)^2 \leq 2 \iff$$
$$\iff -\sqrt{2} \leq x+1 \leq \sqrt{2} \iff -1-\sqrt{2} \leq x \leq -1+\sqrt{2}.$$



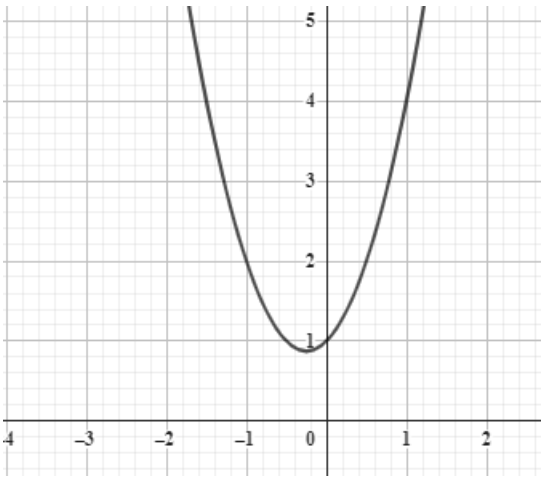
d)

$$2x^2+x+1 = 2(x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}) = 2\big(x^2+2x\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{2}\big) = 2((x+\frac{1}{4})^2-\frac{1}{16})+1 =$$
$$= 2(x+\frac{1}{4})^2-\frac{1}{8}+\frac{8}{8} = 2(x+\frac{1}{4})^2+\frac{7}{8},$$

ytterligare en gång ser vi att minimipunkten är $(-\frac{1}{4}, \frac{7}{8})$.

$$2x^2+x+1=0 \iff 2(x+\frac{1}{4})^2+\frac{7}{8}=0 \text{ (saknar reella lösningar).}$$

Vidare är olikheten $2x^2+x+1 \geq 0$ uppfylld för alla reella x eftersom parabelns minsta värde är $\frac{7}{8}$.



5.10

$$y-x^2-4x=0 \iff y=x^2+4x+4-4=(x+2)^2-4 \geq -4, \text{ likhet} \iff$$
$$\iff x+2=0 \implies (x,y)=(-2,-4).$$

5.11

Insättning av punkterna $(-1,6)$ och $(2,3)$ i $y=x^2+ax+b \implies$

$$\implies \begin{cases} 6=(-1)^2+a\cdot(-1)+b, \\ 3=2^2+a\cdot 2+b \end{cases} \iff \begin{cases} b-a=5, \\ b+2a=-1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} b-a=5 \iff b=5+a, \\ 3a=-6 \iff a=-2 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-2, \\ b=3. \end{cases}$$

5.12

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

a)

Inses lätt.

b)

Inses lätt.

c)

Inses lätt.

d)

Kvadreringen utförs först.

e)

$x^2 \geq 0,\ x \in \mathbb{R}$, vilket betyder att uttrycket alltid är positivt. Vidare tar kvadratroten ut kvadraten, men uttrycket förblir ändå postivt!

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

f)

Om man byter ut x med $-x$ i e) blir resultatet samma sak eftersom

$$\sqrt{(-x)^2} = \sqrt{(-1)^2 x^2} = \sqrt{x^2} = |x|.$$

5.13

Om man har en ekvation på formen $|ax + b| = c$ har två lösningar om $c > 0$, en om $c = 0$, och inga om $c < 0$. Man kan hitta eventuella lösningar när man bara har ett absolutbelopp genom att ta bort det och sätt $\pm$ på ena sidan om likheten.

a)

$$|x| = 4 \iff x = \pm 4.$$

b)

$$|x| = 0 \iff x = \pm 0 = 0.$$

c)

Saknar lösningar eftersom $|x| \geq 0$.

d)

$$|x - 2| = 4 \iff x - 2 = \pm 4 \iff \begin{cases} x = -2, \\ x = 6. \end{cases}$$

e)

$$|x+4| = 3 \iff x+4 = \pm 3 \iff \begin{cases} x = -7, \\ x = -1. \end{cases}$$

f)

$$|2x+1| = 1 \iff 2x+1 = \pm 1 \iff \begin{cases} x = -1, \\ x = 0. \end{cases}$$

g)

$$|1-x| = 1 \iff 1-x = \pm 1 \iff \begin{cases} x = 0, \\ x = 2. \end{cases}$$

5.14

a)

Eftersom

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$$

behöver man kontrollera att $\sqrt{x^2}$ uppfyller samma sak. $x \geq 0 \implies x^2 \geq 0 \implies \sqrt{x^2} = x$ och $x < 0 \implies x = -t,\ t > 0 \implies \sqrt{x^2} = \sqrt{(-t)^2} = \sqrt{t^2} = t = -x$ (lite handviftande, men poängen förmedlas). $\square$

b)

$$\sqrt{(x-1)^2} = |x-1| = 3 \iff x-1 = \pm 3 \iff \begin{cases} x = -2, \\ x = 4. \end{cases}$$

5.15

Om man har en olikhet med ett absolutbelopp (det är viktigt att det bara är ett absolutbelopp) kan man fortfarande använda genvägen att bara sätta $\pm$, men man får vara lite försiktig eftersom olikheten som är kopplad till $-$ kommer att byta tecken, vilket man inser lättare om man sätter $\pm$ på absolutbeloppets sida först.

a)

$$|x| = 3 \iff x = \pm 3.$$

b)

$$|x| < 3 \iff \pm x < 3 \iff -3 < x < 3.$$

c)

$$|x| \geq 3 \iff \pm x \geq 3 \iff x \leq -3 \text{ eller } x \geq 3.$$

d)

$$|x-1| = 3 \iff x-1 = \pm 3 \iff \begin{cases} x = -2, \\ x = 4. \end{cases}$$

e)

$$|x-1| < 3 \iff \pm(x-1) < 3 \iff -3 < x-1 < 3 \iff -2 < x < 4.$$

f)

$|x-1| \geq 3 \iff \pm(x-1) \geq 3 \iff x-1 \leq -3$ eller $x-1 \geq 3 \iff x \leq -2$ eller $x \geq 4$.

5.16

Lös olikheterna och sedan markera på tallinjen.

a)

$$|x| \leq 1 \iff \pm x \leq 1 \iff -1 \leq x \leq 1.$$

b)

$$|x| \geq 2 \iff \pm x \geq 2 \iff x \leq -2 \text{ eller } x \geq 2.$$

c)

$$|x-1| < 2 \iff \pm(x-1) < 2 \iff -2 < x-1 < 2 \iff -1 < x < 3.$$

d)

$$|x+2| < 1 \iff \pm(x+2) < 1 \iff -1 < x+2 < 1 \iff -3 < x < -1.$$

5.17

Dela upp ekvationerna i två fall baserat på när uttrycken i absolutbeloppen byter tecken.

a)

$$x-3 < 0 \iff x < 3 \implies$$

<u>Fall 1</u>: $(x < 3 \implies |x-3| = -(x-3))$

$$-(x-3) = 1-2x \iff -x+3 = 1-2x \iff x = -2 < 3 \text{ (giltig lösning).}$$

<u>Fall 2</u>: $(x \geq 3 \implies |x-3| = x-3)$

$$x-3 = 1-2x \iff 3x = 4 \iff x = \frac{4}{3} \ngeq 3 \text{ (falsk lösning).}$$

b)

$$x - 2 < 0 \iff x < 2 \implies$$

<u>Fall 1</u>: $(x < 2 \implies |x - 2| = -(x - 2))$

$$-(x - 2) = x + 1 \iff 2x = 1 \iff x = \frac{1}{2} < 2 \text{ (giltig lösning).}$$

<u>Fall 2</u>: $(x \geq 2 \implies |x - 2| = x - 2)$

$$x - 2 = x + 1 \iff 0 = 3 \text{ (falsk lösning).}$$

c)

$$2x + 1 < 0 \iff x < -\frac{1}{2} \implies$$

<u>Fall 1</u>: $(x < -\frac{1}{2} \implies |2x + 1| = -(2x + 1))$

$$-(2x + 1) = x - 1 \iff 3x = 0 \iff x = 0 \not< -\frac{1}{2} \text{ (falsk lösning).}$$

<u>Fall 2</u>: $(x \geq -\frac{1}{2} \implies |2x + 1| = 2x + 1)$

$$2x + 1 = x - 1 \iff x = -2 \not\geq -\frac{1}{2} \text{ (falsk lösning),}$$

eftersom båda lösningarna är falska saknas lösning.

5.18

a)

<u>Fall 1</u>: $(x < 0 \implies |x| = -x)$

$$-x - x = 2 \iff -2x = 2 \iff x = -1 < 0 \text{ (giltig lösning).}$$

<u>Fall 2</u>: $(x \geq 0 \implies |x| = x)$

$$x - x = 2 \iff 0 = 2 \text{ (falsk lösning).}$$

b)

<u>Fall 1</u>: $(x < 0 \implies |x| = -x)$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \iff \begin{cases} x = -1 < 0 \text{ (giltig lösning),} \\ x = 3 \not< 0 \text{ (falsk lösning).} \end{cases}$$

<u>Fall 2</u>: $(x \geq 0 \implies |x| = x)$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \iff \begin{cases} x = -3 \not\geq 0 \text{ (falsk lösning),} \\ x = 1 \geq 0 \text{ (giltig lösning).} \end{cases} .$$

c)

$$x+1<0 \iff x<-1 \implies$$

<u>Fall 1</u>: $(x<-1 \implies |x+1| = -(x+1))$

$$x^2-2(x+1)-1=0 \iff x^2-2x-3 \iff \begin{cases} x=-1 \not< -1 \text{ (falsk lösning)}, \\ x=3 \not< -1 \text{ (falsk lösning)}, \end{cases}$$

att $x=-1$ betraktas som en falsk lösning här kan verka konstigt, men intervallet vi betraktar har en sträng olikhet och alltså tillhör inte lösningen intervallet. Det råkar vara så att $x=-1$ är en lösning, men den dyker upp i nästa fall och jag tror att det kan förekomma gånger när något som ligger precis på gränsen inte är lösning - det bör dock tas med en nypa salt.

<u>Fall 2</u>: $(x \geq -1 \implies |x+1| = x+1)$

$$x^2+2(x+1)-1=0 \iff x^2+2x+1=0 \iff (x+1)^2=0 \iff$$

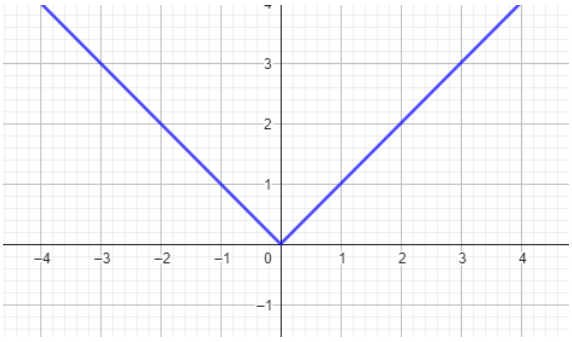
$$\iff x=-1 \geq -1 \text{ (giltig lösning)}.$$

5.19

Dela upp kurvorna i två stycken som är definierade på två intervall. Detta ger två räta linjer som man sedan enkelt kan rita.

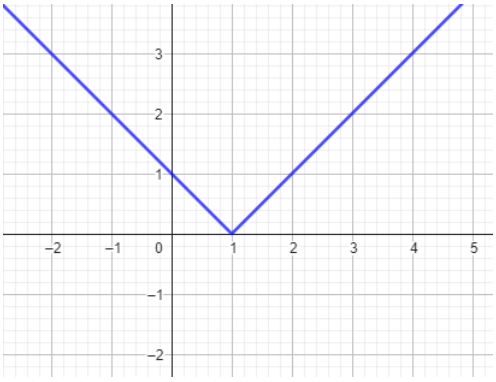
a)

$$y=|x| \iff y=\begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$$



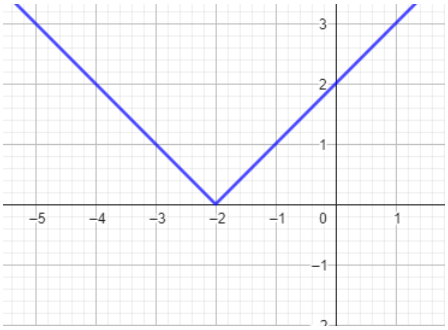
b)

$$y=|x-1| \iff y=\begin{cases} x-1, & x-1 \geq 0, \\ -(x-1), & x-1<0 \end{cases} \iff \begin{cases} x-1, & x \geq 1, \\ -x+1, & x<1. \end{cases}$$



c)

$$y = |x+2| \iff y = \begin{cases} x+2, & x+2 \geq 0, \\ -(x+2), & x+2 < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2, & x \geq -2, \\ -x-2, & x < -2. \end{cases}$$



Alternativt hade man kunnat utgå från $y = |x|$ och sedan translatera grafen längs x-axeln för att lösa samtliga deluppgifter ovan.

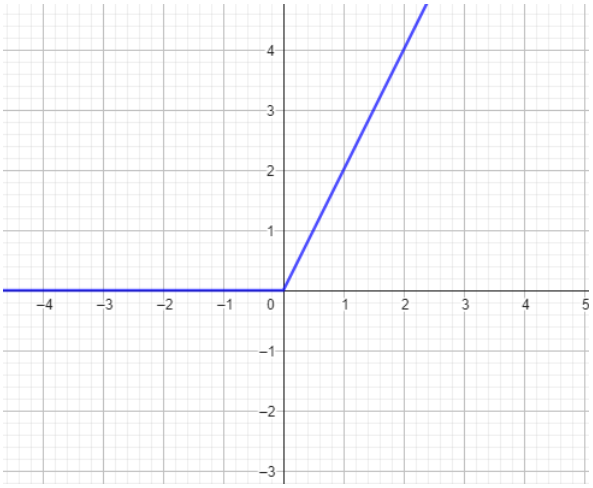
5.20

a)

Lösning finns redan.

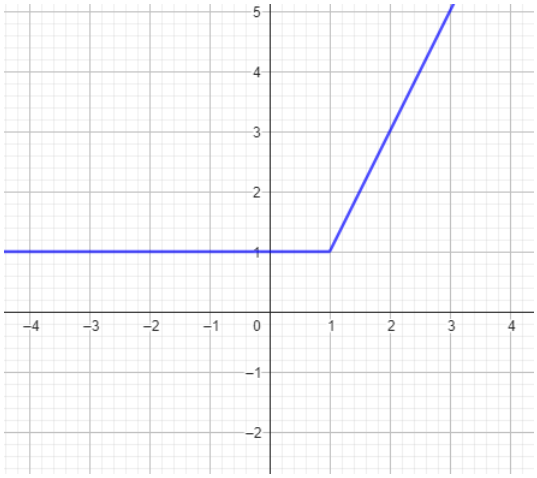
b)

$$y = |x| + x \iff y = \begin{cases} x+x, & x \geq 0, \\ -x+x, & x < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$



c)

$$y = |x-1| + x \iff y = \begin{cases} x-1+x, & x-1 \geq 0, \\ -(x-1)+x, & x-1 < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x-1, & x \geq 1, \\ 1, & x < 1. \end{cases}$$



5.21

Lösning finns redan.

5.22

Det lättaste är att rita funktionen och sedan grafiskt bestämma lösningarna till deluppgifterna.

a)

Se b).

b)

Se c).

c)

Se d).

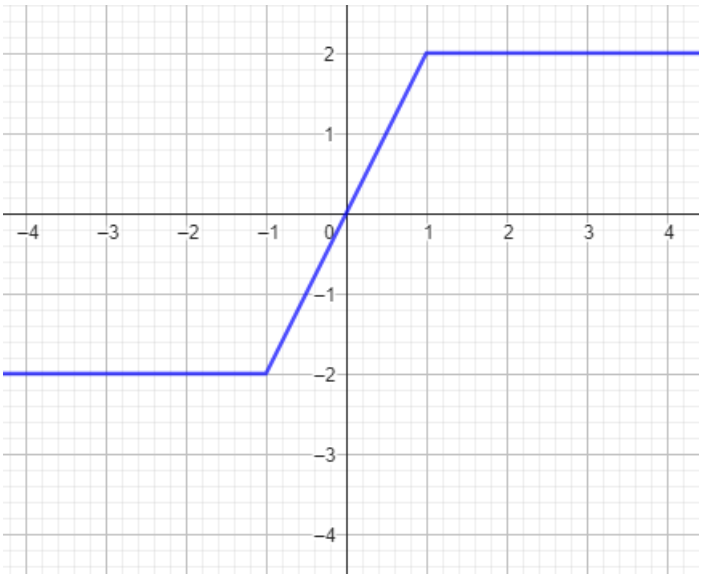
d)

Här är det två absolutbelopp, så funktionen kommer att bestå av tre stycken. $x+1<0 \iff x<-1$ och $x-1<0 \iff x<1$, vilket ger fallen $x<-1$, $-1\leq x<1$, och $x\geq 1$.

$$y=f(x)=|x+1|-|x-1| \iff y=\begin{cases}(x+1)-(x-1), & x\geq 1,\\ (x+1)-(-(x-1)), & -1\leq x<1,\\ -(x+1)-(-(x-1)), & x<-1\end{cases} \iff$$

$$\iff y=\begin{cases}2, & x\geq 1,\\ 2x, & -1\leq x<1,\\ -2, & x<-1.\end{cases}$$

Grafen nedan visar nu tydligt hur a)-uppgiften har lösningen $x=1/2$ (ekvationen $2x=1$), b)-uppgiften saknar lösning, och c) är uppfylld för alla $x\leq -1$.



5.23

Ekvationerna delas in i tre fall som också sätter krav på eventuella lösningar som dyker upp.

a)

$$x-1<0 \iff x<1 \text{ och } x-2<0 \iff x<2 \implies$$

<u>Fall 1</u>: ($x<1 \implies |x-1|=-(x-1)$ och $|x-2|=-(x-2)$)

$$|x-1|+|x-2|=-(x-1)-(x-2)=2 \iff -2x+3=2 \iff x=\frac{1}{2}<1 \text{ (giltig lösning).}$$

<u>Fall 2</u>: ($1\leq x<2 \implies |x-1|=x-1$ och $|x-2|=-(x-2)$)

$$|x-1|+|x-2|=x-1-(x-2)=2 \iff 1=2 \text{ (falsk lösning).}$$

<u>Fall 3</u>: ($x\geq 2 \implies |x-1|=x-1$ och $|x-2|=x-2$)

$$|x-1|+|x-2|=x-1+x-2=2 \iff 2x-3=2 \iff x=\frac{5}{2}\geq 2 \text{ (giltig lösning).}$$

b)

Samma fall som i a)-uppgiften.

$$x-1<0 \iff x<1 \text{ och } x-2<0 \iff x<2 \implies$$

<u>Fall 1</u>: ($x<1$)

$$|x-1|+|x-2|=-(x-1)-(x-2)=\frac{1}{2} \iff -2x+3=\frac{1}{2} \iff x=\frac{5}{4}\not<1 \text{ (falsk lösning).}$$

<u>Fall 2</u>: ($1\leq x<2$)

$$|x-1|+|x-2|=x-1-(x-2)=\frac{1}{2} \iff 1=\frac{1}{2} \text{ (falsk lösning).}$$

<u>Fall 3</u>: ($x\geq 2$)

$$|x-1|+|x-2|=x-1+x-2=\frac{1}{2} \iff 2x-3=\frac{1}{2} \iff x=\frac{7}{4}\not\geq 2 \text{ (falsk lösning).}$$

Då alla fall enbart ger falska lösningar saknar ekvationen en lösning.

5.24

Lättast är att rita kurvan $y=|x-1|+2|x-2|$ och grafiskt bestämma hur a ska väljas. Det är tre olika intervall som behöver studeras för att rita kurvan, vilka bestäms av när $x-1<0 \iff x<1$ och $x-2<0 \iff x<2$. Detta ger intervallen

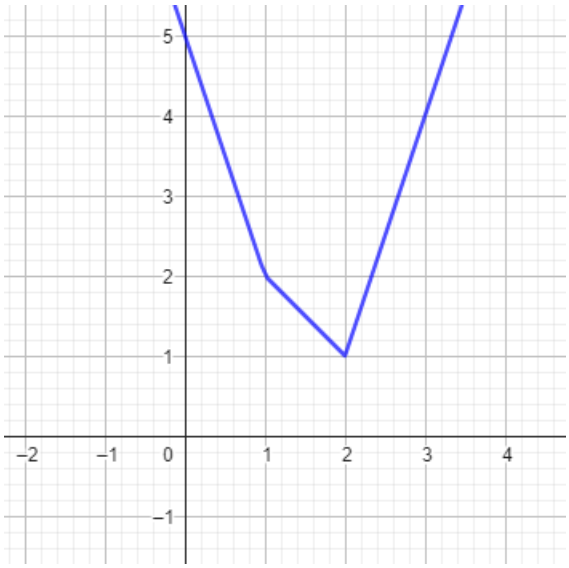
$$x<1 \implies |x-1|=-(x-1) \text{ och } |x-2|=-(x-2),$$

$$1\leq x<2 \implies |x-1|=x-1 \text{ och } |x-2|=-(x-2),$$

$$x\geq 1 \implies |x-1|=x-1 \text{ och } |x-2|=x-2.$$

$$y = |x-1| + 2|x-2| \iff y = \begin{cases} (x-1) + 2(x-2), & x \geq 2, \\ (x-1) - 2(x-2), & 1 \leq x < 2, \\ -(x-1) - 2(x-2), & x < 1 \end{cases} \iff$$

$$\iff y = \begin{cases} 3x - 5, & x \geq 2, \\ -x + 3, & 1 \leq x < 2, \\ -3x + 5, & x < 1. \end{cases}$$

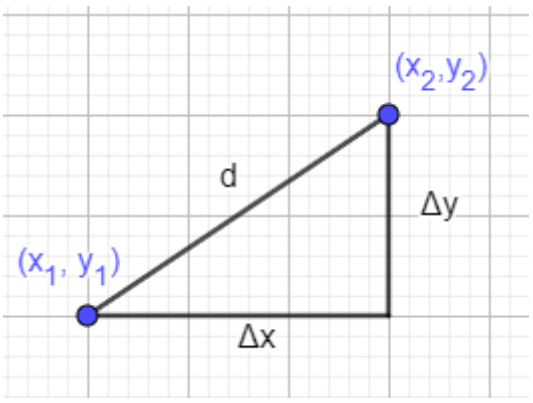


Här ser vi tydligt att $|x-1| + 2|x-2| = a$ har två lösningar om och endast om $a > 1$. Notera att det är en strikt olikhet eftersom det endast finns en lösning om $a = 1$ eftersom kurvan endast antar värdet 1 i en punkt.

5.25

$$\sqrt{a^6 + 2a^4b^2 + a^2b^4} = \sqrt{a^2(a^4 + 2a^2b^2 + b^4)} = \sqrt{a^2}\sqrt{(a^2+b^2)^2} = |a|(a^2+b^2) =$$
$$= [a < 0 \implies |a| = -a] = -a(a^2+b^2).$$

5.26



Enkel aritmetik ger att $\Delta x = x_2 - x_1$ och $\Delta y = y_2 - y_1$. Om man kombinerar detta med Pythagoras sats får man att

$$d^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \implies d = {}^{+}_{(-)}\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

den negativa roten ignoreras eftersom sträckan d är positiv. $\square$

5.27

Lösning finns redan.

5.28

$$x^2 - ax + y^2 + 2y = a \iff x^2 - 2\frac{a}{2}x + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + 2y + 1 - 1 = a \iff$$

$$\iff (x - \frac{a}{2})^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (y+1)^2 - 1 = a \iff (x - \frac{a}{2})^2 + (y+1)^2 = \frac{a^2}{4} + a + 1.$$

Ur detta avläser vi att radien i kvadrat är

$$r^2 = \frac{a^2}{4} + a + 1 = 2^2 \iff a^2 + 4a + 4 = 4 \cdot 4 \iff a^2 + 4a - 12 = 0 \iff \begin{cases} a = -6, \\ a = 2. \end{cases}$$

5.29

Om en ekvationen för en ellips är på formen

$$\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 = 1,$$

ges halvaxlarna av a samt b och medelpunkten är (x_0, y_0).

a)

$$2x^2 + (y-1)^2 = \frac{x^2}{1/2} + \frac{(y-1)^2}{1^2} = \frac{(x-0)^2}{(1/\sqrt{2})^2} + \frac{(y-1)^2}{1^2} = 1.$$

Härur avläses halvaxlarna $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ samt $b = 1$ och medelpunkten $(x_0, y_0) = (0, 1)$.

b)

$$2x^2 + y^2 - 8x + 2y + 5 = 2(x^2 - 4x) + y^2 + 2y + 5 =$$
$$= 2(x^2 - 4x + 4 - 4) + y^2 + 2y + 1 - 1 + 5 = 2((x-2)^2 - 4) + (y+1)^2 + 4 =$$
$$= 2(x-2)^2 + (y+1)^2 - 4 = 0 \iff 2(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4 \iff$$
$$\iff \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1 \iff \frac{(x-2)^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{(y+1)^2}{2^2} = 1.$$

Härur avläses halvaxlarna $a = \sqrt{2}$ samt $b = 2$ och medelpunkten $(x_0, y_0) = (2, -1)$.

5.30

$y^2+2y-4x^2 = y^2+2y+1-1-4x^2 = (y+1)^2-4x^2-1 = 0 \iff (y+1)^2-4(x-0)^2 = 1.$

Medelpunkt: $(0, -1)$. För att bestämma asymptoterna sätts högerledet till noll, och skärningen med aktuell koordinatxel ges av att sätta antingen $x = 0$ eller $y = 0$. I fallet ovan finns inga lösningar om $y = 0$ eftersom det är ett minustecken framför x^2. Skärningspunkterna ges alltså av

$$(y+1)^2 - 4 \cdot 0^2 = 1 \iff y + 1 = \pm 1 \iff \begin{cases} y = -2, \\ y = 0. \end{cases}$$

Vidare får vi asymptoterna

$$(y+1)^2 - 4x^2 = 0 \implies y + 1 = \pm\sqrt{4x^2} \implies y = -1 \pm 2x.$$

5.31

a)

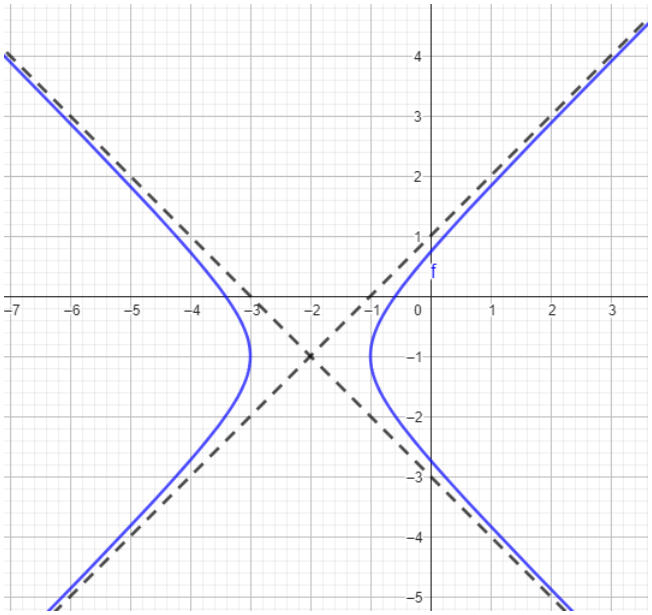
$$x^2 - y^2 + 4x - 2y = -2 \iff (x^2 + 4x + 4) - 4 - ((y^2 + 2y + 1) - 1) = -2 \iff$$
$$\iff (x+2)^2 - (y+1)^2 = 1.$$

Detta är ekvationen för en hyperbel med medelpunkten $(-2, -1)$, dess skärningar med x-axeln ges av att $y = 0$,

$$(x+2)^2 - (0+1)^2 = 1 \iff x + 2 = \pm 1 \iff \begin{cases} x = -3, \\ x = -1. \end{cases}$$

Asymptoterna fås då högerledet är lika med noll,

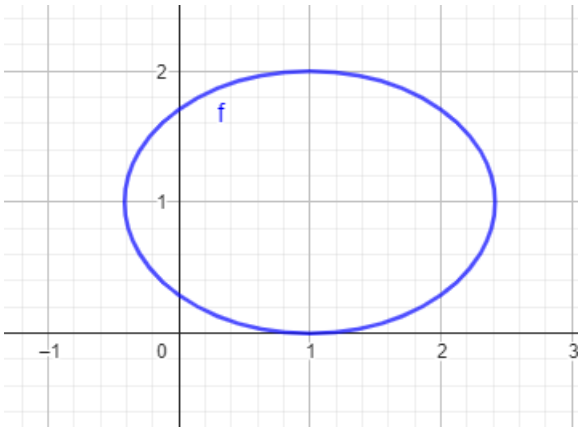
$$(x+2)^2 - (y+1)^2 = 0 \implies y + 1 = \pm(x+2) \implies \begin{cases} y = x + 1, \\ y = -x - 3. \end{cases}$$



b)

$$x^2 + 2y^2 - 2x - 4y = -1 \iff (x^2 - 2x + 1) - 1 + 2(y^2 - 2y) = -1 \iff$$
$$\iff (x-1)^2 + 2((y^2 - 2y + 1) - 1) = 0 \iff (x-1)^2 + 2(y-1)^2 = 2 \iff$$
$$\iff \frac{(x-1)^2}{2} + (y-1)^2 = 1,$$

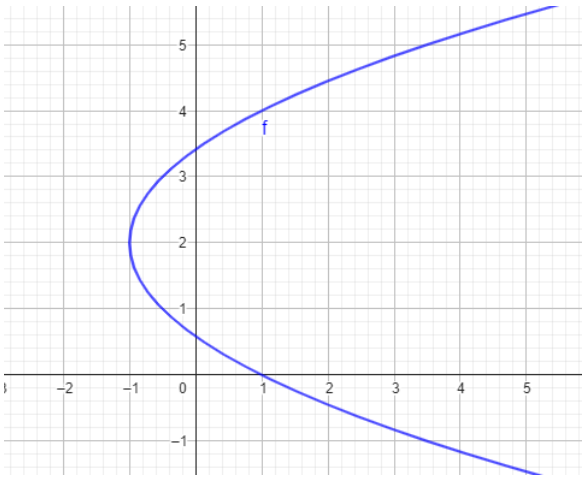
vilket beskriver en ellips med halvaxeln $\sqrt{2}$ i x-led och 1 i y-led, samt medelpunkten $(1, 1)$.



c)

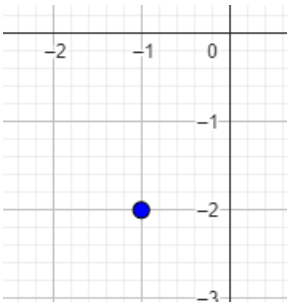
$$y^2 - 2x - 4y + 2 = 0 \iff 2x = y^2 - 4y + 2 = (y^2 - 4y + 4) - 4 + 2 = (y-2)^2 - 2 \iff$$
$$\iff x + 1 = \frac{1}{2}(y-2)^2.$$

Detta beskriver en parabel med minimipunkt (för x) $(-1, 2)$, fast i y istället för x, men det är samma sak bara att man behöver vända på den när man ritar.



d)

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y + 5 = 0 \iff (x^2 + 2x + 1) - 1 + (y^2 + 4y + 4) - 4 + 5 = 0 \iff$$
$$\iff (x+1)^2 + (y+2)^2 = 0 \iff (x, y) = (-1, -2).$$



5.32

Lösning finns redan.

5.33

Räta linjens ekvation på punktform $y - y_1 = k(x - x_1)$, där $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ och $(x_1, y_1) = (-1, 1)$ samt $(x_2, y_2) = (2, 4)$. Alltså är

$$k = \frac{4-1}{2-(-1)} = 1 \implies y - 1 = 1 \cdot (x - (-1)) \iff y = x + 2.$$

För att hitta skärningen är det bara att sätta in $y = x + 2$ i hyperbelns ekvation:

$$3x^2 - 2y^2 + 6x + 4y = 3 \iff 3x^2 - 2(x+2)^2 + 6x + 4(x+2) = 3 \iff$$

$$\iff 3x^2 - 2(x^2 + 4x + 4) + 6x + 4x + 8 = 3 \iff x^2 + 2x - 3 = 0 \iff \begin{cases} x = -3, \\ x = 1. \end{cases}$$

Tillsammans med att $y = x + 2$ får vi skärningspunkterna $(-3, -1)$ och $(1, 3)$.

Kapitel 6

6.1

Inses lätt.

6.2

Inses lätt.

6.3

Förutsatt att $z = x+iy$ inses dessa uppgifter lätt om man använder att $\overline{z} = \overline{x+iy} = x-iy$ och att $|z| = |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$.

6.4

a)

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{|1+i|^2} = \frac{1-i}{1^2+1^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

b)

$$\frac{1}{3-4i} = \frac{3+4i}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{3+4i}{3^2+4^2} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}i.$$

c)

a)-uppgiften ger att

$$\frac{3-4i}{1+i} = (3-4i)(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i) = \frac{1}{2}(3-3i-4i+4i^2) = -\frac{1}{2} - \frac{7}{2}i.$$

d)

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{(1-i)^2}{|1+i|^2} = \frac{1-2i+i^2}{1^2+1^2} = \frac{1-2i-1}{2} = -i.$$

e)

$$(1+i)^{-2} = \frac{1}{(1+i)^2} = \frac{1}{1+2i+i^2} = \frac{1}{2i} = \frac{i}{2i^2} = -\frac{1}{2}i.$$

f)

$$\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i.$$

6.5

Lösning finns redan.

6.6

$$\left|\frac{(1+2i)(7+\sqrt{3}i)^2}{(5+i)^2}\right| = \frac{|1+2i||7+\sqrt{3}i|^2}{|5+i|^2} = \frac{\sqrt{1^2+2^2}(7^2+(\sqrt{3})^2)}{5^2+1^2} = \frac{\sqrt{5}\cdot 52}{26} = 2\sqrt{5}.$$

6.7

Lösning finns redan.

6.8

Ansätt z på rektangulär form och dela sedan upp leden i real- och imaginärdel, vilket ger två ekvationer som man kan använda för att bestämma z:s real- och imaginärdel.

a)

$$3z - i\overline{z} = 7 - 5i \iff [z = x+iy] \iff 3(x+iy) - i(\overline{x+iy}) = 3x + 3iy - i(x-iy) =$$

$$= 3x + 3iy - ix + i^2y = 3x - y + i(-x+3y) = 7 - 5i \implies \begin{cases} 3x - y = 7, \\ -x + 3y = -5 \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{cases} 3x - y = 7, \\ -3x + 9y = -15 \end{cases} \implies \begin{cases} 3x - y = 7, \\ 8y = -8 \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{cases} x = (7+y)/3 = (7-1)/3 = 2, \\ y = -1 \end{cases} \implies z = x + iy = 2 - i.$$

b)

$$z \cdot 2\overline{z} = 1 + i \iff [z\overline{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}] \iff 2|z|^2 = 1 + i \notin \mathbb{R} \implies \text{lösning saknas.}$$

6.9

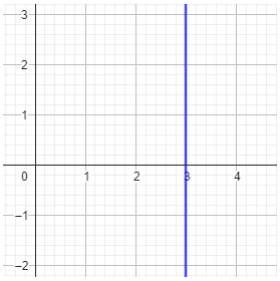
Lösning finns redan.

6.10

Låt $z = x + iy$ i samtliga deluppgifter.

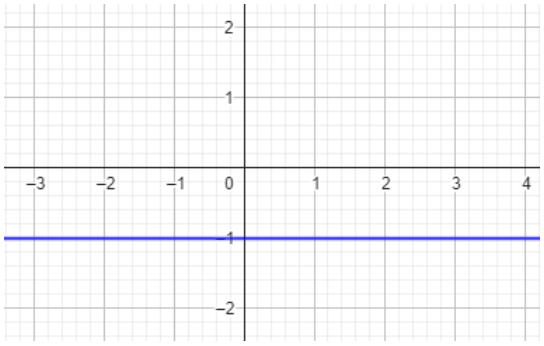
a)

$$\text{Re } z = 3 \iff \text{Re}(x+iy) = 3 \iff x = 3.$$



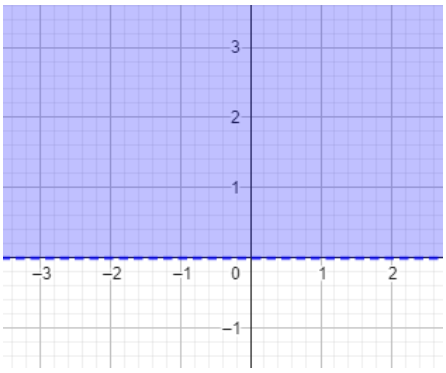
b)

$$\operatorname{Im} z = -1 \iff \operatorname{Im}(x+iy) = -1 \iff y = -1.$$



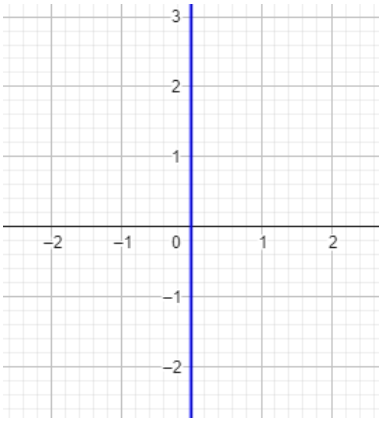
c)

$$\operatorname{Im} z > 0 \iff \operatorname{Im}(x+iy) > 0 \iff y > 0.$$



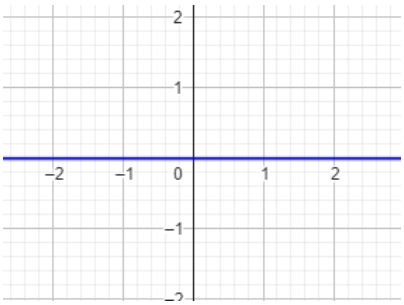
d)

$$z + \overline{z} = 0 \iff x + iy + \overline{x+iy} = x + iy + x - iy = 2x = 0 \iff x = 0.$$



e)

$$z = \overline{z} \iff x + iy = x - iy \iff 2iy = 0 \iff y = 0.$$



6.11

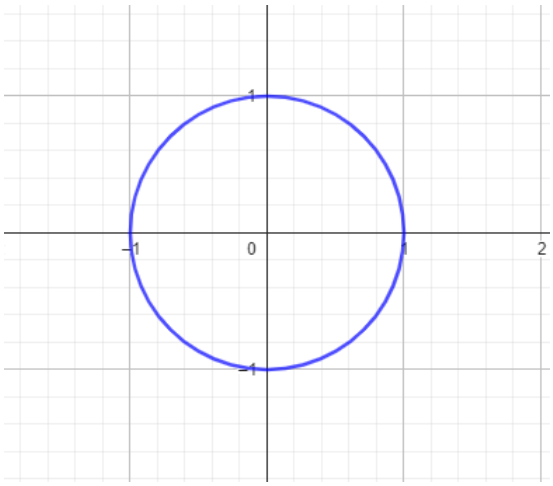
Lösning finns redan.

6.12

Det blir en massa cirklar, cirkelskivor, och cirkelskivor med cirkelskivade hål i sig, det är alltså samma princip som i 6.11. Låt $z = x + iy$ i samtliga deluppgifter.

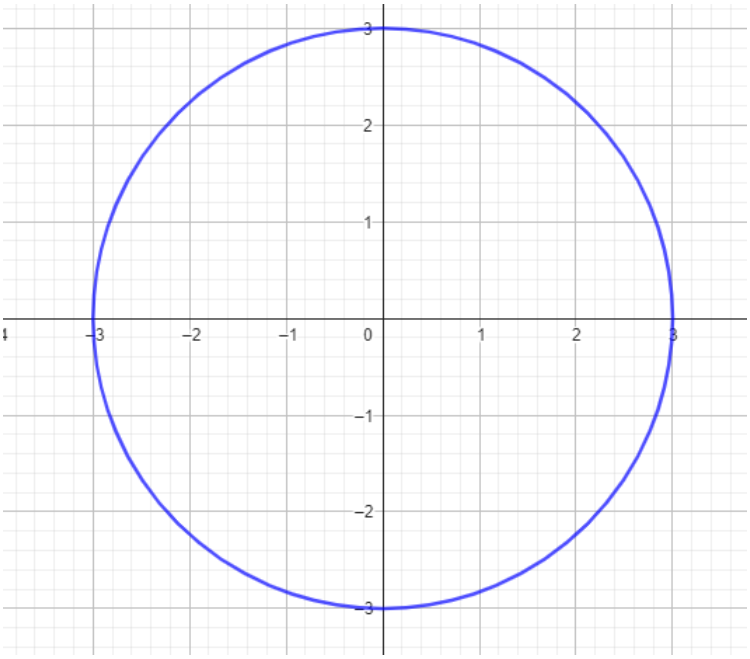
a)

$$|z| = 1 \iff \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \iff x^2 + y^2 = 1.$$



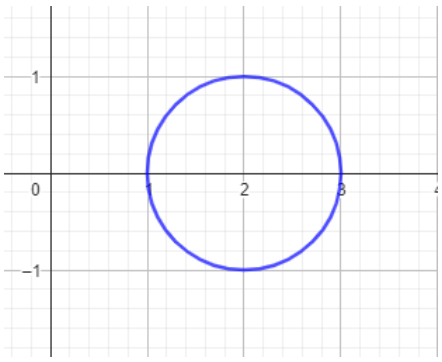
b)

$$|z| = 3 \iff \sqrt{x^2 + y^2} = 3 \iff x^2 + y^2 = 3^2.$$



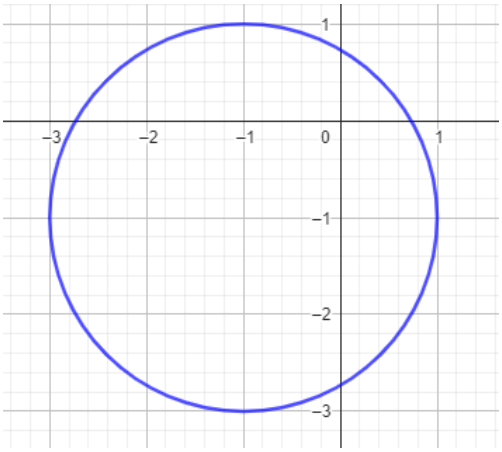
c)

$$|z-2| = 1 \iff |(x-2)+iy| = 1 \iff \sqrt{(x-2)^2+y^2} = 1 \iff (x-2)^2+y^2 = 1.$$



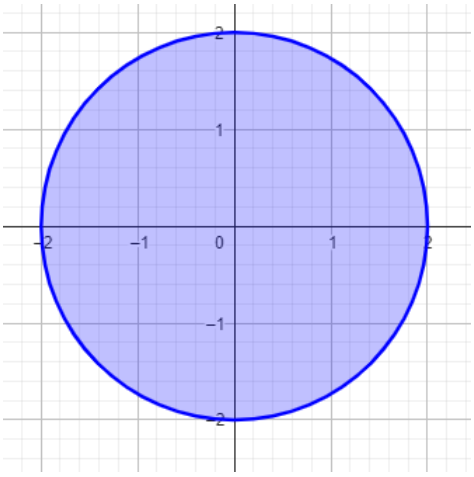
d)

$$|z+1+i| = 1 \iff |(x+1)+i(y+1)| = 2 \iff \sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2} = 2 \iff$$
$$\iff (x+1)^2+(y+1)^2 = 2^2.$$



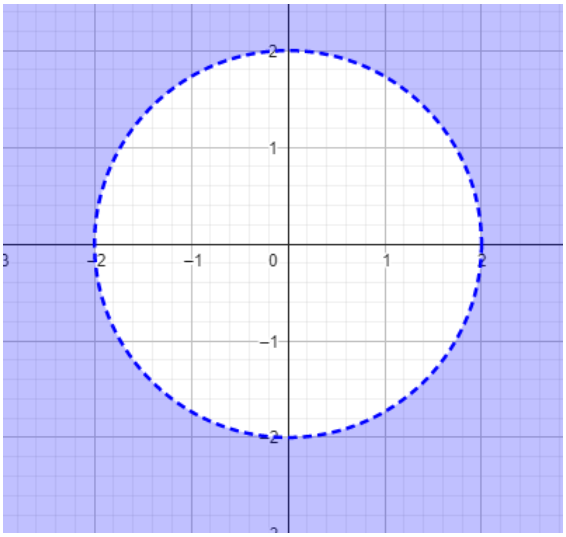
e)

$$|z| \leq 2 \iff \sqrt{x^2+y^2} \leq 2 \iff x^2+y^2 \leq 2^2.$$



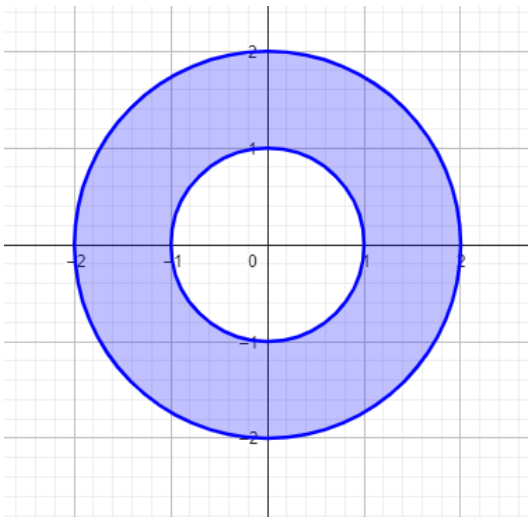
f)

$$|z| > 2 \iff \sqrt{x^2+y^2} > 2 \iff x^2+y^2 > 2^2.$$



g)

$$1 \leq |z+1| \leq 2 \iff 1 \leq |(x+1)+iy| \leq 2 \iff 1 \leq \sqrt{(x+1)^2+y^2} \leq 2 \iff$$
$$\iff 1^2 \leq (x+1)^2+y^2 \leq 2^2.$$



6.13

Med $z = x + iy$ får man att

$$\begin{cases} |z-3i| = 2, \\ z+\overline{z} = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} |x+i(y-3)|^2 = 4, \\ x+iy+x-iy = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x^2+(y-3)^2 = 4, \\ 2x = 2 \implies x = 1 \end{cases} \implies$$
$$\implies 1^2+(y-3)^2 = 4 \implies y-3 = \pm\sqrt{3} \implies y = 3 \pm \sqrt{3} \implies$$
$$\implies z = x+iy = 1+i(3\pm\sqrt{3}).$$

6.14

Lösning finns redan.

6.15

Lösning finns redan.

6.16

$$\left|\frac{1}{z}-\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{4} \implies \left|\frac{4-z}{4z}\right|=\frac{|4-z|}{|4z|}=\frac{|z-4|}{4|z|}=\frac{1}{4} \implies |z-4|^2=|z|^2 \implies$$
$$\implies [z=x+iy] \implies |(x-4)+iy|^2=|x+iy|^2 \implies (x-4)^2+y^2=x^2+y^2 \implies$$
$$\implies x^2-8x+16=x^2 \implies 8x=16 \implies x=2,$$

vi har inget villkor på y, utan imaginärdelen kan väljas fritt.

$$z=x+iy=2+iy,\ y\in\mathbb{R}.$$

6.17

Ett tal är reellt om och endast om dess imaginärdel är noll. Dessutom vet vi att $z\neq 0$ eftersom vi då delar på 0.

$$z+\frac{1}{z}=z+\frac{\overline{z}}{z\overline{z}}=z+\frac{\overline{z}}{|z|^2}=[z=x+iy]=x+iy+\frac{x-iy}{x^2+y^2}=$$
$$=x+\frac{x}{x^2+y^2}+i\left(y-\frac{y}{x^2+y^2}\right) \implies y-\frac{y}{x^2+y^2}=0 \implies y\left(1-\frac{1}{x^2+y^2}\right)=0 \implies$$
$$\implies \begin{cases} y=0, \\ 1-\dfrac{1}{x^2+y^2}=0 \end{cases} \implies \begin{cases} y=0, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

Att $y=0$ betyder att alla tal, utom $z=0$, på den reella axeln uppfyller kravet (ganska uppenbart) och dessutom uppfyller alla $z=x+iy$ där $x^2+y^2=1$ kravet, vilket är enhetscirkeln.

6.18

Inses lätt.

6.19

Inses lätt.

6.20

Inses lätt med trigonometriska ettan.

6.21

Inses lätt med Eulers formel och trigonometriska ettan.

6.22

Vid multiplikation av två komplexa tal adderas deras argument, och vid subtraktion subtraheras nämnarens argument från täljarens.

a)

$$\arg zw = \arg z + \arg w = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}.$$

b)

$$\arg z/w = \arg z - \arg w = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.$$

c)

Nej, vilket kanske lättast inses om man tänker på addition och subtraktion av komplexa tal som för vektorer, där det inte finns något samband för vilken riktning vektorerna pekar efter man har lagt ihop dem.

6.23

$$\arg z^{2000} = 2000 \arg z = 2000\frac{\pi}{3} = \frac{1998\pi + 2\pi}{3} = 666\pi + \frac{2\pi}{3} = 333 \cdot 2\pi + \frac{2\pi}{3} \implies$$

$$\implies \arg z^{2000} = \frac{2\pi}{3}.$$

6.24

Lösning finns redan.

6.25

$$\arg \frac{(2+2i)(1+i\sqrt{3})}{3i(\sqrt{12}-2i)} = \arg \frac{2(1+i)(1+i\sqrt{3})}{2 \cdot 3i(\sqrt{3}-i)} =$$

$$= \arg(1+i) + \arg(1+i\sqrt{3}) - \arg 3i - \arg(\sqrt{3}-i).$$

Alla dessa komplexa tal, utom möjligen $3i$, ligger i fjärde och första kvadranten, så man kan använda arctan formeln direkt utan att begrunda situationen ytterligare. $3i$ är dock ett rent imaginärt tal med positiv imaginärdel, vilket betyder att dess argument är $\pi/2$. Vidare måste man använda inkluderar alla heltalsmultiplar av 2π.

$$z = x + iy,\ x > 0 \implies \arg z = \arctan \frac{y}{x} \implies$$

$$\arg \frac{(2+2i)(1+i\sqrt{3})}{3i(\sqrt{12}-2i)} = \arctan \frac{1}{1} + \arctan \frac{\sqrt{3}}{1} - \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{-1}{\sqrt{3}} + k2\pi =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + k2\pi = \frac{3\pi + 4\pi - 6\pi + 2\pi}{12} + k2\pi = \frac{3\pi}{12} + k2\pi = \frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

6.26

Det man behöver håll koll på är tecknet på realdelen, om $z = x + iy,\ x > 0 \implies \arg z = \arctan \frac{y}{x}$, men om $z = x + iy,\ x < 0 \implies \arg z = \pi - \arctan \frac{y}{-x}$. Det står också bestäm ett argument", så man behöver inte inkludera $k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

a)

$$\arg 1 + 2i\omega = \arctan \frac{2\omega}{1} = \arctan 2\omega.$$

b)

$$\arg -1 + 2i\omega = \pi - \arctan \frac{2\omega}{1} = \pi - \arctan 2\omega.$$

c)

$$\arg \frac{1}{1 + 2i\omega} = \arg 1 - \arg (1 + 2i\omega) = 0 - \arctan \frac{2\omega}{1} = -\arctan 2\omega.$$

d)

$$\arg \frac{1}{-1 + 2i\omega} = \arg 1 - \arg (-1 + 2i\omega) = 0 - (\pi - \arctan \frac{2\omega}{1}) = \arctan 2\omega - \pi.$$

e)

$$\arg \frac{1}{(1 + 2i\omega)^2} = \arg 1 - 2 \arg (1 + 2i\omega) = 0 - 2 \arctan \frac{2\omega}{1} = -2 \arctan 2\omega.$$

f)

$$\arg \frac{e^{i\omega}}{(1 + 2i\omega)^2} = \arg e^{i\omega} - 2 \arg (1 + 2i\omega) = \omega - 2 \arctan \frac{2\omega}{1} = \omega - 2 \arctan 2\omega.$$

6.27

Bestäm ett argument och absolutbelopp för att sedan skriva om talet på polär form, vilket tillåter oss att använda de Moivres formel.

$$z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \implies \arg z = \arctan \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} \text{ och}$$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \implies z = |z|e^{i \arg z} = e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Vidare är

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{100} = z^{100} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{100} = e^{i\frac{100\pi}{3}} = e^{i(\frac{96\pi + 4\pi}{3})} = e^{i(32\pi + \frac{4\pi}{3})} = e^{i(16 \cdot 2\pi + \frac{4\pi}{3})} =$$

$$= e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

6.28

Idéen är att utveckla $(\cos\theta + i\sin\theta)^4$ på två sätt, först med de Moivres formel; sedan med binomialsatsen.

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^4 = [\text{de Moivre}] = \cos 4\theta + i\sin 4\theta \text{ och}$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^4 = [\text{Binomialsatsen}] =$$
$$= \cos^4\theta + 4i\cos^3\theta\sin\theta + 6i^2\cos^2\theta\sin^2\theta + 4i^3\cos\theta\sin^3\theta + i^4\sin^4\theta =$$
$$= \cos^4\theta + \sin^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + i(4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta)$$

Om man lägger ihop det ovan och jämför real- och imaginärdel får man

$$\begin{cases} \cos 4\theta = \cos^4\theta + \sin^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta, \\ \sin 4\theta = 4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta. \end{cases}$$

6.29

Lösning finns redan.

6.30

Eulers formler ger att

$$\sin^4\theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^4 = [\text{Binomialsatsen}] =$$

$$\frac{1}{16i^4}(e^{i4\theta} - 4e^{i3\theta}e^{-i\theta} + 6e^{i2\theta}e^{-i2\theta} - 4e^{i\theta}e^{-i3\theta} + e^{-i4\theta}) =$$
$$= \frac{1}{16}(e^{i4\theta} + e^{i4\theta} - 4(e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}) + 6) = \frac{1}{8}\left(\frac{e^{i4\theta} + e^{i4\theta}}{2} - 4\frac{e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}}{2}\right) + \frac{6}{16} =$$
$$= \frac{1}{8}\cos 4\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{8}.$$

6.31

Att vridas med vinkeln $\pi/2$ är samma sak som att multiplicera med $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, eftersom talet man multiplicerar inte skalas, och argumentet öker med $\pi/2$.

a)

$$1 \cdot i = i.$$

b)

$$(-3 + 2i) \cdot i = -3i + 2i^2 = -2 - 3i.$$

6.32

Att vridas med vinkeln $5\pi/6$ i positiv led och skalas med faktorn 3 motsvaras av multiplikation med talet $e^{i5\pi/6} = 3(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) = 3(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$.

a)

$$1 \cdot (-\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i.$$

b)

$$(-1+i) \cdot (-\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i - \frac{3\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{2}i^2 = \frac{3}{2}(\sqrt{3}-1) - \frac{3}{2}(\sqrt{3}+1).$$

6.33

Vi söker ett tal på formen $z = x + iy$, sådant att

$$2(x+iy) = 7+i \implies \begin{cases} 2x = 7, \\ 2y = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{7}{2}, \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \implies z = \frac{7}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Nu är det alltså bara att multiplicera hörnen med z:

$$0 \cdot (\frac{7}{2} + \frac{1}{2}i) = 0,$$

$$(2+i)(\frac{7}{2} + \frac{1}{2}i) = 7 + i + \frac{7}{2}i + \frac{1}{2}i^2 = \frac{13}{2} + \frac{9}{2}i,$$

$$i(\frac{7}{2} + \frac{1}{2}i) = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2}i.$$

6.34

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

a)

$$e^0 = 1.$$

b)

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i.$$

c)

$$e^{\frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{\pi}{4}} = e^{\ln 2^{1/2}}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i) = 1 + i.$$

d)

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1.$$

e)

$$e^{3-i} = e^3(\cos -1 + i\sin -1) = e^3(\cos 1 - i\sin 1).$$

6.35

Eftersom $x \in \mathbb{R}$ kan vi bara räkna som om $x = 2$, och multiplicera med konjugatet eller vad som nu är lämpligt för att förenkla funktionsuttrycket.

a)

$$f(x) = \frac{1+ix}{1-ix} = \frac{(1+ix)(1+ix)}{(1-ix)(1+ix)} = \frac{(1+ix)^2}{|1-ix|^2} = \frac{1+2ix+i^2x^2}{1^2+(-x)^2} = \frac{1-x^2}{1+x^2} + i\frac{2x}{1+x^2},$$

varur vi avläser real- respektive imaginärdelen till

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} \text{ och } \frac{2x}{1+x^2}.$$

b)

$$g(x) = e^{(-1+i)x} = e^{-x}e^{ix} = e^{-x}(\cos x + i\sin x) \implies$$

$$\begin{aligned} &\text{realdel:} && e^{-x}\cos x, \\ &\text{imaginärdel:} && e^{-x}\sin x. \end{aligned}$$

6.36

$$|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x e^{iy}| = |e^x||e^{iy}| = |e^x| \cdot 1 = e^x,$$

där den sista likheten följer av att $e^x > 0,\ x \in \mathbb{R}$. □

$$\arg e^z = \arg e^x e^{iy} = \arg e^x + \arg e^{iy} = 0 + y + k2\pi = y + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

6.37

Lösning finns redan.

6.38

Det finns några alternativ för hur man ska lösa denna typ av ekvationer. Man kan antingen ansätta en lösning på polär form eftersom det bara finns en z-term, eller så kan man ansätta en lösning på rektangulär form för att sedan jämföra real- och imaginärdel. Om man ansätter en lösning på rektangulär form kan man också få en ytterligare ekvation genom att betrakta absolutbeloppet för vänster- och högerled.

a)

Med $z = x + iy$ får man

$$z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = -i \text{ och } |z^2| = |z|^2 = x^2 + y^2 = |-i| = 1 \implies$$

$$\implies \begin{cases} x^2 - y^2 &= 0, \\ x^2 + y^2 &= 1, \\ 2xy &= -1 \end{cases} \implies \begin{cases} y^2 &= x^2, \\ 2x^2 &= 1, \\ 2xy &= -1 \end{cases} \implies \begin{cases} x &= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ y &= -x = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Den sista ekvationen anger att produkten av x och y är negativ, vilket betyder att de måste ha olika tecken, därav $y = -x$. Sammanställt får man att $z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$.

b)

Samma metod som i a), det vill säga insättning av $z = x + iy$:

$$x^2 - y^2 + 2ixy = 1 + i\sqrt{3} \text{ och } |z^2| = |1 + i\sqrt{3}| \iff x^2 + y^2 = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \implies$$

$$\implies \begin{cases} x^2 - y^2 & = 1, \\ x^2 + y^2 & = 2, \\ 2xy & = \sqrt{3} \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 - y^2 & = 1, \\ 2x^2 & = 3, \\ y & = \frac{\sqrt{3}}{2x} \end{cases} \implies \begin{cases} x & = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}, \\ y & = \frac{\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases} \implies$$

$$z = x + iy = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3} + i) = \pm\frac{1}{2}(\sqrt{6} + i\sqrt{2}).$$

c)

$$x^2 - y^2 + 2ixy = 4i + 3 \text{ och } |z^2| = |4i + 3| \iff x^2 + y^2 = 5 \implies$$

$$\implies \begin{cases} x^2 - y^2 & = 3, \\ x^2 + y^2 & = 5, \\ 2xy & = 4 \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 - y^2 & = 1, \\ 2x^2 & = 8, \\ y & = \frac{2}{x} \end{cases} \implies \begin{cases} x & = \pm 2, \\ y & = \pm 1. \end{cases} \implies$$

$$z = x + iy = \pm(2 + i).$$

6.39

Principen för dessa uppgifter är att kvadratkompletera uttrycken så att man har något på formen $w^2 = a + ib$, som man sedan kan lösa med metoden i ovanstående uppgift. Man kan alltså i allmänhet inte bara använda pq-formeln för att lösa andragradsekvationer med komplexa koefficienter.

a)

$$z^2+2iz-1+2i = z^2+2iz+i^2-i^2-1+2i = (z+i)^2-(-1)-1+2i = (z+i)^2+2i = 0 \iff$$

$$\iff (z+i)^2 = -2i \implies [z+i = w = x+iy] \implies (x+iy)^2 = x^2-y^2+2ixy = -2i \text{ och}$$

$$|w^2| = |-2i| \iff x^2 + y^2 = 2 \implies$$

$$\implies \begin{cases} x^2 - y^2 & = 0, \\ x^2 + y^2 & = 2, \\ 2xy & = -2 \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 - y^2 & = 0, \\ 2x^2 & = 2, \\ y & = -\frac{1}{x} \end{cases} \implies \begin{cases} x & = \pm 1, \\ y & = \mp 1. \end{cases} \implies$$

$$w = z + i = x + iy = \pm(1 - i) \iff \begin{cases} z_1 = -(1 - i) - i, \\ z_2 = (1 - i) - i \end{cases} \iff \begin{cases} z_1 = -1, \\ z_2 = -1 - 2i. \end{cases}$$

b)

$$z^2 + (2-2i)z - 6i - 3 = z^2 + 2(1-i)z + (1-i)^2 - (1-i)^2 - 6i - 3 =$$
$$= (z + (1-i))^2 - (1 - 2i + i^2) - 6i - 3 = (z + 1 - i)^2 + 2i - 6i - 3 = 0 \iff$$
$$\iff (z+1-i)^2 = 3 + 4i \iff [w = z + 1 - i] \iff w^2 = 3 + 4i.$$

Detta är samma ekvation som i 6.38 c), vilket betyder att man kan begrunda räkningarna där för mer information, men man får alltså att

$$z + 1 - i = w = \pm(2+i) \iff \begin{cases} z_1 = -(2+i) - (1-i), \\ z_2 = (2+i) - (1-i) \end{cases} \iff \begin{cases} z_1 = -3, \\ z_2 = 1 + 2i. \end{cases}$$

6.40

$$(2+i)z^2 + (1-7i)z - 5 = 0 \iff z^2 + \frac{1-7i}{2+i}z - \frac{5}{2+i} =$$
$$= z^2 + \frac{(1-7i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}z - \frac{5(2-i)}{(2+i)(2-i)} = z^2 + \frac{2 - i - 14i + 7i^2}{4+1}z - \frac{5(2-i)}{4+1} =$$
$$= z^2 + \frac{-5-15i}{5}z - (2-i) = z^2 - (1+3i)z - 2 + i = 0 \iff$$
$$\iff z^2 - (1+3i)z + \left(\frac{1+3i}{2}\right)^2 - \left(\frac{1+3i}{2}\right)^2 - 2 + i = \left(z - \frac{1+3i}{2}\right)^2 - \frac{1+6i-9}{4} - 2 + i =$$
$$= \left(z - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right)^2 - \left(\frac{-8}{4} + \frac{3}{2}i\right) - 2 + i = \left(z - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right)^2 - \frac{1}{2}i = 0 \iff$$
$$\iff [w = z - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i] \iff w^2 = \frac{i}{2} \implies [w = x + iy] \implies$$
$$\implies x^2 - y^2 + 2ixy = \frac{i}{2} \text{ och } |w^2| = \left|\frac{i}{2}\right| \iff x^2 + y^2 = \frac{1}{2} \implies$$
$$\implies \begin{cases} x^2 - y^2 &= 0, \\ x^2 + y^2 &= 1/2, \\ 2xy &= 1/2 \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 - y^2 &= 0, \\ 2x^2 &= 1/2, \\ y &= 1/4x \end{cases} \implies \begin{cases} x &= \pm\frac{1}{2}, \\ y &= \pm\frac{1}{2} \end{cases} \implies$$
$$\implies z - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i = w = \pm\frac{1}{2}(1+i) \iff \begin{cases} z_1 = \frac{-(1+i)+(1+3i)}{2}, \\ z_2 = \frac{(1+i)+(1+3i)}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} z_1 = i, \\ z_2 = 1 + 2i. \end{cases}$$

6.41

För att lösa dessa uppgifter ansätter man $z = re^{i\theta}$ och skriver om högerleden på polär form, för att sedan utnyttja att argumenten är 2π-periodiska, vilket ger en alla lösningar jämt fördelade på en cirkel av en viss radie. I samtliga uppgifter är $k \in \mathbb{Z}$ och $z = re^{i\theta}$, $r > 0$ och $0 \leq \theta < 2\pi$.

a)

Lösning finns redan.

b)

$$1+i = |1+i|e^{i\arg(1+i)+i2\pi k},\ |1+i| = \sqrt{2} \text{ och } \arg(1+i) = \arctan\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} \implies$$

$$\implies z^3 = 1+i \iff \left(re^{i\theta}\right)^3 = \sqrt{2}e^{i(\pi/4+2\pi k)} \implies$$

$$\implies \begin{cases} r^3 = 2^{1/2}, \\ 3\theta = \pi/4 + 2\pi k \end{cases} \implies \begin{cases} r = 2^{1/6}, \\ \theta = \pi/12 + 2\pi k/3. \end{cases}$$

Eftersom $0 \le \theta < 2\pi$ kommer $k = 0,\ 1,\ 2$, därefter upprepas rötterna igen (egentligen kan man välja vilken följd av tre heltal som man vill, men det är nog lättast att välja dessa (möjligen är $-1,\ 0,\ 1$ marginellt lättare)). Detta ger

$$\begin{cases} z_0 = 2^{1/6}e^{i(\pi/12+0)} = 2^{1/6}e^{i\pi/12}, \\ z_1 = 2^{1/6}e^{i(\pi/12+2\pi/3\cdot 1)} = 2^{1/6}e^{i9\pi/12} = 2^{1/6}e^{i3\pi/4}, \\ z_2 = 2^{1/6}e^{i(\pi/12+2\pi/3\cdot 2)} = 2^{1/6}e^{i17\pi/12}. \end{cases}$$

c)

$$16 = |16|e^{i(\arg 16} + 2\pi k) = 2^4e^{i2\pi k} \implies z^4 = 16 \iff$$

$$\iff \left(re^{i\theta}\right)^4 = 2^4e^{i2\pi k} \implies \begin{cases} r^4 = 2^4, \\ 4\theta = 2\pi k \end{cases} \implies \begin{cases} r = 2, \\ \theta = \pi k/2. \end{cases}$$

Eftersom det är en fjärdegradsekvation har vi fyra olika lösningar, och därmed är $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3$.

$$\begin{cases} z_0 = 2e^{i\pi\cdot 0/2} = 2, \\ z_1 = 2e^{i\pi\cdot 1/2} = 2i, \\ z_2 = 2e^{i\pi\cdot 2/2} = -2, \\ z_3 = 2e^{i\pi\cdot 3/2} = -2i. \end{cases}$$

d)

Negativ realdel på högerledet betyder att vi inte direkt kan använda $\arctan\frac{y}{x}$ för att beräkna argumentet, men $\pi - \arctan\frac{y}{-x}$ fungerar bra.

$$i\sqrt{3}-1 = |i\sqrt{3}-1|e^{i\arg(i\sqrt{3}-1)+i2\pi k},\ |i\sqrt{3}-1| = 2 \text{ och}$$

$$\arg(i\sqrt{3}-1) = \pi - \arctan\frac{\sqrt{3}}{1} = \pi - \pi/3 = 2\pi/3 \implies z^3 = i\sqrt{3}-1 \iff$$

$$\iff \left(re^{i\theta}\right)^3 = 2e^{i(\frac{2\pi}{3}+2\pi k)} \implies \begin{cases} r^3 = 2, \\ 3\theta = 2\pi/3 + 2\pi k \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{cases} r = 2^{1/3}, \\ \theta = 2\pi/9 + 2\pi k/3 \end{cases} \implies [k = 0,\ 1,\ 2] \implies$$

$$\implies \begin{cases} z_0 = 2^{1/3}e^{i(2\pi/9+2\pi\cdot 0/3)} = 2^{1/3}e^{i2\pi/9}, \\ z_1 = 2^{1/3}e^{i(2\pi/9+2\pi\cdot 1/3)} = 2^{1/3}e^{i8\pi/9}, \\ z_2 = 2^{1/3}e^{i(2\pi/9+2\pi\cdot 2/3)} = 2^{1/3}e^{i14\pi/9}. \end{cases}$$

e)

$$4i = |4i|e^{i(\arg 4i + 2\pi k)} = 4e^{i(\pi/2+2\pi k)} \implies z^5 = 4i \iff \left(re^{i\theta}\right)^5 = 4e^{i(\pi/2+2\pi k)} \implies$$

$$\implies \begin{cases} r^5 = 4, \\ 5\theta = \pi/2 + 2\pi k \end{cases} \implies \begin{cases} r = 4^{1/5}, \\ \theta = \pi/10 + 2\pi k/5 \end{cases} \implies [k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4] \implies$$

$$\implies \begin{cases} z_0 = 4^{1/5}e^{i(\pi/10+2\pi\cdot 0/5)} = 4^{1/5}e^{i\pi/10}, \\ z_1 = 4^{1/5}e^{i(\pi/10+2\pi\cdot 1/5)} = 4^{1/5}e^{i5\pi/10} = 4^{1/5}i, \\ z_2 = 4^{1/5}e^{i(\pi/10+2\pi\cdot 2/5)} = 4^{1/5}e^{i9\pi/10}, \\ z_3 = 4^{1/5}e^{i(\pi/10+2\pi\cdot 3/5)} = 4^{1/5}e^{i13\pi/10}, \\ z_4 = 4^{1/5}e^{i(\pi/10+2\pi\cdot 4/5)} = 4^{1/5}e^{i17\pi/10}. \end{cases}$$

f)

$$-1 = 1 \cdot e^{i(\pi+2\pi k)} \implies z^4 = -1 \iff \left(re^{i\theta}\right)^4 = 1 \cdot e^{i(\pi+2\pi k)} \implies$$

$$\implies \begin{cases} r^4 = 1, \\ 4\theta = \pi + 2\pi k \end{cases} \implies \begin{cases} r = 1, \\ \theta = \pi/4 + \pi k/2 \end{cases} \implies [k = 0,\ 1,\ 2,\ 3] \implies$$

$$\implies \begin{cases} z_0 = e^{i(\pi/4+\pi\cdot 0/2)} = e^{i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i, \\ z_1 = e^{i(\pi/4+\pi\cdot 1/2)} = e^{i3\pi/4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i, \\ z_2 = e^{i(\pi/4+\pi\cdot 2/2)} = e^{i5\pi/4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i, \\ z_3 = e^{i(\pi/4+\pi\cdot 3/2)} = e^{i7\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i. \end{cases}$$

6.42

Eftersom det är reella koefficienter kan vi få två ekvationer för z^3 med pq-formeln (det är en andragradsekvation i variabeln $w = z^3$):

$$\left(z^3\right)^2 - 2z^3 + 2 = 0 \iff \begin{cases} z^3 = 1 - i, \\ z^3 = 1 + i. \end{cases}$$

Den andra ekvationen är samma som i 6.41 b) och den första är konjugatet av den andra, vilket betyder att det enda som ändras är argumentet ($1 + i = \sqrt{2}e^{i(\pi/4+2\pi k)} \implies 1 - i = \overline{1+i} = \overline{\sqrt{2}e^{i(\pi/4+2\pi k)}} = \sqrt{2}e^{-i(\pi/4+2\pi k)}$). Detta ger alltså lösningarna (de första tre är från 6.41 b) och de sista tre är bara konjugatet)

$$z = \begin{cases} 2^{1/6}e^{i(\pi/12+2\pi k/3)}, \\ 2^{1/6}e^{-i(\pi/12+2\pi k/3)}, \end{cases} \quad k = 0,\ 1,\ 2 \implies$$

$$\begin{cases} z_0 = 2^{1/6}e^{i\pi/12}, \\ z_1 = 2^{1/6}e^{i3\pi/4}, \\ z_2 = 2^{1/6}e^{i17\pi/12}, \\ z_3 = 2^{1/6}e^{-i\pi/12} = 2^{1/6}e^{-i\pi/12+2\pi i} = 2^{1/6}e^{i23\pi/12}, \\ z_4 = 2^{1/6}e^{-i3\pi/4} = 2^{1/6}e^{-i3\pi/4+2\pi i} = 2^{1/6}e^{i5\pi/4}, \\ z_5 = 2^{1/6}e^{-i17\pi/12} = 2^{1/6}e^{-i17\pi/12+2\pi i} = 2^{1/6}e^{i7\pi/12}. \end{cases}$$

6.43

Låt först $w = z^2 + 1 = re^{i\theta}$. Vidare är $-8 = 8e^{i(\pi+2\pi k)}$, vilket ger ekvationen

$$(1+z^2)^3 = -8 \iff r^3 e^{i3\theta} = 2^3 e^{i(\pi+2\pi k)} \implies \begin{cases} r^3 = 2^3, \\ 3\theta = \pi + 2\pi k \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{cases} r = 2, \\ \theta = \pi/3 + 2\pi k/3, \end{cases} \quad k = 0,\ 1,\ 2 \implies$$

$$\implies w = z^2 + 1 = \begin{cases} 2e^{i(\pi/3+2\pi\cdot 0/3)} = 2e^{i\pi/3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}, \\ 2e^{i(\pi/3+2\pi\cdot 1/3)} = 2e^{i3\pi/3} = -2, \\ 2e^{i(\pi/3+2\pi\cdot 2/3)} = 2e^{i5\pi/3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3} \end{cases} \iff$$

$$z^2 = \begin{cases} i\sqrt{3}, \\ -3, \\ -i\sqrt{3}. \end{cases}$$

Den andra ekvationen ger direkt att $z = \pm i\sqrt{3}$, och den tredje är konjugatet till den första, vilket betyder att vi kan få lösningarna till den genom att ta det komplexa konjugatet av lösningarna till den första. För att lösa den första ekvationen sätter vi $z = x + iy$ och ser vad som händer

$$z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = i\sqrt{3} \text{ och } |z^2| = |i\sqrt{3}| \iff x^2 + y^2 = \sqrt{3} \implies$$

$$\implies \begin{cases} x^2 - y^2 &= 0, \\ x^2 + y^2 &= \sqrt{3}, \\ 2xy &= \sqrt{3} \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 &= y^2, \\ 2x^2 &= \sqrt{3}, \\ y &= \sqrt{3}/2x \end{cases} \implies \begin{cases} x &= \pm\sqrt{\sqrt{3}/2} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}}, \\ y &= \pm\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}}, \end{cases}$$

ekvationen $x^2 = y^2$ ger direkt att x och y har samma belopp, vilket betyder att det bara är tecknet som skiljer. Detta underlättar ens beräkning av y istället för att sätta in x i $\sqrt{3}/2x$. Alltså är $z = \pm\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}}(1+i)$, och därmed konjugatet $z = \pm\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}}(1-i)$ lösningar till ekvationen. Sammanställt får vi att

$$\begin{cases} z_{1,2,3,4} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}}(\pm 1 \pm i), \\ z_{5,6} = \pm i\sqrt{3}. \end{cases}$$

6.44

Det är bara att sätta in $x = 1$ och sedan bestämma a så att likheten uppfylls, därefter kan polynomdivision genomföras för att faktorisera polynomet.

$$p(1) = 1^3 - 2\cdot 1^2 - 19\cdot 1 + a = 0 \iff -20 + a = 0 \iff a = 20.$$

$$
\begin{array}{r|l}
x^2 \;-\; x - 20 & \\ \cline{2-2}
x^3 - 2x^2 - 19x + 20 & x - 1 \\ \cline{1-1}
-x^2(x-1) & \\ \cline{1-1}
-x^2 - 19x + 20 & \\
-(-x)(x-1) & \\ \cline{1-1}
-20x + 20 & \\
-(-20)(x-1) & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

$$p(x) = x^3 - 2x^2 - 19x + 20 = (x-1)(x^2 - x - 20) = (x-1)(x+4)(x-5).$$

6.45

Lösning finns redan.

6.46

Att ett polynom endast har reella koefficienter betyder att <u>om</u> det har komplexa rötter måste även konjugatet vara en rot. Vi har givet att $z = 2 - i$ är ett enkelt nollställe, vilket då berättar för oss att $z = 2 + i$ också är ett enkelt nollställe. Vidare medför att $z = i$ är ett dubbelt nollställe att $z = -i$ också är ett dubbelt nollställe, vi kan nu skriva upp ett sjättegradspolynom som en produkt av rötterna:

$$p(z) = (z-(2-i))(z-(2+i))(z-i)^2(x-(-i))^2 = ((z-2)+i)((z-2)-i)((z-i)(x+i))^2 =$$

$$= ((z-2)^2 - i^2)(z^2 - i^2)^2 = (z^2 - 4z + 5)(z^4 + 2z^2 + 1) =$$

$$= z^6 + 2z^4 + z^2 - 4z^5 - 8z^3 - 4z + 5z^4 + 10z^2 + 5 = z^6 - 4z^5 + 7z^4 - 8z^3 + 11z^2 - 4z + 5.$$

6.47

Ett andragradspolynom med rötterna z_1 och z_2 kan skrivas

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2) = a(z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 z_2) = az^2 - a(z_1 + z_2)z + az_1 z_2 \implies$$

$$\begin{cases} b = -a(z_1 + z_2), \\ c = az_1 z_2 \end{cases} \implies \begin{cases} z_1 + z_2 = -b/a, \\ z_1 z_2 = c/a. \end{cases}$$

Detta visar att vi i deluppgifterna direkt kan säga vad summan och produkten av rötterna blir och det är bara att använda pq-formeln eller någon annan metod, vilket jag inte kommer att skriva ner, men för att illustrera det som har gjorts ovan kan jag ange hur summan och produkten beräknas utan att lösa ekvationera.

a)

$$z^2 - 7z + 10 = 0 \implies [a = 1,\ b = -7,\ c = 10] \implies \begin{cases} z_1 + z_2 = -b/a = 7, \\ z_1 z_2 = c/a = 10. \end{cases}$$

b)

$$3z^2 - 21z + 30 = 0 \implies [a = 3,\ b = -21,\ c = 30] \implies \begin{cases} z_1 + z_2 = -b/a = 7, \\ z_1 z_2 = c/a = 10. \end{cases}$$

På den här kan man också faktorisera ut en trea och sedan konstatera att det är samma polynom som i a)-uppgiften.

c)

$$z^3 - 7z^2 + 10z = z(z^2 - 7z + 10) = 0 \implies [a = 1,\ b = -7,\ c = 10,\ z_3 = 0] \implies$$
$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = -b/a + z_3 = 7 + 0 = 7, \\ z_1 z_2 z_3 = c z_3/a = 10 \cdot 0 = 0. \end{cases}$$

Här delas problemet upp i två delar genom att faktorisera ut z får man den andra faktorn till samma polynom som ovan, vilket betyder att dess summa/produkt av rötter är oförändrad och sedan använder man bara att den sista roten är $z_3 = 0$ för att antingen addera den till summan, eller multiplicera den i produkten.

6.48

$$z^7 + (3 - i)z^6 + \pi z^3 + e = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)(z - z_5)(z - z_6)(z - z_7) =$$
$$= z^7 - (z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6 + z_7)z^6 + ... + (-1)^7 z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 z_6 z_7,$$

beräkningen av sjättegradstermen kan antingen göras rent algebraiskt, men det vill man helst undvika. Ett lättare sätt är att fundera vad det är som ger z^6 - och efter en stund inser man nog att för att få z^6 måste man välja z från sex av faktorerna, vilket betyder att man från den sista blir kvar med $-z_k$ (alltså minus en av rötterna). Denna procedur kan man upprepa lika många gånger som det finns $-z_k$ att välja istället för z, vilket är sju gånger, och därmed får man att sjättegradstermen är minus summan av alla rötter. Att inse att konstanten är minus produkten av alla rötter är betydligt lättare. Med den information kan vi ta reda på att

$$\begin{cases} -(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6 + z_7) & = 3 - i, \\ -z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 z_6 z_7 & = e \end{cases} \iff \begin{cases} \sum_{k=1}^{7} z_k & = i - 3, \\ \prod_{k=1}^{7} z_k & = -e. \end{cases}$$

6.49

Lösning finns redan.

6.50

Vi utför polynomdivision av $p(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + ax + 2$ med $x^2 + 2x + 2$:

$$
\begin{array}{r|l}
x^2 \quad + \quad 1 & \\
\hline
x^4 + 2x^3 + 3x^2 + ax + 2 & x^2 + 2x + 2 \\
\cline{2-2}
-x^2(x^2 + 2x + 2) & \\
\hline
x^2 + ax + 2 & \\
-1 \cdot (x^2 + 2x + 2) & \\
\hline
(a-2)x &
\end{array}
$$

Alltså är $x^2 + 2x + 2$ en faktor om

$$a - 2 = 0 \iff a = 2 \implies p(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2 =$$

$$= (x^2 + 2x + 2)(x^2 + 1) = 0 \iff \begin{cases} x^2 + 2x + 2 = 0, \\ x^2 + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_{1,2} = -1 \pm i, \\ x_{3,4} = \pm i. \end{cases}$$

6.51

Det kanske finns ett lättare sätt, men jag tänker ansätta $z = 1 + iy$ och sedan sätta in i $p(z) = z^4 - 2z^3 + 12z^2 - 14z + 35$, vilket kommer att ge mig två ekvationer givet att $p(z)$ har en rot på den ansatta formen.

$$(1 + iy)^4 - 2(1 + iy)^3 + 12(1 + iy)^2 - 14(1 + iy) + 35 =$$

$$= 1+4iy+6i^2y^2+4i^3y^3+i^4y^4-2(1+3iy+3i^2y^2+i^3y^3)+12(1+2iy+i^2y^2)-14-14iy+35 =$$

$$= 1 + 4iy - 6y^2 - 4iy^3 + y^4 - 2 - 6iy + 6y^2 + 2iy^3 + 12 + 24iy - 12y^2 - 14iy + 21 =$$

$$= (y^4 - 12y^2 + 32) + i(-2y^3 + 8y) = 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} y^4 - 12y^2 + 32 & = 0, \\ y^2 - 4 & = 0 \implies y = \pm 2 \end{cases}$$

insättning i den övre ekvationen visar att $y^2 = 4$ uppfyller båda. Alltså vet vi att $p(z)$ har rötterna $z_{1,2} = 1 \pm 2i$ och därmed både $z-1-2i$ samt $z-1+2i$ som faktorer. Produkten av faktorerna är också en faktor, så $(z-1-2i)(z-1+2i) = (z-1)^2 - (2i)^2 = z^2 - 2z + 5$ är en faktor till $p(z)$. För att bestämma övriga lösningar till $p(z) = 0$ används polynomdivision.

$$
\begin{array}{r|l}
z^2 \quad + \quad 7 & \\
\hline
z^4 - 2z^3 + 12z^2 - 14z + 35 & z^2 - 2z + 5 \\
\cline{2-2}
-z^2(z^2 - 2z + 5) & \\
\hline
7z^2 - 14z + 35 & \\
-7(z^2 - 2z + 5) & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

$$p(z) = (z^2 - 2z + 5)(z^2 + 7) = 0 \iff \begin{cases} z_{1,2} = 1 \pm 2i, \\ z_{3,4} = \pm i\sqrt{7}. \end{cases}$$

6.52

Polynom med reella koefficienter kan alltid faktoriseras i polynom av högst grad två. Detta beror på att om ett komplext tal är en rot till ett sådant polynom är även dess konjugat det. Alltså, givet att $a + ib$ är en rot måste även $a - ib$ vara en och med den informationen kan man bilda ett reellt andragradspolynom som faktoriserar ens polynom, eftersom

$$(x - a - ib)(x - a + ib) = (x - a)^2 - (ib)^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}.$$

a)

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x + 1)(x - 1).$$

b)

$$x^3 + x = x(x^2 + 1).$$

c)

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x + 1)(x - 1)(x^2 + 1).$$

d)

Lösning finns redan.

6.53

$$p(x) = x^5 - x^4 + 4x - 4 = x(x^4 + 4) - (x^4 + 4) = (x - 1)(x^4 + 4),$$

för att faktorisera detta polynom ytterligare, vill jag första bestämma alla lösningar till $x^4 + 4 = 0 \iff x^4 = -4$, $-4 = 4e^{i(\pi+2\pi k)}$ och $x = re^{i\theta}$.

$$\left(re^{i\theta}\right)^4 = 4e^{i(\pi+2\pi k)} \implies \begin{cases} r^4 = 4, \\ 4\theta = \pi + 2\pi k \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{cases} r = \sqrt{2}, \\ \theta = \pi/4 + \pi k/2, \end{cases} \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \implies$$

$$\implies \begin{cases} x_0 = \sqrt{2}e^{i(\pi/4+pi\cdot 0/2)} = \sqrt{2}e^{i\pi/4} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 1 + i, \\ x_1 = \sqrt{2}e^{i(\pi/4+pi\cdot 1/2)} = \sqrt{2}e^{i3\pi/4} = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -1 + i, \\ x_2 = \sqrt{2}e^{i(\pi/4+pi\cdot 2/2)} = \sqrt{2}e^{i5\pi/4} = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -1 - i, \\ x_3 = \sqrt{2}e^{i(\pi/4+pi\cdot 3/2)} = \sqrt{2}e^{i7\pi/4} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 1 - i, \end{cases}$$

Detta betyder att vi kan skriva

$$p(x) = (x-1)(x-1-i)(x+1-i)(x+1+i)(x-1+i) = (x-1)((x-1)^2-i^2)((x+1)^2-i^2) =$$

$$= (x - 1)(x^2 - 2x + 1 + 1)(x^2 + 2x + 1 + 1) = (x - 1)(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2).$$

6.54

$$p(x) = x^6 - 8 = (x^3 - 8^{1/2})(x^3 + 8^{1/2}) = (x^3 - 2\sqrt{2})(x^3 + 2\sqrt{2}).$$

Vi kan direkt bestämma en rot till vardera faktor, $x^3 - 8^{1/2} = 0 \implies x = 8^{1/6} = ((2^3)^{1/3})^{1/2} = \sqrt{2}$ och $x^3 + 8^{1/2} = 0 \implies x = -8^{1/6} = -((2^3)^{1/3})^{1/2} = -\sqrt{2}$. Polynomdivision kan nu användas.

$$\begin{array}{rrrr|l}
 & x^2 & +\sqrt{2}x & +\ 2 & \\ \cline{5-5}
x^3 & & - & 2\sqrt{2} & x-\sqrt{2} \\ \cline{1-4}
 & & -x^2 & (x-\sqrt{2}) & \\ \cline{1-4}
 & \sqrt{2}x^2 & - & 2\sqrt{2} & \\
 & & -\sqrt{2}x & (x-\sqrt{2}) & \\ \cline{1-4}
 & & & 2x-2\sqrt{2} & \\
 & & & -2(x-\sqrt{2}) & \\ \cline{1-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

och för det andra polynomet

$$\begin{array}{rrrr|l}
 & x^2 & -\sqrt{2}x & +\ 2 & \\ \cline{5-5}
x^3 & & + & 2\sqrt{2} & x+\sqrt{2} \\ \cline{1-4}
 & & -x^2 & (x+\sqrt{2}) & \\ \cline{1-4}
 & -\sqrt{2}x^2 & + & 2\sqrt{2} & \\
 & & -(-\sqrt{2}x) & (x+\sqrt{2}) & \\ \cline{1-4}
 & & & 2x+2\sqrt{2} & \\
 & & & -2(x+\sqrt{2}) & \\ \cline{1-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

$$p(x) = (x - \sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2}x + 2)(x + \sqrt{2})(x^2 - \sqrt{2}x + 2).$$

6.55

a)

$$(1 + i\sqrt{3})^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} 1^{5-k} (i\sqrt{3})^k = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} i^k (\sqrt{3})^k =$$
$$= 1 + 5i\sqrt{3} + 10i^2(\sqrt{3})^2 + 10i^3(\sqrt{3})^3 + 5i^4(\sqrt{3})^4 + i^5(\sqrt{3})^5 =$$
$$= 1 + 5i\sqrt{3} - 10 \cdot 3 - 10i \cdot 3\sqrt{3} + 5 \cdot 9 + i9\sqrt{3} = 16(1 - i\sqrt{3}).$$

b)

$$1 + i\sqrt{3} = |1 + i\sqrt{3}| e^{i \arg(1+i\sqrt{3})} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} e^{i \arctan(\sqrt{3}/1)} = 2e^{i\pi/3} \implies$$
$$\implies (1 + i\sqrt{3})^5 = \left(2e^{i\pi/3}\right)^5 = 32e^{i5\pi/3} = 32\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 16(1 - i\sqrt{3}).$$

6.56

$$1 + e^{i\frac{\pi}{2}} = 1 + i = |1+i|e^{i\arg(1+i)} = \sqrt{1^2+1^2}e^{i\arctan(1/1)} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

6.57

a)

Vinkeln ges av skillnaden mellan deras argument och båda är i första kvadranten, så man kan använda arctan för att bestämma argumenten direkt. Skillnad av argument är dock samma sak som argumentet av en kvot.

$$\arg(5+14i) - \arg(2+3i) = \arg\frac{5+14i}{2+3i} = \arg\frac{(5+14i)(2-3i)}{(2+3i)(2-i)} =$$

$$= \arg\frac{10-15i+28i-42i^2}{4+9} = \arg\frac{52+13i}{13} = \arg(4+i) = \arctan\frac{1}{4}.$$

b)

För att hitta talen som uppfyller detta är det lättaste att bara rotera vektorn $\pi/4$ i positiv och negativ led, vilket görs genom att multiplicera med $\sqrt{2}e^{\pm i\pi/4} = 1 \pm i$. Faktorn $\sqrt{2}$ är bara där för att det ska bli lättare algebra, och eftersom vi söker alla z räcker det med att hitta ett z samt skala det.

$$(5+14i)(1+i) = 5+5i+14i+14i^2 = -9+19i,$$

$$(5+14i)(1-i) = 5-5i+14i-14i^2 = 19+9i.$$

Alltså uppfyller $z = t(-9+19i)$ och $z = t(19+9i)$, $t > 0$ vinkelvillkoret. Att $t > 0$ beror på att om den hade varit negativ hade argumentet ökat med π (den hade vridits ett halvt varv (jämför med att $-1 = e^{i\pi}$)).

6.58

Triangelolikheten för komplexa tal säger att $|z+w| \leq |z| + |w|$, och om man applicerar det på fallet i uppgiften får man att

$$|e^{i\frac{\pi}{5}} + e^{i\frac{\pi}{7}}| \leq |e^{i\frac{\pi}{5}}| + |e^{i\frac{\pi}{7}}| = 1 + 1 = 2.$$

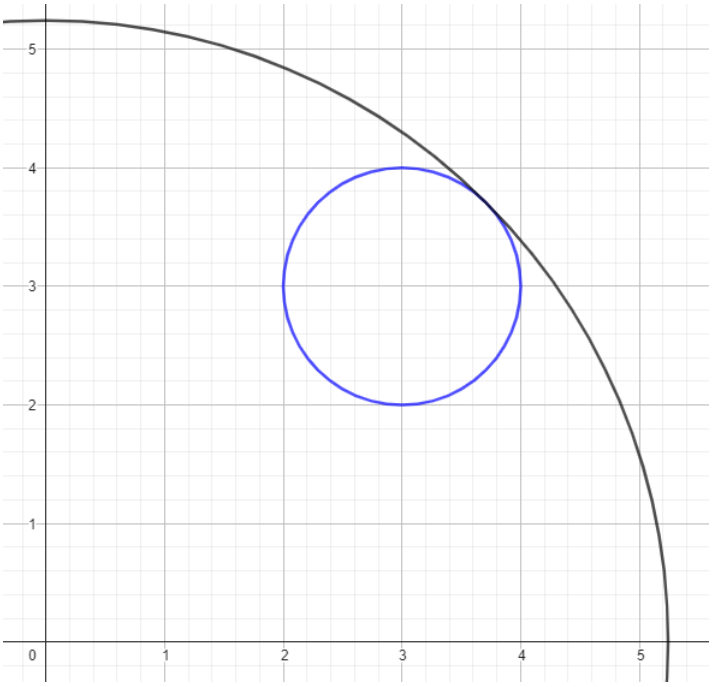
□

Tolkningen blir väl något i stil med att summan av två tal på enhetscirkeln ligger innanför, eller som mest på, randen till en cirkel med radie två.

6.59

$$|z-3-3i| = 1 \iff [z = x+iy] \iff |(x-3)+i(y-3)| =$$
$$= \sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2} = 1 \iff (x-3)^2+(y-3)^2 = 1.$$

Geometrisk beskriver detta en cirkel i det komplexa talplanet, vilket ser ut enligt följande:



Den svarta cirkeln visar var absolutbeloppet har sitt största värde (i den punkt där den tangerar cirkeln). Man vet att det är det största värdet eftersom alla andra punkter på den blåa cirkeln ligger innanför den svarta. Den svarta cirkeln ges alltså av ekvationen

$$x^2 + y^2 = \max_{|z-3-3i|=1} |z|^2.$$

Vad detta är tänkt att illustrera är att det största värdet antas då $x = y$, man kan även ta reda på denna likhet genom att lösa det som ett optimeringsproblem med ett bivillkor i två dimensioner, men det är ju endimensionell analys, så det känns olämpligt. Insättning av $x = y$ i det vi hade för ett tag sedan ger

$$(x-3)^2 + (x-3)^2 = 1 \implies x - 3 = {}_{(-)}^{+}\frac{1}{\sqrt{2}} \implies x = y = 3 + \frac{1}{\sqrt{2}},$$

den negativa roten uteslöts eftersom cirkeln $|z - 3 - 3i|$ ligger i den första kvadranten och därmed är $x,\ y > 0$. Men vi har nu funnit lösningen

$$z = x + iy = (3 + \frac{1}{\sqrt{2}}) + (3 + \frac{1}{\sqrt{2}})i.$$

6.60

Lättast är att börja med högerledet, istället för att utgå från vänsterledet.

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 2\left(\frac{e^{i\frac{x+y}{2}} - e^{-i\frac{x+y}{2}}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i\frac{x-y}{2}} + e^{-i\frac{x-y}{2}}}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2i}(e^{i\frac{x+y}{2}}e^{i\frac{x-y}{2}} + e^{i\frac{x+y}{2}}e^{-i\frac{x-y}{2}} - e^{-i\frac{x+y}{2}}e^{i\frac{x-y}{2}} - e^{-i\frac{x+y}{2}}e^{-i\frac{x+y}{2}}) =$$

$$= \frac{1}{2i}(e^{i\frac{x+y+x-y}{2}} + e^{i\frac{x+y-(x-y)}{2}} - e^{-i\frac{x+y-(x-y)}{2}} - e^{-i\frac{x+y+x-y}{2}}) =$$

$$= \frac{1}{2i}(e^{ix} + e^{iy} - e^{-iy} - e^{-ix}) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} + \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} = \sin x + \sin y.$$

□

6.61

Se uppgift 6.62 och sätt $(x, y) = (1, 2)$.

6.62

a)

Se d) med $\theta = \pi/2$.

b)

Se d) med $\theta = \pi/4$.

c)

Se d) med $\theta = \pi$.

d)

Att rotera en vektor/ett komplext tal med en vinkel θ, i positiv led, uppnås genom att multiplicera talet med ett komplext tal på enhetscirkeln med ett argument som motsvarar vinkeln man vill rotera. En vektor (x, y) kan identifieras med det komplexa talet $x + iy$, och en roterad vektor (x', y') kan då fås av att rotera talet i det komplexa talplanet och sedan notera vad x' och y' blir. Vi ska alltså bara multiplicera $x + iy$ med $e^{i\theta}$.

$$(x + iy)e^{i\theta} = (x + iy)(\cos\theta + i\sin\theta) = (x\cos\theta - y\sin\theta) + i(x\sin\theta + y\cos\theta) \implies$$

$$\implies (x, y) \mapsto (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta).$$

6.63

$$z^3 = 7i \iff z^3 - 7i = 0 \text{ och } z^3 = -7i \iff z^3 + 7i = 0 \implies$$

$$\implies (z^3 - 7i)(z^3 + 7i) = 0 \iff z^6 - 49i^2 = 0 \iff z^6 + 49 = 0,$$

har samtliga sex rötter som lösningar eftersom den innehåller faktorerna som hade tre vardera.

6.64

Använd binomialsatsen, eller någon annan metod, för att se att z^{24}-termerna tar ut varandra och att den nästa högsta graden på någon term är 21. Algebrans fundamentalsats och lite sådant säger då att ekvationen har 21 lösningar, eftersom man kan skriva om det som ett polynom av grad 21 ska vara 0.

6.65

För att hitta reella rötter ansätter vi $z = x \in \mathbb{R}$, och delar upp ekvationen i real- samt imaginärdel.

$$x^4 - x^3 - (6+i)x^2 + ix + 6i = 0 \iff \begin{cases} x^4 - x^3 - 6x^2 = 0, \\ -x^2 + x + 6 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x^2(x+2)(x-3) = 0, \\ (x+2)(x-3) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -2, \\ x = 3. \end{cases}$$

Ekvationen har alltså två reella rötter. För att bestämma övriga kan vi utföra polynomdivision av $z^4 - z^3 - (6+i)z^2 + iz + 6i$ med $(z+2)(z-3) = z^2 - z - 6$.

$$\begin{array}{r|l}
 & z^2 \quad - \quad i \\ \hline
z^4 - z^3 - (6+i)z^2 + iz + 6i & z^2 - z - 6 \\ \cline{2-2}
-z^2(z^2 - z - 6) & \\ \hline
-iz^2 + iz + 6i & \\
-(-i)(z^2 - z - 6) & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

De sista lösningarna uppfyller alltså $z^2 - i = 0$. Detta kan man lösa på några sätt, men jag tänker skriva om det på polär form. $i = e^{i(\pi/2 + 2\pi k)}$, $z = re^{i\theta}$.

$$z^2 = i \implies \begin{cases} r^2 = 1, \\ 2\theta = \pi/2 + 2\pi k \end{cases} \implies \begin{cases} r = 1, \\ \theta = \pi/4 + \pi k, \end{cases} \quad k = 0,\ 1 \implies$$

$$\implies z = e^{i(\pi/4 + \pi \cdot 0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \text{ och } z = e^{i(\pi/4 + \pi \cdot 1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i.$$

Om man lägger ihop allt detta har vi lösningarna

$$z_1 = -2,\ z_2 = 3,\ z_{3,4} = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right).$$

6.66

Polynomdivision av $z^3 - 5iz^2 - (9+i)z - 2 + 6i$ med $z - 2i$.

$$\begin{array}{r|l}
 & z^2 \quad - \quad 3iz - (3+i) \\ \hline
z^3 - 5iz^2 - (9+i)z - 2 + 6i & z - 2i \\ \cline{2-2}
-z^2(z - 2i) & \\ \hline
-3iz^2 - (9+i)z - 2 + 6i & \\
-(-3iz)(z - 2i) & \\ \hline
-(3+i)z - 2 + 6i & \\
-(-(3+i))(z - 2i) & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

$$z^3 - 5iz^2 - (9+i)z - 2 + 6i = 0 \iff (z^2 - 3iz - (3+i))(z - 2i) = 0 \implies$$

$$\Longrightarrow z^2 - 3iz - 3 - i = 0 \iff z^2 - 2\cdot\frac{3i}{2}z + \left(\frac{3i}{2}\right)^2 - \left(\frac{3i}{2}\right)^2 - 3 - i =$$

$$= \left(z - \frac{3}{2}i\right)^2 + \frac{9}{4} - \frac{12}{4} - i = 0 \iff [w = z - \frac{3}{2}i = x + iy] \iff w^2 = \frac{3}{4} + i \iff$$

$$\iff x^2 - y^2 + 2ixy = \frac{3}{4} + i,\ |w^2| = |\frac{3}{4} + i| = \sqrt{(3/4)^2 + 1^2} = \frac{5}{4} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 & = 3/4, \\ x^2 + y^2 & = 5/4, \\ 2xy & = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x^2 & = 3/4 + 5/4 = 2, \\ 2y^2 & = 5/4 - 3/4 = 1/2, \\ 2xy & = 1 \text{ (samma tecken)} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \pm 1, \\ y = \pm 1/2. \end{cases}$$

$$w = z + \frac{3}{2}i = \pm(1 + \frac{1}{2}i) \iff \begin{cases} z_2 = 1 + \frac{1}{2}i + \frac{3}{2}i = 1 + 2i, \\ z_3 = -1 - \frac{1}{2}i + \frac{3}{2}i = -1 + i. \end{cases}$$

$$z_1 = 2i,\ z_2 = 1 + 2i, z_3 = -1 + i.$$

6.67

$$z^2 + (2-i)z + 3 - i = 0 \iff \left(z + \frac{2-i}{2}\right)^2 - \left(\frac{2-i}{2}\right)^2 + 3 - i =$$

$$= \left(z + 1 - \frac{1}{2}i\right)^2 - \frac{4 - 4i + i^2}{4} + \frac{12 - 4i}{4} = \left(z + 1 - \frac{1}{2}i\right)^2 + \frac{9}{4} = 0 \iff$$

$$\iff [x + iy = w = z + 1 - \frac{1}{2}i] \iff w^2 = (x + iy)^2 = -\frac{9}{4} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x^2 - y^2 - 2ixy = -\frac{9}{4} \text{ och } |w^2| = \left|-\frac{9}{4}\right| = \frac{9}{4} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -\frac{9}{4}, \\ x^2 + y^2 = \frac{9}{4}, \\ 2xy = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 0, \\ 2y^2 = \frac{18}{4}, \\ xy = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = \pm\frac{3}{2} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow z + 1 - \frac{1}{2}i = w = \pm\frac{3}{2}i \iff \begin{cases} z_1 = -\frac{3}{2}i - 1 + \frac{1}{2}i = -1 - i, \\ z_2 = \frac{3}{2}i - 1 + \frac{1}{2}i = -1 + 2i. \end{cases}$$

Insättning i tredjegradsekvationen visar att z_1 är en rot, och eftersom den endast har reella koefficienter kan vi direkt säga att $\overline{z}_1 = -1+i$ också är en rot. För att hitta den sista kan vi då polynomdividera $2z^3+3z^2+2z-2$ med $(z-z_1)(z-\overline{z}_1) = (z+1+i)(z+1-i) = (z+1)^2 - i^2 = z^2 + 2z + 2$.

$$\begin{array}{r|l} & 2z - 1 \\ \hline 2z^3 + 3z^2 + 2z - 2 & z^2 + 2z + 2 \\ \cline{2-2} -2z^2(z^2 + 2z + 2) & \\ \hline -z^2 - 2z - 2 & \\ -(-1)(z^2 + 2z + 2) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Härur ser vi att den tredje roten är $z = \frac{1}{2}$.

$$\text{Andragradsekvationen: } z_1 = -1 - i,\ z_2 = -1 + 2i.$$

$$\text{Tredjegradsekvationen: } z_{1,2} = -1 \pm i,\ z_3 = \frac{1}{2}.$$

6.68

a)

Reella koefficienter betyder att konjugatet till en rot också är en rot, alltså duger $z = 1 - i\sqrt{2}$.

b)

Polynomet har faktorerna $z - 1 - i\sqrt{2}$ och $z - 1 + i\sqrt{2}$, vilket betyder att det har $(z - 1 - i\sqrt{2})(z - 1 + i\sqrt{2}) = (z - 1)^2 - (i\sqrt{2})^2 = z^2 - 2z + 1 + 2 = z^2 - 2z + 3$ som en faktor också.

c)

$$
\begin{array}{rl}
z^4 \qquad + \qquad 4 & \\
\hline
z^6 - 2z^5 + 3z^4 + 4z^2 - 8z + 12 & | \; z^2 - 2z + 3 \\
\cline{2-2}
-z^4(z^2 - 2z + 3) & \\
\cline{1-1}
4z^2 - 8z + 12 & \\
-4(z^2 - 2z + 3) & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

$$z^6 - 2z^5 + 3z^4 + 4z^2 - 8z + 12 = 0 \iff (z^2 - 2z + 3)(z^4 + 4) = 0 \implies z^4 + 4 = 0,$$

den senaste ekvationen löstes i uppgift 6.53 och har lösningarna $z = \pm 1 \pm i$. Alltså har sjättegradsekvationen rötterna

$$z_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{2}, \;\; z_{3,4,5,6} = \pm 1 \pm i.$$

Kapitel 7

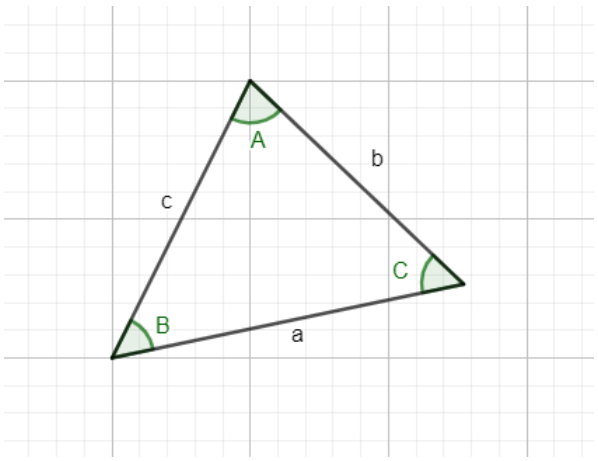
7.1

Summan av alla vinklar i en triangel är 180°, och i en rätvinklig triangel är en av vinklarna 90°. Alltså, om de två andra vinklarna är α och β, så gäller det att $90° + \alpha + \beta = 180\,\text{deg} \iff \alpha = f(\beta) = 90° - \beta$, $0 < \beta < 90°$ eftersom annars får α konstiga värden (ingen giltig rätvinklig triangel).

7.2

Areasatsen för trianglar:

$$A = \frac{ab\sin C}{2}$$



Speciellt för en liksidig triangel med omkretsen P gäller det att $a = b = c = P/3$ och $A = B = C = 60°$.

$$f(P) = \frac{\left(\frac{P}{3}\right)^2 \sin 60°}{2} = \frac{P^2 \frac{\sqrt{3}}{2}}{2 \cdot 9} = \frac{P^2}{12\sqrt{3}},\ P > 0.$$

7.3

a)

$$f(-2) = \frac{1}{-2+1} = -1.$$

b)

$$f(a+b) = \frac{1}{a+b+1}.$$

c)

$$f(a) + f(b) = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} = \frac{b+1+a+1}{(a+1)(b+1)} = \frac{a+b+2}{(a+1)(b+1)}.$$

d)

$$f(a)+b=\frac{1}{a+1}+b=\frac{1+b(a+1)}{a+1}=\frac{b(a+1)+1}{a+1}.$$

e)

$$f(ab)=\frac{1}{ab+1}.$$

f)

$$f(a)f(b)=\frac{1}{a+1}\frac{1}{b+1}=\frac{1}{(a+1)(b+1)}.$$

g)

$$f(\frac{a}{b})=\frac{1}{\frac{a}{b}+1}=\frac{b}{a+b}.$$

h)

$$\frac{f(a)}{f(b)}=\frac{\frac{1}{a+1}}{\frac{1}{b+1}}=\frac{b+1}{a+1}.$$

7.4

a)

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}=\frac{x+1-2}{x+1}=1-\frac{2}{x+1}\implies f(x)=f(-x)\iff$$
$$\iff 1-\frac{2}{x+1}=1-\frac{2}{-x+1}\iff\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-x}\implies[x\neq -1 \text{ eller } 1]\implies$$
$$\implies 1+x=1-x\iff x=0.$$

b)

$$f(x)=\frac{1}{x^2+1}\implies f(x)=f(-x)\iff\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{(-x)^2+1}=\frac{1}{x^2+1}\iff 0=0,$$

det gäller alltså att $f(x)=f(-x)$, vilket betyder att $f(x)$ är en jämn funktion.

7.5

$$f(x)=(x+a)^2-3\implies f(-1)=(-1+a)^2-3=1\iff(a-1)^2=4\iff$$
$$\iff a-1=\pm 2\iff\begin{cases}a=-1,\\ a=3.\end{cases}$$

7.6

$f(x) = x^2$ och $g(x) = 3x$.

a)

$$f(2x) = g(-x) \iff (2x)^2 = 3(-x) \iff 4x^2 + 3x = 0 \iff$$
$$\iff x(4x+3) = 0 \iff \begin{cases} x = 0, \\ x = -\frac{3}{4}. \end{cases}$$

b)

$$g(x) > f(x) \iff 3x > x^2 \iff x^2 - 3x < 0 \iff x(x-3) < 0.$$

x		0			3	
x	-	0	+	+	+	+
$x-3$	-	-	-	-	0	+
$x(x-3)$	+	0	-	-	0	+

$$0 < x < 3.$$

c)

$$h(x) = f(x-1) + g(x-1) = (x-1)^2 + 3(x-1) = x^2 - 2x + 1 + 3x - 3 =$$
$$= x^2 + x - 2 = 0 \iff \begin{cases} x = -2, \\ x = 1. \end{cases}$$

7.7

För att en kurva ska kunna vara en graf till en funktion $y = f(x)$ kan den bara ha ett y-värde för ett givet x-värde. Alltså om man drar ett vertikalt streck ska den bara skära grafen i en punkt.

a)

Ja.

b)

Ja.

c)

Ja.

d)

Nej.

7.8

Principen här är att lösa för y och om man får en entydig lösning, det vill säga att ett x-värde svarar mot precis ett y-värde.

a)

$$x + y = 4 \iff y = 4 - x \text{ (giltig).}$$

b)

$$x^2 + y^2 = 4 \iff y = \pm\sqrt{4 - x^2} \text{ (ogiltig eftersom } \pm\text{).}$$

c)

$$x + y = 4 \iff y = 4 - x$$

(giltig eftersom om man sätter in ett naturligt tal får man också ut ett).

d)

$$x + y \leq 4 \iff y \leq 4 - x \text{ (ogiltig eftersom ett område).}$$

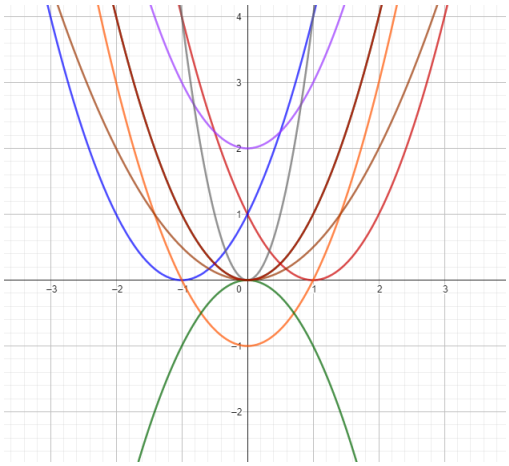
e)

$$x = y^2 \iff y = \pm x \text{ (ogiltig eftersom } \pm\text{).}$$

7.9

$$f(x) = x^2 \implies af(bx + c) + d = a(bx + c)^2 + d = a(b^2x^2 + 2bcx + c^2) + d =$$
$$= ab^2x^2 + 2abcx + ac^2 + d,$$

detta sammanfattar alla fall som dyker upp i deluppgifterna, men jag orkar inte skriva om varje, det är bara en massa parabler som man ska rita. Jag kan dock visa alla kurvor i en graf.



7.10

a)

Sänk hela grafen två steg i y-led.

b)

Translatera grafen ett steg åt höger i x-led.

c)

Halvera alla y-värden, det vill säga tryck ihop grafen i y-led.

d)

Tryck ihop grafen i x-led så att den blir hälften så bred.

e)

Negera alla y-värden, vilket motsvarar en spegling i x-axeln.

f)

Spegla grafen i y-axeln.

7.11

a)

Lösning finns redan.

b)

Samma princip som i a), man delar upp funktionen i sina delar och sedan ritar man dem var för sig.

7.12

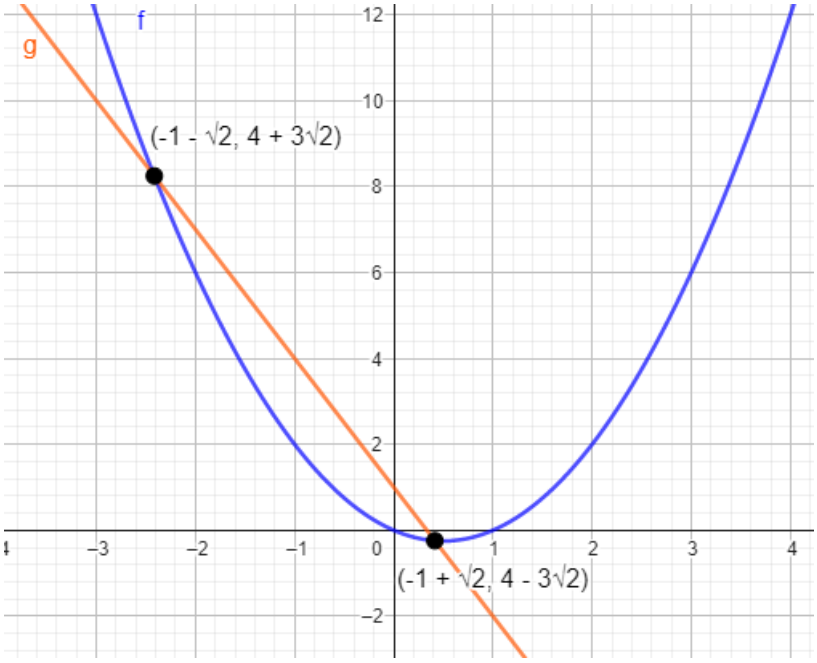
Samma som 7.11, det är bara att rita rätt graf på rätt intervall.

7.13

a)

$$f(x) = x^2 - x,\ g(x) = 1 - 3x \implies f(x) = g(x) \iff x^2 - x = 1 - 3x \iff$$
$$\iff x^2 + 2x - 1 = 0 \iff \begin{cases} x = -1 - \sqrt{2}, \\ x = -1 + \sqrt{2}. \end{cases}$$

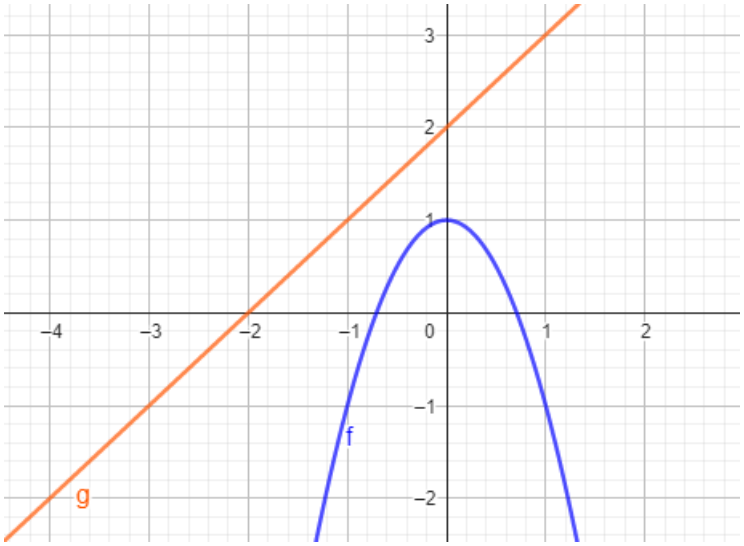
y-värdena fås lättast av att använda $g(x)$. $g(-1-\sqrt{2}) = 4+3\sqrt{2}$ och $g(-1+\sqrt{2}) = 4-3\sqrt{2}$, alltså är skärningspunkterna $(-1-\sqrt{2}, 4+3\sqrt{2})$ och $(-1+\sqrt{2}, 4-3\sqrt{2})$.



Ur figuren kan vi se att $f(x) > g(x) \iff x < -1 - \sqrt{2}$ eller $x > -1 + \sqrt{2}$.

b)

$$f(x) = 1 - 2x^2,\ g(x) = 2 + x \implies f(x) = g(x) \iff 1 - 2x^2 = 2 + x \iff$$
$$\iff 2x^2 + x + 1 = 0 \iff 2(x + \frac{1}{4})^2 + \frac{7}{8} = 0 \implies \text{lösning saknas.}$$



Detta förtydligar att det inte finns några skärningspunkter, och $f(x) < g(x)$ för alla x.

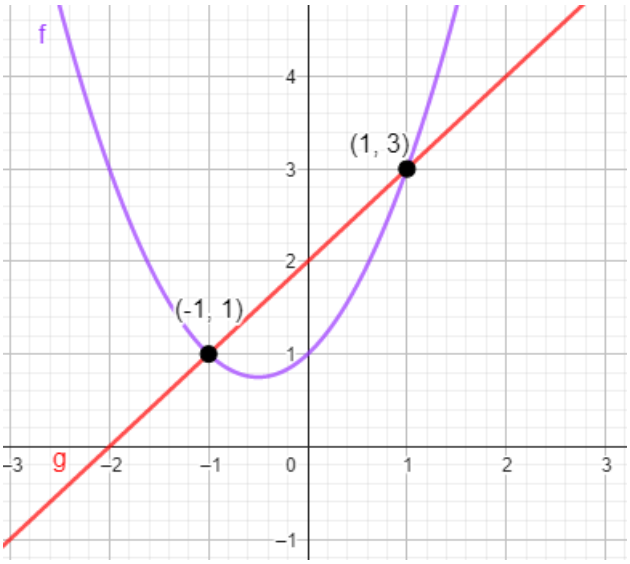
7.14

$$f(x) = x^2 + x + 1 \implies f(-1) = 1,\ f(1) = 3,$$

$$g(x) - y_1 = k(x - x_1),\ k = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{3 - 1}{2} = 1,$$

$$(x_1, y_1) = (-1, f(-1)) = (-1, 1) \implies g(x) - 1 = x + 1 \iff g(x) = x + 2.$$

Här har enpunktsformeln för en rät linje används i beskrivningen av $g(x)$. Vi vet också redan skärningspunkterna, vilket betyder att vi enkelt kan rita f och g i samma figur.



Härur ser vi tydligt att $f(x) < g(x) \iff -1 < x < 1$.

7.15

a)

Det är ett polynom, så alla x-värden är tillåtna. Det minsta fås då $x = 0$, vilket betyder att definitionsmängden är $D_f = \mathbb{R}$, och värdemängden är $V_f = [1, \infty)$.

b)

Här begränsas definitionsmängden av rotuttrycket. Diskriminanten, det under rottecknet, måste vara större än eller lika med noll, vilket betyder att $x \geq 0$. Vidare ser man tydligt att $1 - \sqrt{x}$ kommer att minska när x ökar, detta betyder att funktionen har ett största värde, men inte ett minsta. Alltså är $D_f = [0, \infty)$ och $V_f = (-\infty, 1]$.

c)

Samma sak gäller för definitionsmängden här $\sqrt{t} \implies t > 0$. Dessutom kommer $F(t)$ att minska då t ökar, vilket betyder att det största värdet är 1, men när t blir väldigt stort kommer funktionen att vara nära noll - dock inte lika med noll. Alltså är $D_F = [0, \infty)$ och $V_F = (0, 1]$.

d)

$g(t) = \sqrt{4-t^2} \implies 4 - t^2 \geq 0 \iff -2 \leq t \leq 2$, vilket är vår definitionsmängd. Man inser ganska lätt att g:s största värde är $\sqrt{4-0^2} = 2$ och att det minsta är $\sqrt{4-2^2} = 0$. $D_g = [-2, 2]$ och $V_g = [0, 2]$.

e)

Nästan samma definitionsmängd som i d) eftersom nämnaren inte kan vara noll blir olikheterna strikta istället. För värdemängden kommer det minsta värdet att vara då nämnaren är så stor som möjligt, det vill säga för $z = 0 \implies g(z) = 1/2$. Det största värdet är lite lurigare, detta beror på att när $z \to \pm 2 \implies \sqrt{4-z^2} \to 0^+$. Vi delar alltså på ett väldigt litet positivt tal, så funktionen kommer att sticka iväg mot oändligheten. $D_g = (-2, 2)$ och $V_g = [\frac{1}{2}, \infty)$.

7.16

Byt ut $g(x)$ med t, vilket direkt ger att $f(t) = t^5$.

7.17

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))(x) = e^{\sin x} \implies f(x) = [\text{exempelvis}] = e^x \implies g(x) = \sin x.$$

7.18

Lösning finns redan.

7.19

$$f(x) = x^2 + 1 \text{ och } g(x) = ax + b \implies (f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) \iff$$
$$\iff f(g(x)) = g(f(x)) \iff (ax+b)^2 + 1 = a(x^2+1) + b \iff$$
$$\iff a^2x^2 + 2abx + b^2 + 1 = ax^2 + a + b \iff (a^2 - a)x^2 + 2abx + 1 - a - b + b^2 = 0 =$$
$$= 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 \cdot 1 \iff \begin{cases} a^2 - a & = 0, \\ 2ab & = 0, \\ 1 - a - b + b^2 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a(a-1) & = 0, \\ a \text{ eller } b & = 0, \\ 1 - a - b + b^2 & = 0. \end{cases}$$

Detta ger två fall: 1) $a = 0$ och 2) $b = 0 \implies a = 1$ (eftersom den översta ekvationen ska gälla).

$$a = 0 \implies 1 - 0 - b + b^2 = 0 \iff b^2 - b + 1 = 0 \implies \text{inga reella lösningar.}$$

Alltså fungerar det endast då $a = 1$ och $b = 0$.

7.20

Lösning finns redan.

7.21

För att en funktion ska kunna ha en invers måste den vara injektiv, vilket betyder att varje y svarar mot ett entydigt x (om man har $y = f(x)$). Det kan också beskrivas som om man drar en horisontell linje ska den som mest skära funktionskurvan en gång.

a)

Ja.

b)

Nej.

c)

Ja.

d)

Nej.

7.22

a)

$$y = f(x) = x^2 \implies x = {}_{(-)}^{+}\sqrt{y} = \sqrt{y} = f^{-1}(y) \implies f^{-1}(x) = \sqrt{x},\ x \geq 0.$$

Detta fungerar eftersom intervallet som betraktas är $x \geq 0$ (det var därför den negativa roten ignorerades), på vilket funktionen är injektiv, men om vi hade tittat på hela den reella tallinjen hade funktionen inte var injektiv och inte haft en invers där. Om man hade tittat på $x \leq 0$, så hade inversen istället varit $-\sqrt{x}$.

b)

Samma procedur ger

$$g(x) = x^3 \implies g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}\ x \geq 0.$$

Denna invers hade faktiskt kunnat vara definierad på $\mathbb{R}$, men i uppgiften är intervallet givet.

c)

$$(f^{-1} \circ f) = f^{-1}(f(x)) = \sqrt{x^2} = x\ (x \geq 0),$$
$$(g^{-1} \circ g) = g^{-1}(g(x)) = \sqrt[3]{x^3} = x.$$

Detta resultat är föga förvånande eftersom det är typ så man definierar inversa funktioner.

7.23

Man behöver egentligen inte bry sig särskilt mycket om huruvida en entydig invers funktion existerar under tiden man räknar. Detta beror på att om man lyckas lösa ut x utan några $\pm$ eller sådant, så har man ju hittat en invers. Vidare kanske det också är så att om man har ett $\pm$ så bestämmer det intervall man tittar på om man kan förkasta den ena av lösningarna, och då har man ändå en invers.

a)

$$y = f(x) = 3x + 4 \iff x = \frac{y-4}{3} = f^{-1}(y) \implies f^{-1}(x) = \frac{x-4}{3},\ x \in \mathbb{R}.$$

b)

Finns ej, funktionen är ej injektiv på det angivna intervallet ($\mathbb{R}$).

c)

$$y = f(x) = \frac{1}{x+2} \iff [x > -2] \iff x + 2 = \frac{1}{y} \iff x = \frac{1}{y} - 2 = f^{-1}(y) \implies$$
$$f^{-1}(x) = \frac{1}{x} - 2,\ x > -2.$$

d)

Finns ej, funktionen är ej injektiv på det angivna intervallet ($\mathbb{R}$).

e)

$$y = f(x) = x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1 \iff x + 2 = {}_{(-)}^{+}\sqrt{y-1} \iff$$
$$\iff x = \sqrt{y-1} - 2 = f^{-1}(y) \implies f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} - 2,\ x \geq 1.$$

Den negativa roten utesluts på grund av att $x \geq -2 \iff x + 2 \geq 0$. Att $x \geq 1$ i inversen kan dels ses av roten, och dels av kvadratkompletteringen, $y = (x+2)^2 + 1 \geq (-2+2)^2 + 1 = 1$. Vidare är det också någon sats som säger att definitionsmängd och värdemängd byter plats för en invers funktion, vilket intuitivt känns rimligt.

f)

$$y = f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \iff [x > 0] \iff y^2 - 1 = \frac{1}{x} \iff [x > 0] \iff$$
$$\iff x = \frac{1}{y^2 - 1} = f^{-1}(y) \implies f^{-1}(x) = \frac{1}{x^2 - 1}\ x > 1.$$

Återigen kommer villkoret $x > 1$ från $\sqrt{1 + \frac{1}{x}} > \sqrt{1 + 0} = 1$, sträng olikhet eftersom $1/x$ aldrig är noll.

7.24

För att undersöka detta ansätter vi en godtycklig potensfunktion $f(x) = ax^b$ och betraktar $f \circ f$.

$$(f \circ f)(x) = f(f(x))(x) = a(f(x))^b = a(ax^b)^b = aa^b x^{bb} = a^{b+1}x^{b^2}.$$

För en invers funktion gäller det att $(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x) = x$. Alltså ska

$$a^{b+1}x^{b^2} = x = 1 \cdot x^1 \implies \begin{cases} a^{b+1} = 1, \\ b^2 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} b = \pm 1, \\ a^{b+1} = 1 \end{cases} \implies$$

$$b = 1 \implies a^2 = 1 \iff a = \pm 1,$$

$$b = -1 \implies a^0 = 1 \implies 0 = 0 \text{ (gäller för alla } a \neq 0).$$

Detta betyder att följande funktioner fungerar som sin egna invers

$$f(x) = \pm x^1 = \pm x,$$

$$f(x) = ax^{-1} = \frac{a}{x},\ a \neq 0.$$

7.25

$$f(x) = 2x + 1 \text{ och } g(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R}.$$

a)

$$y = f(x) = 2x + 1 \iff x = \frac{y-1}{2} = f^{-1}(y) \implies f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2},\ x \in \mathbb{R}.$$

b)

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))(x) = 2g(x) + 1 = 2x^2 + 1,\ x \in \mathbb{R}.$$

c)

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))(x) = (f(x))^2 = (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1,\ x \in \mathbb{R}.$$

d)

$$(f^{-1} \circ g)(x) = f^{-1}(g(x))(x) = \frac{g(x) - 1}{2} = \frac{x^2 - 1}{2},\ x \in \mathbb{R}.$$

7.26

a)

Injektiv bara. Inte monoton eftersom, exempelvis, $f(-2) > f(-1)$, men $f(-1) < f(1)$. Funktionen går också mot $\pm\infty$ vid noll, så den är ej begränsad.

b)

Nu blir vi av med nästan alla problem från a). Funktionen är avtagande på intervallet, vilket betyder att den är monoton, den är fortfarande injektiv, och den är nedåt begränsad av noll. Den går dock fortfarande mot oändligheten vid $x = 0$.

c)

Injektiv, monoton (avtagande), begränsad (både uppåt och nedåt).

d)

Logaritmen är obegränsad vid nollan, men att intervallet är begränsat betyder att den är uppåt begränsad. Vidare är den också strängt växande och injektiv.

7.27

a)

Om en funktion, $f(x)$, är växande betyder det att om $b > a \implies f(b) \geq f(a) \iff f(b) - f(a) \geq 0$. Låt $g(x)$ och $h(x)$ vara växande funktioner och $b > a$.

$$f(x) = g(x) + h(x) \implies f(b) - f(a) = g(b) + h(b) - (g(a) + h(a)) \geq$$

$$\geq [\text{båda funktionerna är växande}] \geq g(a) + h(a) - g(a) - h(a) = 0.$$

$\square$

b)

Sanningshalten är obefintlig i allmänhet. Ta till exempel två räta linjer som är växande och multiplicera ihop dem. Detta kommer att ge en parabel som är avtagande ibland. Problemet någon av de växande funktionerna antar negativa värden.

7.28

$$y = f(x) = 2 + 3e^{-4x} \iff e^{-4x} = \frac{y-2}{3} \implies -4x = \ln\frac{y-2}{3} \iff$$
$$\iff x = -\frac{1}{4}\ln\frac{y-2}{3} = f^{-1}(y) \implies f^{-1}(x) = -\frac{1}{4}\ln\frac{x-2}{3},\ x > 2.$$

På grund av hur inversa funktioner fungerar måste de vara monotona, det finns nog lämpliga satser att referera till här - men det har med injektiviteten att göra. Inversen är inte begränsad eftersom den har en logaritm som sticker iväg när det inuti närmar sig noll.

7.29

$$\text{Jämn: } f(-x) = f(x).$$
$$\text{Udda: } g(-x) = -g(x).$$

Låt också $f(x)$ beteckna funktionerna i respektive deluppgift.

a)

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x) \implies \text{jämn.}$$

b)

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x) \implies \text{udda.}$$

c)

$$f(-x) = (-x)^2 + 2(-x) + 1 = x^2 - 2x + 1 \neq f(x) \text{ eller } -f(x) \implies \text{varken eller.}$$

d)

$$f(-x) = (-x)(e^{-x} + e^{-(-x)}) = -x(e^{-x} + e^{x}) = -x(e^{x} + e^{-x}) = -f(x) \implies \text{udda.}$$

Kapitel 8

Jag tänker skippa uppgifter som går ut på att rita en graf, eller åtminstone inte försöka göra någon fullständig lösning. Man kan vända sig till GeoGebra för att visualisera funktioner lätt.

8.1

För e) och f) kan man göra följande omskrivningar:

$$\frac{x-1}{x} = \frac{x}{x} - \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{x},$$

$$\frac{x-3}{x-4} = \frac{x-4+1}{x-4} = \frac{x-4}{x-4} + \frac{1}{x-4} = 1 + \frac{1}{x-4}.$$

8.2

Inses lätt.

8.3

$$\frac{2}{3}\alpha = \frac{3}{2} \implies \alpha = \left(\frac{3}{2}\right)^2.$$

Alltså om vi tar likheten som är given i uppgiften och höjer upp den till α kommer vi att få värdet vi söker.

$$x^{2/3} = 16 \implies \left(x^{2/3}\right)^{\alpha} = \left(x^{2/3}\right)^{(3/2)^2} = x^{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}} =$$

$$= x^{3/2} = 16^{\alpha} = 16^{(3/2)^2} = 16^{9/4} = \left(16^{1/4}\right)^9 = 2^9 = 512.$$

8.4

$$(x^{1/3}+2)(x^{1/3}-2) = 12 \implies \left(x^{1/3}\right)^2 - 2^2 = x^{2/3} - 4 = 12 \implies x^{2/3} = 16 \implies$$

$$\implies x = \pm 16^{3/2} = \pm 4^3 = \pm 64.$$

Det är $\pm$ eftersom vi tar roten ur och $x^{1/3}$ fungerar för alla reella tal, alltså för negativa. Dock anger facit bara den positiva, men båda fungerar, så det är lite oklart.

8.5

$$y = \sqrt{1-x^2} \implies y^2 = 1 - x^2 \iff x^2 + y^2 = 1,$$

vilket är enhetscirkeln, dock är det endast positiva y-värden som betraktas, som då motsvarar den övre halvan. Resten inses lätt.

8.6

Inses lätt. Om man vill kan man göra omskrivningen $(0,5)^x = \left(e^{\ln 0{,}5}\right)^x = e^{-x\ln 2}$, och på samma sätt är $(0,5)^{-x} = e^{x\ln 2}$.

8.7

Inses lätt.

8.8

a)

$$3^x + 3^{x+1} = 3^x + 3\cdot 3^x = 4\cdot 3^x.$$

b)

$$e^x + e^{x+1} = e^x + ee^x = (e+1)e^x.$$

c)

$$(e^x + e^{-x})^2 - e^{2x} - e^{-2x} = (e^x)^2 + 2e^x e^{-x} + \left(e^{-x}\right)^2 - e^{2x} - e^{-2x} =$$
$$= e^{2x} + 2e^0 + e^{-2x} - e^{2x} - e^{-2x} = 2.$$

d)

$$\frac{1}{e^x} + \frac{1}{e^{x+1}} = e^{-x} + e^{-x-1} = e^{-x} + e^{-1}e^{-x} = (1+\frac{1}{e})e^{-x} = \frac{e+1}{e}e^{-x} = (e+1)e^{-x-1}.$$

8.9

$$(2^x + 2^{-x})^2 - 4^x - 4^{-x} = (2^x)^2 + 2\cdot 2^x 2^{-x} + \left(2^{-x}\right)^2 - \left(2^2\right)^x - \left(2^2\right)^{-x} =$$
$$= 2^{2x} + 2\cdot 2^0 + 2^{-2x} - 2^{2x} - 2^{-2x} = 2.$$

8.10

I allmänheten kan man skriva om alla tal på följande sätt $a = b^{\log_b a} = \log_b b^a$, där $\log_b$ är logaritmen med bas b. Detta förutsätter att $a > 0$, eftersom annars är inte logaritmen definierad. Låt lg beteckna tiologaritmen. Med detta kan man direkt skriva om alla uppgifter direkt, och e) går ej.

8.11

Precis samma som för 8.10, men nu är det den naturliga logaritmen, ln, istället för tiologaritmen. Återigen går inte e) eftersom en potens alltid är strikt positiv, och kan därmed aldrig anta värdet noll. d) går inte heller eftersom $\pi > 3 \iff 3 - \pi < 0$.

8.12

Inses lätt.

8.13

Inses lätt (använd logaritmlagar för att göra det lättare).

8.14

a)

$$\lg \frac{7}{4} + \lg \frac{8}{7} = \lg \left(\frac{7}{4} \cdot \frac{8}{7}\right) = \lg 2.$$

b)

$$\frac{1}{2} \ln 100 - 2 \ln 2 = \ln 100^{1/2} - \ln 2^2 = \ln \frac{10}{4} = \ln \frac{5}{2}.$$

c)

$$\lg 36 - 3 \lg 6 = \lg 6^2 - 3 \lg 6 = 2 \lg 6 - 3 \lg 6 = -\lg 6 = \lg \frac{1}{6}.$$

d)

$$\log_3 27 = \log_3 3^3 = 3.$$

e)

$$\log_2 11 + \log_2 \frac{1}{11} = \log_2 11 - \log_2 11 = 0.$$

f)

$$\frac{1}{2}(\ln 16 - \ln 4) = \frac{1}{2}(\ln 2^4 - \ln 2^2) = \frac{1}{2}(4 \ln 2 - 2 \ln 2) = \ln 2.$$

8.15

a)

$$\ln \frac{1}{x^2} + \ln x^3 = \ln \frac{1}{(x^2} x^3) = \ln x.$$

b)

$\ln e^{2x} = 2x$ (den naturliga logaritmen är ju inversen till exponentialfunktionen).

c)

$$\ln e^t = t.$$

d)

$$\ln e^x + \ln e^{-x} = x - x = 0.$$

8.16

$$\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + \ln\frac{3}{4} = \ln\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\right) = \ln\frac{1}{4} = -\ln 4.$$

8.17

a)

$$\ln(a+b) = \ln a + \ln b = \ln ab \implies a + b = ab \implies a - ab = -b \implies$$
$$\implies a(1-b) = -b \implies a = \frac{b}{b-1}.$$

Alltså inte i allmänhet, dessutom måste $b > 1$ eftersom $a > 0$ på grund av att det står inuti en logaritm.

b)

$$\ln(a+b) - \ln a - \ln b = \ln(a+b) - \ln ab = \ln\frac{a+b}{ab} = \ln\left(\frac{b}{ab} + \frac{a}{ab}\right) = \ln\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Ja, under förutsättningen att $\ln a$ och $\ln b$ är definierade ($a, b > 0$).

8.18

$$\ln\left(x(\sqrt{1+e^x} - \sqrt{e^x})\right) + \ln\left(\sqrt{1+e^{-x}}\right) + 1 =$$
$$= \ln x + \ln\left(\sqrt{e^x}(\sqrt{e^{-x}+1} - 1)\right) + \ln\left(\sqrt{1+e^{-x}} + 1\right) =$$
$$= \ln x + \ln e^{x/2} + \ln\left(\sqrt{1+e^{-x}} - 1\right) + \ln\left(\sqrt{1+e^{-x}} + 1\right) =$$
$$= \ln x + \frac{x}{2} + \ln\left((\sqrt{1+e^{-x}} - 1)(\sqrt{1+e^{-x}} + 1)\right) =$$
$$= \ln x + \frac{x}{2} + \ln(1 + e^{-x} - 1) = \ln x + \frac{x}{2} + \ln e^{-x} = \ln x + \frac{x}{2} - x = -\frac{x}{2} + \ln x.$$

Nej.

8.19

$$3^x = \left(e^{\ln 3}\right)^x = e^{x\ln 3} = e^y \implies y = x\ln 3.$$

8.20

a)

$$\lg x = \lg e^{\ln x} = \ln x \cdot \lg e = \lg e \cdot \ln x.$$

Betrakta produkten $\lg e \cdot \ln 10$, och speciellt

$$e^{\lg e \cdot \ln 10} = \left(e^{ln10}\right)^{\lg e} = 10^{\lg e} = e \implies$$

$$\implies \lg e \cdot \ln 10 = 1 \implies \lg e = \frac{1}{\ln 10} \implies \lg x = \frac{\ln x}{\ln 10}.$$

b)

Utifrån a)-uppgiften kan vi gissa att följande likhet gäller:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \iff \log_b a \cdot \log_a x = \log_b x.$$

För att visa detta utgår vi från b upphöjt till det ekvivalenta vänsterledet

$$b^{\mathrm{VL}} = b^{\log_b a \cdot \log_a x} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a x} = a^{\log_a x} = x = b^{\log_b x} = b^{\mathrm{HL}}.$$

$\square$

Nu kan vi direkt använda formeln med $a = 5$ och $b = 3$,

$$\log_5 x = \frac{\log_3 x}{\log_3 5}.$$

8.21

a)

$$10^x = 2,72 \implies x = \lg 2,72.$$

b)

$$10^x = 0,43 \implies x = \lg 0,43.$$

c)

$$10^x = 0,0001 = 10^{-4} \implies x = \lg 10^{-4} = -4.$$

d)

$$5 \cdot 10^x = 125 \implies x = \lg 25.$$

e)

$$3 \cdot 10^x + 4 = 21 \implies x = \lg \frac{17}{3}.$$

f)

Lösning saknas eftersom $10^x > 0$, men $-3,14 < 0$.

8.22

a)

$$e^x = 3,7 \implies x = \ln 3,7.$$

b)

$$3e^x = 5 \implies x = \ln \frac{5}{3}.$$

c)

$$7e^x - 2 = 3 \implies x = \ln \frac{5}{7}.$$

8.23

a)

$$\ln x = 3,8 \implies x = e^{3,8}.$$

b)

$$\ln x = 0,41 \implies x = e^{0,41}.$$

c)

$$\ln x = -2,34 \implies x = e^{-2,34}.$$

d)

$$3 = 8 + \ln x \implies x = e^{-5}.$$

e)

$$12 = 18 \ln x \implies x = e^{\frac{2}{3}}.$$

f)

$$3 \ln x + 7 = 4 \implies x = e^{-1}.$$

8.24

a)

$$4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0 \implies \left(2^2\right)^x - 6 \cdot 2^x + 8 = \left(2^x\right)^2 - 6 \cdot 2^x + 8 = 0 \implies [t = 2^x] \implies$$

$$\implies t^2 - 6t + 8 = 0 \implies \begin{cases} t = 2, \\ t = 4 \end{cases} \implies \begin{cases} 2^x = 2, \\ 2^x = 4 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1, \\ x = 2. \end{cases}$$

b)

$$9^x + 6 \cdot 3^x = 7 \implies \left(3^2\right)^x + 6 \cdot 3^x - 7 = \left(3^x\right)^2 + 6 \cdot 3^x - 7 = 0 \implies [t = 3^x] \implies$$

$$\implies t^2 + 6t - 7 = 0 \implies \begin{cases} t = -7, \\ t = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} 3^x = -7 \text{ (saknar lösning)}, \\ 3^x = 1 \end{cases} \implies x = 0.$$

c)

$$2^x \cdot 3^{x-2} = 4 \implies 2^x \cdot 3^x = 2^2 \cdot 3^2 \implies x = 2.$$

Funktionen $2^x \cdot 3^{x-2}$ är också strängt växande, så det finns som mest en lösning. Man kan också fortsätta förenklingen, vilket ger

$$2^x \cdot 3^x = 2^2 \cdot 3^2 \implies (2 \cdot 3)^x = (2 \cdot 3)^2 \implies 6^x = 6^2.$$

8.25

a)

$$\lg x = 3 + \lg 2 \implies x = 10^{3+\lg 2} = 10^3 \cdot 10^{\lg 2} = 2000.$$

b)

$$\ln x = 1 + 3 \ln 2 \implies x = e^{1+3\ln 2} = ee^{ln2^3} = 8e.$$

c)

$$\lg x = 2 \lg 5 - 1 \implies x = 10^{2\lg 5 - 1} = 10^{\lg 5^2} 10^{-1} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}.$$

d)

$$\ln x = 3 - 2 \ln 2 \implies x = e^{3-2\ln 2} = e^3 e^{2^{-2}} = \frac{e^3}{4}.$$

8.26

Lösning finns redan.

8.27

a)

$$\lg(\lg x) = 3 \implies \lg x = 10^3 \implies x = 10^{(10^3)} = 10^{1000}.$$

b)

$$e^{2x} - 2e^x - 3 = 0 \implies [t = e^x] \implies t^2 - 2t - 3 = 0 \implies$$

$$\implies \begin{cases} t = -1, \\ t = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} e^x = -1 \text{ (lösning saknas)}, \\ e^x = 3 \end{cases} \implies x = \ln 3.$$

c)

$$\lg(x+2) = 1 + \lg x = \lg 10 + \lg x = \lg 10x \implies x + 2 = 10x \implies x = \frac{2}{9}.$$

Egentligen ska man vara mer noggrann med definitionsmängder och sådant, i denna uppgift har vi villkoret att $x > 0$, vilket svaret uppfyller.

8.28

Här är det viktigt att kontrollera så att en eventuell lösning är inom det giltiga intervallet för uppgiften, vilket bestäms av logaritmerna.

a)

Vi har villkoret $x - 1 > 0 \iff x > 1$, att vi inte tittar på den andra logaritmen beror på att argumentet är $x > x - 1$, alltså $x - 1$ är mer begränsande.

$$\ln x + \ln(x-1) = \ln 6 \implies \ln\big(x(x-1)\big) = \ln 6 \implies x^2 - x = 6 \implies$$

$$\implies x^2 - x - 6 = 0 \implies \begin{cases} x = -2 \not> 1, \\ x = 3 \end{cases} \implies x = 3.$$

b)

$x^3 > 0 \iff x > 0$ $(x^2 > 0,\ x \neq 0)$.

$\ln x^2 = \ln x^3 \implies x^2 = x^3 \implies x^2(x-1) = 0 \implies x = 1$ ($x = 0$ är en falsk lösning).

c)

$x - 4 > 0 \iff x > 4$.

$$2\ln(x-4) = \ln x + \ln 2 \implies \ln(x-4)^2 = \ln 2x \implies x^2 - 8x + 16 = 2x \implies$$

$$\implies x^2 - 10x + 16 = 0 \implies \begin{cases} x = 2 \not> 4 \\ x = 8 \end{cases} \implies x = 8.$$

d)

$x > 2$.

$$\ln x + \ln(x-2) = 2 \implies \ln\big(x(x-2)\big) = \ln e^2 \implies x^2 - 2x = e^2 \implies$$

$$\implies x^2 - 2x - e^2 = 0 \implies \begin{cases} x = 1 - \sqrt{1+e^2} \not> 2 \\ x = 1 + \sqrt{1+e^2} \end{cases} \implies x = 1 + \sqrt{1+e^2}.$$

e)

Uttrycket innanför logaritmen är giltigt för alla x.

$$\ln(3^x + 3^{x+1}) = 1 \implies \ln\big(3^x(1+3)\big) = \ln 3^x + \ln 4 = x\ln 3 + \ln 4 = 1 \implies$$

$$\implies x = \frac{1 - \ln 4}{\ln 3}.$$

8.29

$$m(t) = m(0)e^{-\lambda t} \implies m(T) = m(0)/2 \implies m(0)e^{-\lambda T} = m(0)/2 \implies$$

$$\implies -\lambda T = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 \implies \lambda = \frac{\ln 2}{T}.$$

8.30

I alla uppgifter är villkoret att $x > 0$. För c) och d) används formeln som härleddes i 8.20.

a)

$$\ln 2x + \ln 3x = \ln 4x \implies \ln 6x^2 = \ln 4x \implies 6x^2 = 4x \implies$$

$$\implies x(3x-2) = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \not> 0, \\ x = \frac{2}{3} \end{cases} \implies x = \frac{2}{3}.$$

b)

$$\ln 2x \cdot \ln 3x = \ln 4x \implies (\ln 2 + \ln x)(\ln 3 + \ln x) = \ln 4 + \ln x \implies [t = \ln x] \implies$$

$$\implies \ln 2 \cdot \ln 3 + t\ln 2 + t\ln 3 + t^2 = \ln 2^2 + t \implies$$

$$\implies t^2 + (\ln 2 + \ln 3 - 1)t + \ln 2 \cdot \ln 3 - 2\ln 2 = t^2 + (\ln 6 - 1)t + \ln 2 \cdot (\ln 3 - 2) = 0 \implies$$

$$\implies t = \ln x = \frac{1 - \ln 6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1 - \ln 6}{2}\right)^2 + \ln 2 \cdot (2 - \ln 3)} \implies$$

$$\implies x = e^{\frac{1-\ln 6}{2} \pm \sqrt{\frac{(1-\ln 6)^2}{4} + \ln 2 \cdot (2 - \ln 3)}}.$$

c)

$$\log_2 x + \log_3 x = \log_4 x \implies \frac{\ln x}{\ln 2} + \frac{\ln x}{\ln 3} = \frac{\ln x}{\ln 4} \implies$$
$$\ln x \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \ln x = 0 \implies x = 1.$$

d)

$$\log_2 x \cdot \log_3 x = \log_4 x \implies \frac{\ln x}{\ln 2} \cdot \frac{\ln x}{\ln 3} = \frac{\ln x}{\ln 4} \implies (\ln x)^2 = \ln x \cdot \frac{\ln 2 \cdot \ln 3}{\ln 2^2} =$$
$$= \ln x \cdot \frac{\ln 2 \cdot \ln 3}{2 \ln 2} = \ln x \cdot \frac{\ln 3}{2} \implies \ln x \cdot \left(\ln x - \frac{\ln 3}{2}\right) \implies$$
$$\implies \begin{cases} \ln x = 0, \\ \ln x = \frac{\ln 3}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1, \\ x = e^{(\ln 3)/2} = \left(e^{\ln 3}\right)^{1/2} = \sqrt{3} \end{cases}$$

8.31

a)

$$e^x - e^{-x} = 6 \implies \left(e^x\right)^2 - 6e^x - 1 = 0 \implies e^x = 3 \underset{(-)}{+} \sqrt{3^2 + 1} \implies x = \ln(3 + \sqrt{10}),$$

det blir en andragradsekvation i e^x efter att man har multiplikation med e^x, och den negativa roten utesluts eftersom $e^x > 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

b)

$$\ln \frac{1}{x} + \frac{1}{\ln x} = 2 \implies [t = \ln x] \implies -t + \frac{1}{t} = 2 \implies t^2 + 2t - 1 = 0 \implies$$
$$\implies t = \ln x = -1 \pm \sqrt{2} \implies x = e^{-1 \pm \sqrt{2}}.$$

c)

$$\ln x \cdot \ln x^2 = 3 \implies 2(\ln x)^2 = 3 \implies \ln x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \implies x = e^{\pm\sqrt{3/2}}.$$

8.32

$\cos\alpha = 1/3$ och rätvinklig triangel betyder att sin kommer vara positiv (eftersom $0 < \alpha < 90°$). Vidare gäller trigonometriska ettan $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \implies \sin\alpha = \underset{(-)}{+}\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - (1/3)^2} = \sqrt{8/3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Vidare är

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2},$$

samt $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha = 1/3$ och $\tan(90° - \alpha) = 1/\tan\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

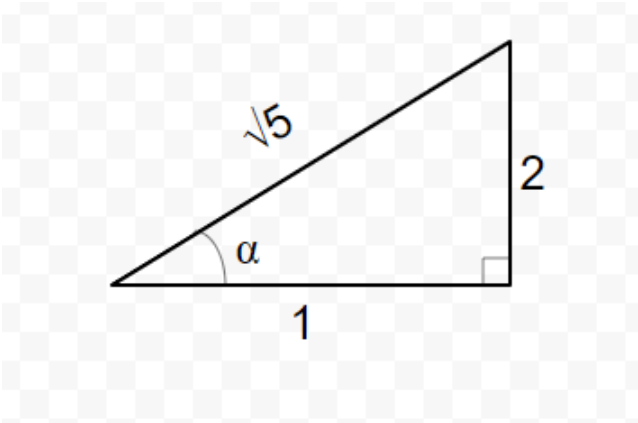
8.33

Rita upp en rätvinklig triangel som ger att $\tan\alpha = 2 = 2/1$, det vill säga att den motstående kateten har längden 2 och den närliggande har längden 1. Pythagoras berättar för oss att hypotenusan då har en längd på $\sqrt{5}$, varpå vi kan bilda sinus och cosinus.

$$\sin\alpha = \frac{\text{motstående}}{\text{hypotenusa}} = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos = \frac{\text{närliggande}}{\text{hypotenusa}} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{2}.$$



8.34

Avståndet längs marken är den närliggande kateten i den bildade rätvinkliga triangeln, detta betyder att

$$\cos\alpha = \frac{\text{närliggande}}{\text{hypotenusa}} = \frac{x}{l},$$

där x är den sökta sträckan och $\alpha \in [64^\circ, 78^\circ]$. Löser man ut x fås

$$x = l\cos\alpha \in [l\cos 68^\circ, l\cos 78^\circ].$$

8.35

Höjden på fyren är den motstående kateten och vi vill ha avståndet till den botten av fyren, det vill säga längden av den närliggande kateten.

$$\tan\alpha = \frac{\text{motstående}}{\text{närliggande}} = \frac{h}{x} \implies x = \frac{h}{\tan\alpha} = \frac{96}{\tan 13^\circ} \approx 416 \text{ m}.$$

8.36

Om man ritar upp figuren kan man utläsa en rätvinklig triangel med sträckan AD som hypotenusa, detta ger oss höjden som

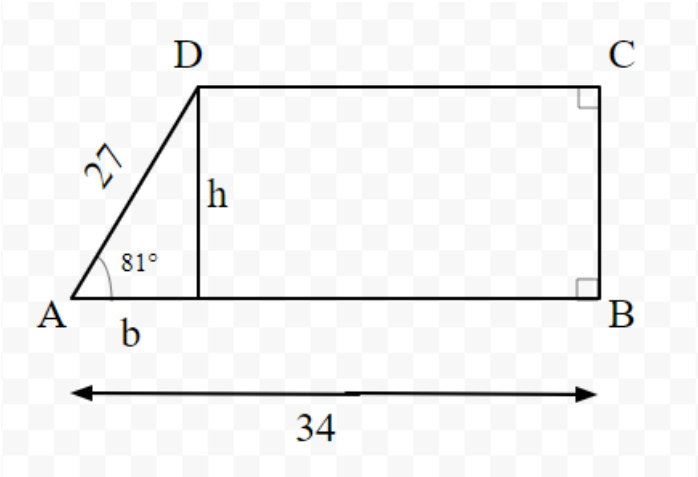
$$\sin \angle A = \frac{h}{AD} \implies h = AD \sin \angle A.$$

Vidare behövs även sträckan längs AB som utgör basen till triangeln, den kan fås av sambandet

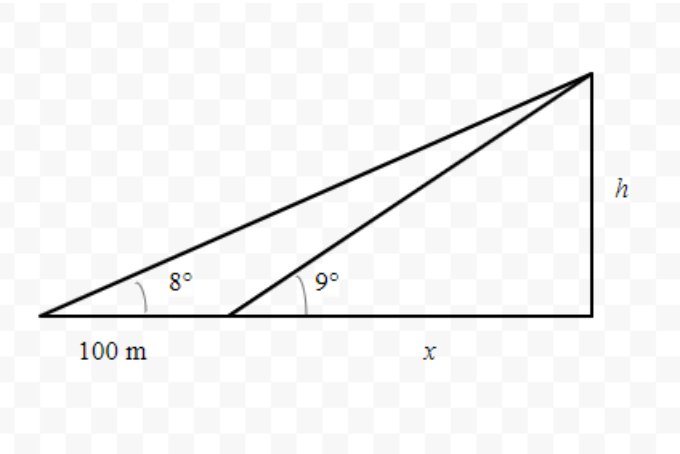
$$\cos \angle A = \frac{b}{AD} \implies b = AD \cos \angle A.$$

Vi kan nu bestämma arean

$$(AB - b)h + \frac{bh}{2} = (34 - 27\cos 81^\circ) \cdot 27 \sin 81^\circ + \frac{27\cos 81^\circ \cdot 27 \sin 81^\circ}{2} \approx 850 \text{ m}^2.$$



8.37



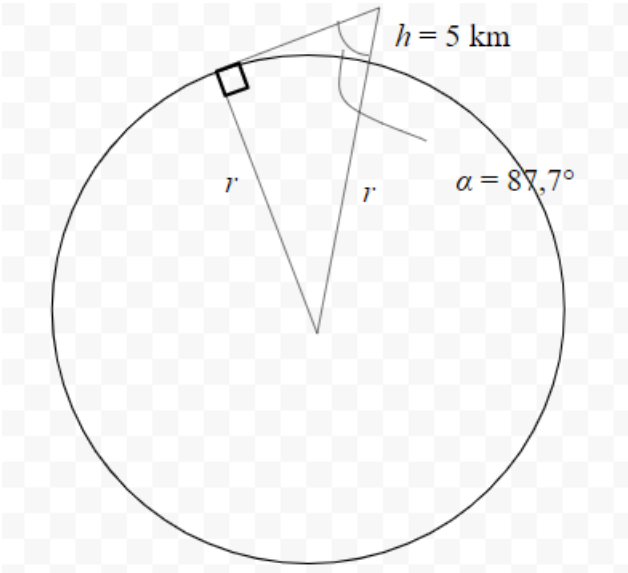
Utifrån bilden kan vi ställa upp följande relationer

$$\begin{cases} \tan 8^\circ = \frac{h}{x+100}, \\ \tan 9^\circ = \frac{h}{x} \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{h}{\tan 8^\circ} - 100, \\ x = \frac{h}{\tan 9^\circ} \end{cases} \implies$$

$$\implies x = x \implies \frac{h}{\tan 8^\circ} - 100 = \frac{h}{\tan 9^\circ} \implies \frac{h}{\tan 8^\circ} - \frac{h}{\tan 9^\circ} = 100 \implies$$

$$\implies h = \frac{100}{\frac{1}{\tan 8^\circ} - \frac{1}{\tan 9^\circ}} \approx 125 \text{ m och } x = \frac{h}{\tan 9^\circ} \approx 788 \text{ m.}$$

8.38

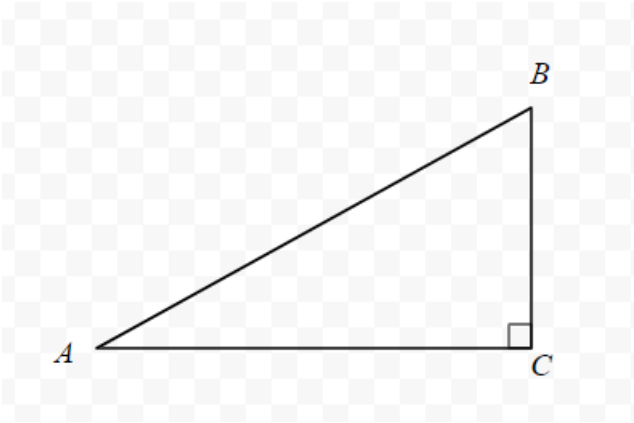


I den väldigt skalenliga bilden kan vi se den trigonometriska relationen

$$\sin\alpha = \frac{r}{r+h} \implies (r+h)\sin\alpha = r \implies r(1-\sin\alpha) = h\sin\alpha \implies$$

$$\implies r = \frac{h\sin\alpha}{1-\sin\alpha} = \frac{5\sin 87,7^\circ}{1-\sin 87,7^\circ} \approx 6202 \text{ km.}$$

8.39



a)

$$\cos A = \frac{AC}{AB} \implies AC = AB\cos A = 4\cos 60^\circ = 2 \text{ cm}.$$

b)

$$\cos B = \frac{BC}{AB} \implies B = \arccos\frac{BC}{AB} = \arccos\frac{2\sqrt{2}}{4} = 45^\circ.$$

c)

$$\tan A = \frac{BC}{AC} \implies A = \arctan\frac{BC}{AC} = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}} = 30^\circ.$$

8.40

För en rätvinklig triangel gäller det att

$$\sin\alpha = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenusan}},$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{närliggande katet}}{\text{hypotenusan}},$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{motstående katet}}{\text{närliggande katet}}.$$

a)

$$\sin\alpha = \frac{x}{a} \implies x = a\sin\alpha.$$

b)

$$\tan\alpha = \frac{x}{a} \implies x = a\tan\alpha.$$

c)

$$\tan\alpha = \frac{a}{x} \implies x = \frac{a}{\tan\alpha} = a\cot\alpha.$$

d)

$$\cos\alpha = \frac{x}{a} \implies x = a\cos\alpha.$$

e)

$$\cos\alpha = \frac{a}{x} \implies x = \frac{a}{\cos\alpha}.$$

f)

$$\sin\alpha = \frac{a}{x} \implies x = \frac{a}{\sin\alpha}.$$

8.41

Se facit.

8.42

π radianer motsvarar 180°, alltså kan man använda omvandlingarna

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi},$$

och

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}.$$

8.43

Se med hjälp av grafiskt ritverktyg.

8.44

Trigonometriska ettan ger att

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \implies \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \pm\sqrt{1-0,6^2} = \pm\sqrt{0,8^2} = \pm 0,8.$$

8.45

I samtliga uppgift gäller det att $k \in \mathbb{Z}$.

a)

$$\sin(\pi - x) = \sin x \implies \sin x = \frac{1}{2} \implies \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi = \frac{5\pi}{6} + k2\pi. \end{cases}$$

b)

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \implies \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, \\ x = \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) + k2\pi = \frac{4\pi}{3} + k_1 2\pi = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \ (k = k_1 - 1). \end{cases}$$

c)

$$\cos(-x) = \cos x \implies \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies x = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi.$$

d)

$$\tan(x + \pi) = \tan x \implies \tan x = -1 \implies x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$$

e)

$$\tan x = \sqrt{3} \implies x = \frac{\pi}{3} + k\pi.$$

f)

$$\cos 3x = \frac{1}{2} \implies 3x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \implies x = \pm\frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}.$$

8.46

$$\begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2}, \\ \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \implies \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \implies x = \frac{\pi}{3} + k\pi \in (\pi, 2\pi) \implies$$

$$\implies x = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}.$$

8.47

a)

Lösning finns redan.

b)

Eftersom $\cos(-x) = \cos x$ måste x uppfylla likheten

$$3x = \pm x + k2\pi \implies \begin{cases} 4x = k2\pi, \\ 2x = k2\pi \end{cases} \implies \begin{cases} x = k\frac{\pi}{2}, \\ x = k\pi, \end{cases}$$

eftersom k är ett heltal kommer $k\frac{\pi}{2}$ att täcka alla x som $k\pi$ gör, alltså räcker det med att skriva $x = k\frac{\pi}{2}$.

b)

På grund av att $\tan x$ är π-periodisk gäller det att

$$\tan 3x = \tan x \implies 3x = x + k\pi \implies x = k\frac{\pi}{2}.$$

Dock är tangens odefinierad då cosinus är noll, eftersom det står i nämnaren, detta sker då $x = \pm\frac{\pi}{2} + k2\pi = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Av denna anledning måste lösningen begränsas till $x = k\pi$.

8.48

a)

Dubbla vinkeln för cosinus, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$, ger att

$$\sin x = 1 - 2\sin^2 x \implies [t = \sin x] \implies 2t^2 + t - 1 = 0 \implies \begin{cases} t = -1, \\ t = 1/2 \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{cases} \sin x = -1, \\ \sin x = 1/2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi = \frac{5\pi}{6} + k2\pi. \end{cases}$$

Detta kan sammanfattas i ett uttryck, eftersom de tre olika uttrycken skiljer sig med $\frac{2\pi}{3}$. Då får man att $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$. Alternativt kan man göra som tipset förespråkar, men eftersom jag gör så i b)-uppgiften gjorde jag detta för att få lite variation.

b)

$$\cos 4x = \sin x = \cos\frac{\pi}{2} - x \implies 4x = \pm(\frac{\pi}{2} - x) + k2\pi \implies$$

$$\implies \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi, \\ 4x = -(\frac{\pi}{2} - x) + k2\pi \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5}, \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}. \end{cases}$$

8.49

a)

$$|\sin x| = \begin{cases} -\sin x, & x \in (\pi + k2\pi, 2\pi + k2\pi), \\ \sin x, & x \in [k2\pi, \pi + k2\pi]. \end{cases}$$

Vi kan nu tänka lite för att underlätta vårt arbete. $|\sin x|$ och $|\cos x|$ antar samma värde i fyra punkter på en period, $(\pm\frac{\pi}{4},\ \pm\frac{3\pi}{4})$. Eftersom $|\sin x| \geq 0$, för alla x, kan lösningar endast finnas där $\cos x \geq 0$, vilket betyder att de enda punkterna som ger oss giltiga lösningar är $x = \pm\frac{\pi}{4}$ eftersom de ligger i första och fjärde kvadranterna. Detta ger lösningen

$$x = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi.$$

Man kan givetvis också dela upp ekvationen i två stycken där man tar bort absolutbeloppet och tittar så att lösningarna man erhåller är inom det intervall som specificerats, vilket kommer att ge samma svar, men det är jobbigare.

b)

$$\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2x} = \frac{2}{\sin 2x} = 7 \implies$$

$$\implies \sin 2x = \frac{2}{7} \implies \begin{cases} 2x = \arcsin \frac{2}{7} + k2\pi, \\ 2x = \pi - \arcsin \frac{2}{7} + k2\pi \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{1}{2}\arcsin \frac{2}{7} + k\pi, \\ x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin \frac{2}{7} + k\pi. \end{cases}$$

8.50

Låt oss först betrakta fallet då $x + \frac{\pi}{4} = t \in [-\pi, \pi]$, när vi sedan hittar en lösning är det bara att utvidga den 2π-periodiskt för att få en allmän lösning.

$$|\cos t| < \frac{1}{2} \iff -\frac{1}{2} < \cos t < \frac{1}{2},$$

och

$$\begin{cases} \cos t > -\frac{1}{2}, \\ \cos t < \frac{1}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} -\frac{2\pi}{3} < t < \frac{2\pi}{3}, \\ t < -\frac{\pi}{3} \text{ eller } t > \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Alltså måste $-\frac{2\pi}{3} < t < -\frac{\pi}{3}$ eller $\frac{\pi}{3} < t < \frac{2\pi}{3}$. Med $x = t - \frac{\pi}{4}$ får vi att $-\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} < x < -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ eller $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} < x < \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, vilket är samma sak som att $-\frac{5\pi}{12} < x < -\frac{\pi}{12}$ eller $\frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12}$. Dessa två intervall skiljer sig med π radianer, vilket betyder att vi kan ta det ena och utvidga det π-periodiskt för att få hela lösningen, istället för att utvidga båda 2π-periodiskt. Detta ger lösningen $\frac{\pi}{12} + k\pi < x < \frac{5\pi}{12} + k\pi$.

8.51

Lösning finns redan.

8.52

$$A\sin(kx + \alpha) = A\sin kx \cos\alpha + A\sin\alpha\cos kx \implies$$

$$\implies a\sin kx + b\cos kx = A\sin(kx + \alpha) \implies \begin{cases} a = A\cos\alpha, \\ b = A\sin\alpha \end{cases} \implies$$

$$\implies a^2 + b^2 = (A\cos\alpha)^2 + (A\sin\alpha)^2 = A^2 \implies A = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Där det av enkelhetsskäl skall gälla att $A > 0$ och att $0 \leq \alpha < 2\pi$.

a)

$$A = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \implies \begin{cases} \cos\alpha = \frac{a}{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sin\alpha = \frac{b}{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \implies \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

b)

$$A = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2 \implies \begin{cases} \cos\alpha = \frac{a}{A} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin\alpha = \frac{b}{A} = \frac{-1}{2} \end{cases} \implies \alpha = \frac{11\pi}{6}.$$

Tänk på hur plus eller minus på $\cos\alpha$ och $\sin\alpha$ påverkar i vilken kvadrant som α ligger.

c)

$$A = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5 \implies \begin{cases} \cos\alpha = \frac{a}{A} = \frac{-4}{5}, \\ \sin\alpha = \frac{b}{A} = \frac{3}{5}, \end{cases}$$

eftersom cosinus är negativt och sinus är positivt ligger α i den andra kvadranten ($\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$). Alltså är $\alpha = \arccos\frac{-4}{5}$, eftersom arccos har värdemängden $[0, \pi]$. (arcsin har värdemängden $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, och kan därför inte vara korrekt vinkel.)

8.53

Enligt hjälpvinkelsatsen kan man skriva om det inom absolutbeloppet på följande sätt

$$\sin x + 2\cos x = \sqrt{1^2 + 2^2}\sin x + \alpha = \sqrt{5}\sin x + \alpha,$$

där det exakta värdet på vinkeln α ej är relevant för uppgiften. Vidare, eftersom

$$\sin x \in [-1, 1] \implies |\sin x| \leq 1 \implies |\sin x + 2\cos x| = \sqrt{5}|\sin x + \alpha| \leq \sqrt{5}\cdot 1 = \sqrt{5}. \quad \square$$

8.54

Inses lätt med GeoGebra (det finns andra grafiska ritverktyg också).

8.55

$$\sin(x - y) = a\sin x\cos y + b\cos x\sin y.$$

$$x = 0 \implies \sin(0 - y) = -\sin y = a\sin 0\cos y + b\cos 0\sin y = b\sin y \implies b = -1,$$

$$y = 0 \implies \sin(x - 0) = \sin x = a\sin x\cos 0 + b\cos x\sin 0 = a\sin y \implies a = 1.$$

8.56

a)

$$\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{4} \implies \sin 2x = \frac{1}{2} \implies \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, \\ 2x = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi, \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi. \end{cases}$$

b)

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies 2x = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi \implies x = \pm\frac{\pi}{12} + k\pi.$$

c)

$$\cos x + \sin x = [8.52\text{ a)}] = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + k2\pi, \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi, \\ x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi. \end{cases}$$

d)

$$\cos 2x + 3\cos x - 1 = 2\cos^2 x - 1 + 3\cos x - 1 = 0 \implies [\cos x = t] \implies$$

$$\implies 2t^2 + 3t - 2 = 0 \implies \begin{cases} t = \cos x = -2 \text{ (saknar lösning)}, \\ t = \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \implies x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi.$$

e)

$$\sin 4x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) = \cos 3x \implies 3x = \pm\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) + k2\pi \implies$$

$$\implies \begin{cases} -x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, \\ 7x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, \\ x = \frac{\pi}{14} + k\frac{2\pi}{7}. \end{cases}$$

f)

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 3\sin x + 2 \implies [\sin x = t] \implies 2t^2 + 3t + 1 = 0 \implies$$

$$\implies \begin{cases} t = \sin x = -1, \\ t = \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, \\ x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi. \end{cases}$$

8.57

a)

$$\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, \\ 3x = \pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}, \\ x = \frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}. \end{cases}$$

b)

$$3\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies \sin x = \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \implies \begin{cases} x = \arcsin\frac{1}{2\sqrt{3}} + k2\pi, \\ x = \pi - \arcsin\frac{1}{2\sqrt{3}} + k2\pi. \end{cases}$$

c)

$$\sin^3 x = 3\sin x \implies \sin x(\sin^2 x - 3) = 0 \implies$$

$$\implies [\sin^2 x \leq 1 \implies \sin^2 x - 3 > 0] \implies \sin x = 0 \implies x = k\pi.$$

d)

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x = \frac{1}{2} \implies 2x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \implies x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$$

e)

$$\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = 1 \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x) =$$
$$= \cos 2x = \frac{1}{2} \implies x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi.$$

f)

$$\cos^4 x + \sin^4 x = \cos^4 x + (1 - \cos^2 x)^2 = [\cos x = t] = t^4 + 1 - 2t^2 + t^4 = \frac{1}{2} \implies$$
$$\implies t^4 - t^2 + \frac{1}{4} = 0 \implies (t^2 - \frac{1}{2})^2 \implies t^2 = \frac{1}{2} \implies \cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \implies$$
$$\implies \begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi, \\ x = \pm\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \implies x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}.$$

8.58

$$\sin x \cos x = a \implies \frac{1}{2}\sin 2x = a \implies \sin 2x = 2a,$$

alltså om $|a| > \frac{1}{2}$ kommer ekvationen att sakna lösning, eftersom sinus värdemängd är intervallet $[-1, 1]$. För övriga a får vi

$$\begin{cases} 2x = \arcsin 2a + k2\pi, \\ 2x = \pi - \arcsin 2a + k2\pi \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{1}{2}\arcsin 2a + k\pi, \\ x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin 2a + k\pi. \end{cases}$$

8.59

Dubbla vinkeln för sinus, $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, och trigonometriska ettan, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, ger

$$\text{VL} = 1 + \sin 2x = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = (\sin x + \cos x)^2 = \text{HL}.$$

□

8.60

Additionsformeln för sinus, $\sin x + y = \sin x \cos y + \sin y \cos x$, ger

$$\text{VL} = \sin(x + \frac{\pi}{6}) + \sin(x + \frac{\pi}{3}) = \sin x \cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}\cos x + \sin x \cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\cos x =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{3}+1}{2}(\sin x + \cos x) = \text{HL}.$$

□

8.61

Återigen ger additionsformeln för sinus att

$$\text{VL} = \sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) =$$

$$= \sin x + \sin x \cos\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3}\cos x + \sin x \cos\frac{4\pi}{3} + \sin\frac{4\pi}{3}\cos x =$$

$$= \sin x - \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 0 = \text{HL}.$$

□

Alternativt, med lite kännedom om geometriska summor och komplexa tal kan man göra följande

$$\sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = \text{Im}(e^{ix} + e^{i(x+2\pi/3)} + e^{i(x+4\pi/3)}),$$

och

$$e^{ix} + e^{i(x+2\pi/3)} + e^{i(x+4\pi/3)} = e^{ix}(1 + e^{2\pi/3} + e^{4\pi/3}) = e^{ix}\sum_{k=0}^{2} e^{i2k\pi/3} =$$

$$= e^{ix}\frac{1 - \left(e^{i2\pi/3}\right)^3}{1 - e^{2\pi/3}} = e^{ix}\frac{1 - e^{i2\pi}}{1 - e^{2\pi/3}} = e^{ix}\frac{1 - 1}{1 - e^{2\pi/3}} = 0.$$

Eftersom $\text{Im}(0) = 0$ följer likheten. □

Om man vill lära sig mer om beräkningar som liknar det ovan kan man söka efter roots of unity", vilket kan användas till en massa saker inom matematiken.

8.62

a)

$$\cos x \in [-1, 1] \implies \cos^2 x \in [0, 1] \implies$$
$$\implies f(x) = 1 - 3\cos^2 x \in [1 - 3 \cdot 1, 1 - 3 \cdot 0] = [-2, 1].$$

b)

$$g(x) = 2\cos 2x - \sin^2 x = 2(1 - 2\sin^2 x) - \sin^2 x = 2 - 5\sin^2 x,$$

och precis som $\cos^2$ ligger $\sin^2$ i intervallet $[0, 1]$, vilket ger värdemängden

$$[2 - 5 \cdot 1, 2 - 5 \cdot 0] = [-3, 2].$$

8.63

Följande relationer kommer att användas: $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \implies \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, $\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$, och $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

$$\sin^2\frac{x}{2} + \frac{\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{2\sin x}}{\tan x + \cot x} = \frac{1}{2}(1 - \cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)) + \frac{\frac{1}{2\sin x\cos x} + \frac{1}{2\sin x}}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}} =$$

$$= \frac{1}{2}(1-\cos x) + \frac{\frac{1}{2\sin x\cos x} + \frac{1}{2\sin x}}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}} \cdot \frac{\sin x\cos x}{\sin x\cos x} = \frac{1}{2}(1-\cos x) + \frac{\frac{1}{2} + \frac{\cos x}{2}}{\sin^2 x + \cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{2}(1-\cos x) + \frac{1}{2}\frac{1+\cos x}{1} = \frac{1}{2}(2-0) = 1.$$

8.64

Med subtraktionsformlerna för sinus och cosinus, dubbla vinkeln för sinus, och trigonometriska ettan får man att

$$\text{HL} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}\right)^2 = \left(\frac{\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\theta}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2 = \left(\frac{\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}}\right)^2 =$$

$$= \frac{\cos^2\frac{\theta}{2} - 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2} + 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta} = \text{VL}.$$

□

8.65

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \implies \begin{cases} \cos x = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}, \\ \sin x = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}} \end{cases} \implies$$

$$\implies \tan\frac{\pi}{8} = \frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}} = [\tan\frac{\pi}{8} > 0] = \frac{\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1}}) = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}-1.$$

8.66

$$\sin x = \frac{\sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)}{1} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{1 + \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right)}{1} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{1 + \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

□

8.67

Syftet med arcusfunktionerna är att de ska vara inversa funktioner till dem trigonometriska, vilket kräver att de är injektiva. Dock är de trigonometriska funktionerna periodiska, så för att man ska kunna skapa en invers funktion begränsar man sin definitionsmängd till ett intervall där funktionen endast antar varje värde en gång. Detta betyder att arcsin har definitionsmängden $[-1, 1]$ och värdemängden $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Vidare har arccos har definitionsmängden $[-1, 1]$ och värdemängden $[0, \pi]$. Slutligen har arctan definitionsmängden $(-\infty, \infty)$ och värdemängden $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Kom ihåg att värdemängd och definitionsmängd byter plats för en funktion och dess invers. Notera även de öppna intervallen för arctan, vilket beror på att tangens inte är definierad i $\pm\frac{\pi}{2}$. Det som man ska ta med sig från denna uppsats är att arcusfunktionerna endast har ett värde för ett givet argument, så en ekvation $\arctan x = \frac{\pi}{4}$ har endast en lösning, medan ekvationen $\tan x = 1$ har oändligt många. Med hjälp av detta kan man nog lösa uppgift 8.67-8.74.

8.68

Se uppgift 8.67.

8.69

Se uppgift 8.68.

8.70

Se uppgift 8.69.

8.71

Se uppgift 8.70.

8.72

Se uppgift 8.71.

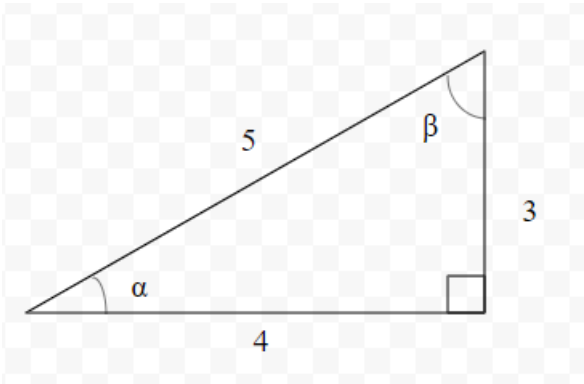
8.73

Se uppgift 8.72.

8.74

Se uppgift 8.73.

8.75



$$\sin\alpha = \frac{3}{5} \implies \alpha = \arcsin\frac{3}{5}.$$
$$\cos\alpha = \frac{4}{5} \implies \alpha = \arccos\frac{4}{5}.$$
$$\tan\alpha = \frac{3}{4} \implies \alpha = \arctan\frac{3}{4}.$$
$$\sin\beta = \frac{4}{5} \implies \beta = \arcsin\frac{4}{5}.$$
$$\cos\beta = \frac{3}{5} \implies \beta = \arccos\frac{3}{5}.$$
$$\tan\beta = \frac{4}{3} \implies \beta = \arctan\frac{4}{3}.$$

8.76

$$\arcsin Q = \frac{\pi}{6} \implies Q = \frac{1}{2} \implies \arccos Q = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

8.77

a)

$\cos x \in [-1, 1]$ för alla $x \in \mathbb{R}$ och $\arccos x \in [0, \pi] \implies \arccos\cos x = x$ då $x \in [0, \pi]$. Om $x > \pi$ kommer inte arccos att ha det värdet i sin värdemängd, och alltså kan likheten omöjligen gälla då.

b)

Eftersom vi har bytt plats på cos och arccos kommer vi istället att kunna avbilda på värdemängden för cos, det vill säga $[-1, 1]$. Så nu kommer likheten istället att endast att gälla då $x \in [-1, 1]$, det är också det intervall som arccos är definierad på.

c)

Ett liknande argument som i a)-uppgiften antyder att likheten endast kommer att gälla när x är inom arctan:s värdemängd, $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, vilket är vårt svar (öppet intervall eftersom arctan inte antar värdet $\pm\pi/2$).

8.78

Lösning finns redan.

8.79

$$\tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}\frac{2\frac{\sin x}{\cos x}}{1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}.$$

Låt $\alpha = \arctan\frac{2}{3}$ och $\beta = \arctan\frac{12}{5}$. Vi vill nu undersöka $\tan 2\alpha$ och $\tan\beta$.

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2\tan(\arctan\frac{2}{3})}{1-\tan^2(\arctan\frac{2}{3})} = \frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{4}{9}} = \frac{4\cdot 3}{9-4} = \frac{12}{5},$$

$$\tan\beta = \tan(\arctan\frac{12}{5}) = \frac{12}{5}.$$

Detta betyder att $2\alpha = \beta + k\pi$, men arctan:s värdemängd är $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, så det enda besväret är om antingen α eller β är negativt. Det är dock uppenbart att de båda är positiva, vilket betyder att likheten följer. $\square$

8.80

$$y = \arctan x \implies x = \tan y = \frac{\sin y}{\cos y} \implies x^2 = \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1-\cos^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1}{\cos^2 y} - 1 \implies$$
$$\implies \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + x^2 \implies \cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}.$$

$\square$

8.81

Lösning finns redan.

8.82

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

a)

$$\cosh -x = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x. \quad \square$$

b)

$$\sinh -x = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\sinh x. \quad \square$$

c)

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2e^0 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2e^0 + e^{-2x})) = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1. \quad \square$$

d)

$$\cosh^2 x + \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2e^0 + e^{-2x} + e^{2x} - 2e^0 + e^{-2x}) = \frac{1}{4}(2e^{2x} + 2e^{-2x}) = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \cosh 2x. \quad \square$$

e)

$$2\cosh x \sinh x = 2\frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} = [\text{konjugateregeln}] = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \sinh 2x. \quad \square$$

Kapitel 9

9.1

a)

Gränsvärdet blir 0, eftersom man delar på något större och större.

b)

Gränsvärdet är ∞ för att logaritmen är en strängt växande funktion.

c)

0 eftersom funktion avtar och är positiv, alternativt kan man se det som $1/e^x$, vilket ungefär motsvarar a).

d)

$\pi/2$ - tänk att man tar tangens och på intervallet $(-\pi/2, \pi/2)$ och bara speglar den i linjen $y = x$, då kommer den speglade funktionen, som är arctan, att närma sig $\pi/2$.

e)

Gränsvärdet existerar inte eftersom sinus är periodisk och man det ∞ är inte ett specifikt värde.

f)

$$x > 0 \implies |x| = x \implies \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1 \to 1,\ x \to \infty.$$

9.2

Lösning finns redan.

9.3

Eftersom gränsvärdena är för $x \to \infty$ kommer högstagradstermerna avgöra vad gränsvärdet blir, därför faktoriserar vi dem från täljare och nämnare för att lättare kunna urskilja resultatet.

a)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 10x + 1}{2x^3 + 4x^2 + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^3} \frac{1 - 10x^{-1} + x^{-2}}{2 + 4x^{-1} + x^{-3}} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \frac{1 - 10/x + 1/x^2}{2 + 4/x + 1/x^3} = 0 \cdot \frac{1 - 0 + 0}{2 + 0 + 0} = 0.$$

b)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-10x+1}{3x^2+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}\frac{1-10x^{-1}+x^{-2}}{3+x^{-1}}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-10x^{-1}+x^{-2}}{3+x^{-1}}=\frac{1-0+0}{3+0}=\frac{1}{3}.$$

c)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)^3}{(x^3+2)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^6+3x^4+3x^2+1}{x^6+4x^3+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^6}{x^6}\frac{1+3x^{-2}+3x^{-4}+x^{-6}}{1+4x^{-3}+4x^{-6}}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+3x^{-2}+3x^{-4}+x^{-6}}{1+4x^{-3}+4x^{-6}}=\frac{1+0+0+0}{1+0+0}=1.$$

d)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+10x+1}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x}\frac{1+10x^{-1}+x^{-2}}{2+x^{-1}}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}x\frac{1+10x^{-1}+x^{-2}}{2+x^{-1}}=\infty\cdot\frac{1+0+0}{2+0}=\infty.$$

9.4

Exponentiellt växande funktioner (till exempel $(1,01)^x$) kommer alltid att växa snabbare än potensfunktioner (exempelvis x^{100}) för stora x. Alltså blir gränsvärdet 0.

9.5

$e\approx 2,718$. Bryt sedan ut den snabbast växande termen i täljare och nämnare för att systematiskt undersöka gränsvärdet. En lista från snabbast till långsammast växande funktioner, då $x\to\infty$, är (med rimliga krav så att de inte går mot 0 eller något sådant): exponentiella funktioner, potensfunktioner/polynom, och logaritmer.

a)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^8+4x+2^x}{2^x+x^6+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{2^x}\frac{x^8/2^x+4x/2^x+1}{1+x^6/2^x+1/2^x}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^8/2^x+4x/2^x+1}{1+x^6/2^x+1/2^x}=\frac{0+0+1}{1+0+0}=1.$$

b)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+(2,5)^x+\ln x}{2e^x+x^{10}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x}\frac{1+(2,5)^x/e^x+\ln x/e^x}{2+x^{10}/e^x}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+(2,5/e)^x+\ln x/e^x}{2+x^{10}/e^x}=\frac{1+0+0}{2+0}=\frac{1}{2}.$$
$$(2,5/e<1\implies(2,5/e)^x\to 0,\ x\to\infty.)$$

c)

Den snabbast växande termen i täljaren är x^4 eftersom logaritmen bara har ett förstagradspolynom framför sig, och i nämnaren är x den snabbast växande termen eftersom basen till den exponentiella termen är mindre än 1, vilket betyder att den går mot 0 då x växer obegränsat.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4 + x\ln x}{x + \left(\frac{2}{3}\right)^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{x} \frac{1 + x^{-3}\ln x}{1 + x^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)^x} = \lim_{x\to\infty} x^3 \frac{1 + x^{-3}\ln x}{1 + x^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)^x} = \infty \cdot \frac{1+0}{1+0} = \infty.$$

$x^{-3}\ln x = \frac{\ln x}{x^3} \to 0,\ x \to \infty$ eftersom polynom växer snabbare än logaritmer.

9.6

a)

Polynom vinner över logaritmer, oavsett hur många gånger man multiplicerar dem med sig själva, alltså blir

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^{300}}{x} = 0.$$

b)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln 5x^2}{\ln 6x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln 5 + \ln x^2}{\ln 6 + \ln x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln 5 + 2\ln x}{\ln 6 + 3\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\ln x} \frac{\ln 5/\ln x + 2}{\ln 6/\ln x + 3} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln 5/\ln x + 2}{\ln 6/\ln x + 3} = \frac{0+2}{0+3} = \frac{2}{3}.$$

c)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\ln x}{x + \ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\ln x}{x} \frac{1}{1 + \ln x/x} = \lim_{x\to\infty} \ln x \frac{1}{1 + \ln x/x} = \infty \cdot \frac{1}{1+0} = \infty.$$

9.7

a)

$$\frac{x+1}{x+2} = \frac{x+2-1}{x+2} = 1 - \frac{1}{x+2},$$
$$\frac{x+2}{x+1} = \frac{x+1+1}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1}.$$

Se facit för bild.

b)

Med omskrivningen ovan ser man direkt att funktionerna som begränsar $f(x)$ går mot 1, då $x \to \infty$, vilket betyder att

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1.$$

9.8

a)

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \implies \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{x^2} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x^2} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} \iff 0 \leq \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x^2} \leq \lim_{x\to\infty} 0,$$

varpå instängningssatsen ger att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x^2} = 0.$$

b)

Samma argument som i a) ger att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-1}{\ln x} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{\ln x} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln x} \iff 0 \leq \lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{\ln x} \leq \lim_{x\to\infty} 0 \implies \lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{\ln x} = 0.$$

c)

Eftersom sinus varierar mellan -1 och 1 för evigt existerar inte gränsvärdet.

d)

Eftersom $\arctan x < \frac{\pi}{2} \implies \frac{\ln x}{\arctan x} > \frac{\ln x}{\pi/2} = \frac{2}{\pi} \ln x$, för tillräckligt stora x. Om vi nu ser att gränsvärdet av detta nya uttryck går mot oändligheten och vi vet att det är mindre än vad vi började med, kan vi enkelt konstatera att det ursprungliga också gör det. Det är uppenbart att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{\pi} \ln x = \infty \implies \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\arctan x} = \infty.$$

9.9

Lösning finns redan.

9.10

Notera att $\sqrt{x^2} = |x|$, och om $x \to \infty$ är $|x| = x$, men om $x \to -\infty$ är $|x| = -x$.

a)

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x+1) - x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{1+1/x} + 1)} = 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1+0} + 1} = 0.$$

b)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+3x)-(x^2+1)}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x-1}{\sqrt{x^2}(\sqrt{1+3/x}+\sqrt{1+1/x^2})}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{|x|}\frac{3-1/x}{\sqrt{1+3/x}+\sqrt{1+1/x^2}}=[x>0]=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x}\frac{3-1/x}{\sqrt{1+3/x}+\sqrt{1+1/x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3-1/x}{\sqrt{1+3/x}+\sqrt{1+1/x^2}}=\frac{3-0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}}=\frac{3}{2}.$$

c)

Samma omskrivningar som i b) ger att

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|}\frac{3-1/x}{\sqrt{1+3/x}+\sqrt{1+1/x^2}}=[x<0]=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x}\frac{3-1/x}{\sqrt{1+3/x}+\sqrt{1+1/x^2}}=\lim_{x\to-\infty}-\frac{3-1/x}{\sqrt{1+3/x}+\sqrt{1+1/x^2}}=$$

$$=-\frac{3-0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}}=-\frac{3}{2}.$$

9.11

a)

Standardgränsvärde, vars värde är e, (egentligen en definition), men jag är dock lite osäker på om man bara skriver ut det för $+\infty$, så jag kan härleda värdet för $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\begin{bmatrix}t=-x\\ t\to\infty\end{bmatrix}=\lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t-1}{t}\right)^{-t}=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^{t}=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t-1+1}{t-1}\right)^{t}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}=$$

$$=\begin{bmatrix}s=t-1\\ s\to\infty\end{bmatrix}=\lim_{s\to\infty}\left(1+\frac{1}{s}\right)\left(1+\frac{1}{s}\right)^{s}=1\cdot e=e.$$

b)

Eftersom $x\to 0$ från båda sidor kommer variabelbytet $t=1/x \implies t\to\pm\infty$, beroende på från vilket håll x går mot 0.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln 1+x}{x}=\begin{bmatrix}t=1/x \implies x=1/t\\ x\to 0 \implies t\to\pm\infty\end{bmatrix}=\lim_{t\to\pm\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)}{1/t}=$$

$$= \lim_{t\to\pm\infty} t\ln\left(1+\frac{1}{t}\right) = \lim_{t\to\pm\infty} \ln\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right) = \ln e = 1. \quad \square$$

Det är tillåtet att flytta in gränsvärdet inuti logaritmen eftersom det är en kontinuerlig funktion.

9.12

a)

Lösning finns redan.

b)

Variabelbytet $t = 2x \implies x = t/2$ och $x \to \infty \implies t \to \infty$.

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{t}{2}} = \lim_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^{1/2} = e^{1/2} = \sqrt{e}.$$

c)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/x^2} = (1+0)^0 = 1.$$

d)

$$\lim_{x\to\infty} x^{2/x} = \lim_{x\to\infty} e^{\ln\left(x^{2/x}\right)} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{2}{x}\ln x} = e^0 = 1.$$

e)

$$\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)^x > \lim_{x\to\infty} 2^x = \infty \implies \lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)^x = \infty.$$

9.13

a)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x-3} = \frac{1+2}{1-3} = -\frac{3}{2}.$$

b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{x} = \lim_{x\to 0}(x+2) = 2.$$

c)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}.$$

9.14

Vi vill först och främst att gränsvärdet ska existera, och eftersom $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$, där $x - 2 \to 0,\ x \to 2$, måste a och b väljas så att $ax + b = c(x-2)$. Detta ger villkoren $a = c$ och $b = -2c$, insättning av detta i gränsvärdet ger

$$\lim_{x\to 2} \frac{c(x-2)}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{c(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{c}{x+2} = \frac{c}{4} = 1 \implies$$

$$\implies c = 4 \implies \begin{cases} a = c = 4, \\ b = -2c = -8. \end{cases}$$

9.15

a)

Se b), med $a = 1$.

b)

Räta linjens ekvation, på punktform,

$$y - y_1 = k(x - x_1) \implies y = k(x - x_1) + y_1 = [(x_1, y_1) = (a, a^2)] = k(x-a) + a^2,$$

där

$$k = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = x + a \to 2a, \text{ då } x \to a.$$

$2a$ är derivatan av funktionen $f(x) = x^2$ i punkten $x = a$, vilket fås av precis det gränsvärde vi beräknar,

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a}.$$

c)

Vi beräknar tangenten till kurvan $y = x^2$ i punkten a, eller egentligen lutningen till tangenten, vilket är derivatan i punkten. Tangentens ekvation i en punkt $x = a$, till en funktion $f(x)$, kan skrivas $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, vilket är precis det vi har här.

9.16

Lösning finns redan.

9.17

För en lista av standardgränsvärden, se boken. Jag tänker också göra omskrivningar av typen $\frac{\sin kx}{x} = k\frac{\sin kx}{kx} \to k \cdot 1 = k$, då $x \to 0$ istället för att göra variabelbytet $t = kx \implies x = t/k,\ x \to 0 \implies t \to 0$. Så, om man funderar över en likhet, tänk på att det antagligen bara är ett standardgränsvärde och/eller att jag har samma "form" på argumenten till standardgränsvärden (till exempel att det står kx både inuti sinus och i nämnaren ovan). Med det sagt:

a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} 3\frac{e^{3x} - 1}{3x} = 3 \cdot 1 = 3.$$

c)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

d)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{7x} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{7}\frac{\ln(1+2x)}{2x} = \frac{2}{7} \cdot 1 = \frac{2}{7}.$$

e)

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0.$$

f)

$$\lim_{x\to 0^+} 2x \ln(5x) = 0 \ (2x \ln(5x) = 2x \ln 5 + 2x \ln x).$$

g)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x} = \begin{bmatrix} t = \sin x \\ x \to 0 \implies t \to 0 \end{bmatrix} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1.$$

h)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3}\frac{3x}{\sin 3x} = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}.$$

i)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3}\frac{\sin x}{x}\frac{3}{\sin 3x} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{3}.$$

j)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x} - 1}{e^{4x} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{3}{4}\frac{e^{3x} - 1}{3x}\frac{4x}{e^{4x} - 1} = \frac{3}{4} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{4}.$$

k)

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(\sin x) = \lim_{x\to 0^+} x\ln\left(x\frac{\sin x}{x}\right) =$$
$$= \lim_{x\to 0^+}\left(x\ln x + x\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right) = 0 + 0\cdot\ln 1 = 0.$$

l)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\cos x)}{\cos x} = \frac{\sin 1}{1} = \sin 1.$$

9.18

a)

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^0 = 1.$$

b)

$$\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln((\sin x)^x)} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln\sin x} = [9.17\text{ k)}] = e^0 = 1.$$

9.19

Lösning finns redan.

9.20

Lösning finns redan.

9.21

a)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^3 - x} = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x(x+1)(x-1)} = \begin{bmatrix} t = x-1 \implies x = t+1 \\ x\to 1 \implies t\to 0 \end{bmatrix} =$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{\ln(t+1)}{(t+1)(t+2)t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{(t+1)(t+2)}\frac{\ln(t+1)}{t} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

b)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{x-\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} t = \dfrac{\pi}{2} - x \\ x\to\dfrac{\pi}{2} \implies t\to 0 \end{bmatrix} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{-t} = -1.$$

c)

Från 9.19 b) vet vi att

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan kx}{kx}=\lim_{x\to 0}\frac{kx}{\arctan kx}=1,$$

vilket betyder att vi enkelt kan bestämma värdet på detta gränsvärde

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan 2x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{3}\frac{\arctan 2x}{2x}=\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{2}{3}.$$

d)

Om $x\to 0^+ \implies t=1/x \implies t\to +\infty$, vilket betyder att vi kan skriva

$$\lim_{x\to 0^+} x^3e^{1/x}=\lim_{t\to\infty}\frac{e^t}{t^3}=\infty,$$

eftersom exponentiella funktioner vinner över polynom.

e)

Variabelbytet $t=x-\pi/2 \implies x=t+\pi/2$, med $x\to\pi/2 \implies t\to 0$ kommer att att förenkla gränsvärdesberäkningen. Vidare är $\cot x=\cot(t+\pi/2)=-\tan t$, varför

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cot x}{2x-\pi}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cot x}{2(x-\frac{\pi}{2})}=\lim_{t\to 0}\frac{-\tan t}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{-1}{2}\frac{\tan t}{t}=[9.19\text{ a)}]=\frac{-1}{2}\cdot 1=-\frac{1}{2}.$$

f)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{1/x}}{x}=\begin{bmatrix} t=1/x \implies x=1/t \\ x\to\infty \implies t\to 0^+\end{bmatrix}=\lim_{t\to 0^+}\frac{e^t}{1/t}=\lim_{t\to 0^+}te^t=0.$$

9.22

a)

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{0^-}=-\infty,$$
$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{0^+}=\infty.$$

b)

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{1}{(0^-)^2}=\frac{1}{0^+}=\infty,$$
$$\lim_{x\to -2^+}\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{1}{(0^+)^2}=\frac{1}{0^+}=\infty.$$

c)

För $a = 0$ blir det ett standardgränsvärde, som har samma värde oavsett från vilket håll man närmar sig 0.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x(x-2)} = 1 \cdot \frac{1}{0-2} = -\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{\sin x}{x(x-2)} = \frac{\sin 2}{2 \cdot 0^-} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\sin x}{x(x-2)} = \frac{\sin 2}{2 \cdot 0^+} = \infty.$$

d)

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{\ln x} = \frac{1}{0^-} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{\ln x} = \frac{1}{0^+} = \infty.$$

9.23

Skrivsätten jag använder i uppgifterna omkring denna, exempelvis $0^-/\infty$, är egentligen slarviga, men de är mer till för att tydliggöra vad gränsvärdena blir istället för att vara rigorösa.

a)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\ln x} = \frac{0^+}{-\infty} = 0.$$

b)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty.$$

c)

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0.$$

9.24

a)

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^3}{(x+1)^2} = \frac{(-1)^3}{(0^+)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty.$$

b)

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^3}{(x+1)^2} = \frac{(-1)^3}{(0^-)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty.$$

c)

$$\lim_{x\to 1^+} \arctan \frac{x^2}{x-1} = \arctan \frac{1}{0^+} = \arctan \infty = \frac{\pi}{2}.$$

d)

$$\lim_{x\to 1^-} \arctan \frac{x^2}{x-1} = \arctan \frac{1}{0^-} = \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}.$$

9.25

En funktion, $f(x)$, är kontinuerlig i punkten $x = a$ om $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, vilket betyder att $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$, alltså att både vänster- och högergränsvärdet ska existera, och de ska vara lika.

a)

En enkel kontroll visar att $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$, och funktionen är uppenbart kontinuerlig i övriga punkter, vilket betyder att $f(x)$ är kontinuerlig. Dock gäller det att $\lim_{x\to 1^-} g(x) = 2$, men $\lim_{x\to 1^+} g(x) = -1$, och därmed är $g(x)$ inte kontinuerlig.

b)

Kontroller att $\lim_{x\to 1} h(x) = h(1)$, $h(1) = 3$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2(x+\frac{1}{2})(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(2x+1) = 3,$$

vilket betyder att $h(x)$ är kontinuerlig.

9.26

a)

Vi vill att $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \arctan \frac{1}{x} = \arctan \infty = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{ax}-1}{x} = \lim_{x\to 0^-} a\frac{e^{ax}-1}{ax} = a \cdot 1 = a.$$

För att gränsvärdet ska vara existera måste $a = \frac{\pi}{2}$.

b)

För att funktionen ska vara kontinuerlig även i nollan vill vi att $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$, och eftersom $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{\pi}{2}$ kan vi direkt välja att $f(0) = \frac{\pi}{2}$ för att få en kontinuerlig funktion.

9.27

Lösning finns redan.

9.28

Låt $f(x) = 8x^3 - 36x^2 + 46x - 15$. Funktionen är uppenbart kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$, eftersom det är ett polynom. Därför kan vi bara evaluera funktionen i intervallens randpunkter för och se om de har olika tecken. Om de har olika tecken kan vi använda satsen om mellanliggande värde för att direkt säga att den måste passera nollan någonstans i intervallet, vilket betyder att funktionen har en rot där. Jag orkar inte skriva allt det, men det är väldigt trivialt härifrån.

9.29

Funktionen är inte definierad i $x = 0$, vilket betyder att funktionen inte är definierad på hela det intervall man tittar på (och därmed inte kontinuerlig heller), vilket gör satsen obrukbar.

9.30

a)

Se b).

b)

Se c) (innan gränsvärdet beräknas).

c)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = [\text{geometrisk summa}] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}} \lim_{n\to\infty} (1 - 2^{-n}) = 1 - 0 = 1.$$

Detta betyder alltså att svaret på a) och b) är $1 - 2^{-n}$.

d)

Se c).

9.31

En geometrisk serie är konvergent om och endast om absolutbeloppet av kvoten är mindre än 1, vilket beror på att termen i formeln för en geometrisk summa som är $(\text{kvoten})^{(\text{antalet termer})}$ måste gå mot 0 för att den ska vara konvergent då (antalet termer) $\to \infty$.

a)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-3^{-n}}{3-1} = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}.$$

b)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^k = \lim_{n\to\infty}\frac{-1}{3}\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \lim_{n\to\infty}-\frac{1-(-3)^{-n}}{3+1} = -\frac{1-0}{4} = -\frac{1}{4}.$$

c)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{3^k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \lim_{n\to\infty}1\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1/3} = 3(1-0) = 3.$$

d)

Kvoten är större än 1 ($2 > 1$), vilket betyder att serien är divergent. Den är också positiv och går därmed mot ∞.

9.32

För alla serier gäller det att de är konvergent om och endast om beloppet av deras kvot är mindre än 1. Alltså ska det som är upphöjt till seriens index ha ett absolutbelopp mindre än 1. Jag kommer också inte att skriva om det till ett gränsvärde, även om man egentligen ska göra det, men det sparar plats och tid för mig, så jag kommer istället att skriva att den direkt är lika med det man får efter att ha gränsvärdet i formeln för en geometrisk summa. Vi beräknar ju bara serien för de x den är konvergent för, så det är typ okej. Det gäller då att

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k(ax+b)^k = c_1\frac{1}{1-(ax+b)},$$

givet att serien konvergerar. Om serien börjar på 2 eller 0 istället ska givetvis koefficienten framför vara c_2 eller c_0.

a)

Lösning finns redan.

b)

Konvergent om $|x| < 1$.

$$\sum_{k=1}^{\infty}x^k = x\cdot\frac{1}{1-x} = \frac{x}{1-x}.$$

c)

Samma som b).

d)

Konvergent om $|2x| = 2|x| < 1 \iff |x| < \frac{1}{2}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2x)^n = 2x \cdot \frac{1}{1-2x} = \frac{2x}{1-2x}.$$

e)

$x^{-j} = \frac{1}{x^j} \implies$ konvergent om $\left|\frac{1}{x}\right| < 1 \iff |x| > 1$.

$$\sum_{j=0}^{\infty} x^{-j} = x^{-0} \cdot \frac{1}{1-x^{-1}} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x}{x-1}.$$

f)

Konvergent om $1/|x+1| < 1 \iff |x+1| > 1 \iff x+1 < -1$ eller $x+1 > 1 \iff x < -2$ eller $x > 0$.

$$\sum_{j=0}^{\infty}(x+1)^{-j} = \frac{1}{1-\frac{1}{x+1}} = \frac{x+1}{x+1-1} = \frac{x+1}{x}.$$

9.33

a)

0 eftersom potensfunktioner växer snabbare än logaritmer.

b)

0 eftersom potensfunktioner växer snabbare än logaritmer.

c)

0 eftersom potensfunktioner växer snabbare än logaritmer.

d)

$$2^{\ln x} = \left(e^{\ln 2}\right)^{\ln x} = \left(e^{\ln x}\right)^{\ln 2} = x^{\ln 2} \implies \frac{2^{\ln x}}{x^{\ln 2}} = 1 \to 1, \text{ då } x \to \infty.$$

e)

$$\frac{x^3 2^x + x + 1}{x^2 3^x + \sqrt{2x}} = \frac{x^3 2^x}{x^2 3^x} \frac{1 + 1/(x^2 2^x) + 1/(x^3 2^x)}{1 + \sqrt{2x}/(x^2 3^x)} = \frac{x}{(3/2)^x} \frac{1 + 1/(x^2 2^x) + 1/(x^3 2^x)}{1 + \sqrt{2x}/(x^2 3^x)} \to$$
$$\to 0 \cdot \frac{1+0+0}{1+0} = 0, \text{ då } x \to \infty.$$

f)

$$\ln 2^x - \ln 3^x = x(\ln 2 - \ln 3) \to -\infty, \text{ då } x \to \infty.$$

g)

$$\frac{\ln 2^x}{\ln 3^x} = \frac{x \ln 2}{x \ln 3} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \to \frac{\ln 2}{\ln 3}, \text{ då } x \to \infty.$$

h)

$$\frac{\ln 3x}{\ln 2x} = \frac{\ln 3 + \ln x}{\ln 2 + \ln x} = \frac{\ln x \frac{\ln 3}{\ln x} + 1}{\ln x \frac{\ln 2}{\ln x} + 1} = \frac{\frac{\ln 3}{\ln x} + 1}{\frac{\ln 2}{\ln x} + 1} \to \frac{0+1}{0+1} = 1, \text{ då } x \to \infty.$$

i)

$$\ln 2x - \ln x = \ln \frac{2x}{x} = \ln 2 \to \ln 2, \text{ då } x \to \infty.$$

j)

$$\ln(2+x) - \ln x = \ln\left(\frac{2+x}{x}\right) = \ln(\frac{2}{x} + 1) \to \ln(0+1) = 0, \text{ då } x \to \infty.$$

k)

$$\ln x^2 - \ln x = 2\ln x - \ln x = \ln x \to \infty, \text{ då } x \to \infty.$$

l)

$$x(x - \sqrt{x^2-1}) = \frac{x(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{x(x^2-(x^2-1))}{x+\sqrt{x^2-1}} =$$
$$= \frac{x}{x+\sqrt{x^2}\sqrt{1-1/x^2}} = \frac{x}{x+|x|\sqrt{1-1/x^2}} = [x>0] = \frac{x}{x+x\sqrt{1-1/x^2}} =$$
$$= \frac{1}{1+\sqrt{1-1/x^2}} \to \frac{1}{1+\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}, \text{ då } x \to \infty.$$

9.34

$\alpha^\circ = \frac{\pi}{180}\alpha$ rad, vilket betyder att $x = \frac{\pi}{180}\alpha \implies \alpha = \frac{180}{\pi}x$.

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\sin_\circ \alpha}{\alpha} = \begin{bmatrix} x = \frac{\pi}{180}\alpha \implies \alpha = \frac{180}{\pi}x \\ \alpha \to 0 \implies x \to 0 \\ \sin_\circ \alpha = \sin x \end{bmatrix} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\frac{180}{\pi}x} = \lim_{x\to 0} \frac{\pi}{180}\frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{180}.$$

9.35

$$\lim_{n\to\infty} n2r\sin\frac{\pi}{n} = \begin{bmatrix} x = \frac{\pi}{n} \implies n = \frac{\pi}{x} \\ n \to \infty \implies x \to 0 \end{bmatrix} = \lim_{x\to 0} \frac{\pi}{x} 2r \sin x = \lim_{x\to 0} 2\pi r \frac{\sin x}{x} = 2\pi r.$$

9.36

I alla uppgifter används instängningssatsen, där de instängande funktionerna är $\ln(1+x)$ och $\ln(1+2x)$. Alltså om $\ln(1+x)$ och $\ln(1+2x)$ har samma gränsvärde kommer $f(x)$ nödvändigtvis också att ha det.

a)

$$\ln(1+x) \text{ och } \ln(1+2x) \to \infty, \text{ då } x \to \infty \implies f(x) \to \infty, \text{ då } x \to \infty.$$

b)

$$\ln(1+x) \text{ och } \ln(1+2x) \to 0, \text{ då } x \to 0^+ \implies f(x) \to 0, \text{ då } x \to 0^+.$$

c)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \text{ och } \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+2x)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} 2\frac{\ln(1+2x)}{2x} = 2 \implies 1 \le \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} \le 2 \text{ (om det existerar).}$$

9.37

a)

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(2n)(2n-1)...(n+1)n!}{(n!)^2} = \frac{(2n)(2n-1)...(n+1)}{n(n-1)...2\cdot 1} =$$

$$= \frac{2n}{n}\frac{2n-1}{n-1}\frac{2n-2}{n-2}...\frac{n+2}{2}\frac{n+1}{1} > \frac{2n}{n}\frac{2n-2}{n-1}\frac{2n-4}{n-2}...\frac{4}{2}\frac{2}{1} = 2^n \to \infty, \ x \to \infty \implies$$

$$\implies \lim_{n\to\infty}\binom{2n}{n} \to \infty, \text{ då } x \to \infty.$$

b)

$$\binom{2n}{n}2^{-n} = [\text{samma som ovan}] = \frac{2n}{n}\frac{2n-1}{n-1}\frac{2n-2}{n-2}...\frac{n+2}{2}\frac{n+1}{1}2^{-n} =$$

$$= \frac{2n}{2n}\frac{2n-1}{2n-2}\frac{2n-2}{2n-4}...\frac{n+2}{4}\frac{n+1}{2} > \frac{n+1}{2} \to \infty, \text{ då } x \to \infty \implies$$

$$\implies \lim_{n\to\infty}\binom{2n}{n}2^{-n} \to \infty, \text{ då } \to \infty$$

c)

$4^n = 2^{2n}$, vilket är antalet binära tal med längd $2n$, och $\binom{2n}{n}$ är antalet binära tal av längd $2n$ med exakt n nollor. Vilket betyder att kvoten uppenbart kommer att gå mot 0, eftersom det totala antalet binära tal av längd $2n$ kommer att växa snabbare en en äkta delmängd av dem. Detta kanske känns som ett otillfredsställande svar, och om man

tycker det kan man istället vända sig till Stirlings approximationsformel, som i princip säger att

$$\binom{2n}{n}4^{-n}$$

växer asymptotiskt som

$$\frac{1}{\sqrt{n}},$$

vilket igen gör det uppenbart att värdet är 0. Något som också troliggör detta gränsvärde är binomialsatsen:

$$4^n = 2^{2n} = (1+1)^{2n} = \sum_{k=1}^{2n}\binom{2n}{k}1^{2n-k}\cdot 1^k = \sum_{k=1}^{2n}\binom{2n}{k} > \binom{2n}{n}.$$

Det gäller också att, för $n \geq 0$,

$$\left(\frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}\right)^2 = \frac{n^2+n+\frac{1}{4}}{n^2+2n+1} \leq \frac{n+\frac{1}{3}}{n+\frac{4}{3}},$$

eftersom

$$(n^2+n+\frac{1}{4})(n+\frac{4}{3}) - (n^2+2n+1)(n+\frac{1}{3}) =$$

$$= n^3 + \frac{7}{3}n^2 + \frac{19}{12}n + \frac{1}{3} - \left(n^3 + \frac{7}{3}n^2 + \frac{5}{3}n + \frac{1}{3}\right) = -\frac{n}{12} \leq 0,\ n \geq 0.$$

Alltså är

$$\frac{n+\frac{1}{2}}{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} \leq \sqrt{\frac{n+\frac{1}{3}}{n+\frac{4}{3}}} = \sqrt{\frac{3n+1}{3n+4}},\ n \geq 0,$$

vilket betyder att

$$\frac{2(n-1)+1}{2(n-1)+2} = \frac{2n-1}{2n} \leq \sqrt{\frac{3(n-1)+1}{3(n-1)+4}} = \sqrt{\frac{3n-2}{3n+1}},\ n \geq 1,$$

och

$$\frac{\binom{2n}{n}4^{-n}}{\binom{2(n-1)}{n-1}4^{-(n-1)}} = \frac{\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}}{\frac{(2n-2)!}{4^{n-1}((n-1)!)^2}} = \frac{2n(2n-1)}{4n^2} = \frac{2n-1}{2n} \leq \sqrt{\frac{3n-2}{3n+1}}.$$

Med detta får vi att

$$\binom{2n}{n}4^{-n} = \prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k} \leq \prod_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{3k-2}{3k+1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{3\cdot 1-2}{3\cdot 1+1}}\sqrt{\frac{3\cdot 2-2}{3\cdot 2+1}}\sqrt{\frac{3\cdot 3-2}{3\cdot 3+1}}\sqrt{\frac{3\cdot 4-2}{3\cdot 4+1}}\cdots\sqrt{\frac{3n-2}{3n+1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{4}{7}}\sqrt{\frac{7}{10}}\sqrt{\frac{10}{13}}\cdots\sqrt{\frac{3n-2}{3n+1}} = \frac{1}{\sqrt{3n+1}},$$

vilket betyder att

$$0 \leq \lim_{n\to\infty}\binom{2n}{n}4^{-n} \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{3n+1}} = 0 \implies \lim_{n\to\infty}\binom{2n}{n}4^{-n} = 0.$$

9.38

a)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty,$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty,$$

$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ existerar ej eftersom vänster- och högergränsvärdena inte är lika.

b)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty,$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(0^-)^2} = \frac{1}{0^+} = \infty,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty.$$

c)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x^2}{\sin x} = \frac{\ln 0^+}{\sin 0^+} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\ln x^2}{\sin x} = \frac{\ln\left((0^-)^2\right)}{\sin 0^-} = \frac{\ln 0^+}{0^-} = \frac{-\infty}{0^-} = \infty,$$

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x^2}{\sin x}$ existerar ej eftersom vänster- och högergränsvärdena inte är lika.

9.39

a)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x(x-a)} = \frac{1}{0^+(0-a)} = \frac{-1}{a\cdot 0^+} = \begin{cases} -\infty, & a > 0, \\ \infty, & a \leq 0 \text{ (likhet ger 9.38 b))}. \end{cases}$$

b)

Om $a = 0$ kommer man också att få samma som i 9.38 b), men om $a < 0 \implies x - a \to 0^-$

$$\lim_{x\to a^-} \frac{1}{x(x-a)} = \frac{1}{a\cdot 0^-} = \begin{cases} -\infty, & a > 0, \\ \infty, & a \leq 0. \end{cases}$$

c)

$$\lim_{x\to a^-} \frac{1}{(x-a)^2} = \frac{1}{(0^-)^2} = \frac{1}{0^+} = \infty.$$

9.40

Om för samtliga uppgifter kan man utföra variabelbytet $t = \pi - x \implies x = \pi - t$, och $x \to \pi \implies t \to 0$. Vidare är $\sin x = \sin(\pi - t) = \sin t$, $\cos x = \cos(\pi - t) = -\cos t$, $\tan x = \tan(\pi - t) = -\tan t$, $\cot x = \cot(\pi - t) = -\cot t$.

a)

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{\pi - x} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

b)

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\cos x}{\pi - x} = \lim_{t\to 0} \frac{-\cos t}{t} \text{ existerar ej.}$$

c)

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\tan x}{\pi - x} = \lim_{t\to 0} \frac{-\tan t}{t} = [9.19 \text{ a)}] = -1.$$

d)

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\cot x}{\pi - x} = \lim_{t\to 0} \frac{-\cot t}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-\cos t}{t \sin t} = -\infty,$$

eftersom $\cos t$ är jämn, medan $\sin t$ och t är udda, blir hela uttrycket jämnt, vilket betyder att det inte spelar någon roll vilket håll vi närmar oss $t = 0$. Av denna anledning blir gränsvärdet $-\infty$, till skillnad från b) där det inte existerar (uttrycket är udda där).

e)

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin \pi}{\pi} = \frac{0}{\pi} = 0.$$

9.41

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}} = \begin{bmatrix} t = \arccos x \implies x = \cos t \\ x \to 1^- \implies t \to 0^+ \end{bmatrix} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{\sqrt{1-\cos t}} =$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{t\sqrt{1+\cos t}}{\sqrt{1-\cos t}\sqrt{1+\cos t}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t\sqrt{1+\cos t}}{\sqrt{1-\cos^2 t}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t\sqrt{1+\cos t}}{\sqrt{\sin^2 t}} =$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{t\sqrt{1+\cos t}}{|\sin t|} = [t > 0] = \lim_{t\to 0^+} \sqrt{1+\cos t}\frac{t}{\sin t} = \sqrt{1+\cos 0} \cdot 1 = \sqrt{2}.$$

9.42

a)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x + \ln 2x}{\ln x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x + \ln 2 + \ln x}{2\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln x + \ln 2}{2\ln x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2 + \ln 2/\ln x}{2} = \frac{2+0}{2} = 1.$$

b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot 3x}{2\cdot 3x}\frac{e^{2x}-1}{1}\frac{1}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{3}\frac{e^{2x}-1}{2x}\frac{3x}{\sin 3x}=\frac{2}{3}\cdot 1\cdot 1=\frac{2}{3}.$$

c)

$$\lim_{x\to 0^+}x^2e^{\frac{1}{x}}=\begin{bmatrix} t=1/x \implies x=1/t \\ x\to 0^+ \implies t\to\infty\end{bmatrix}=\lim_{t\to\infty}\frac{e^t}{t^2}=\infty.$$

d)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^0\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{2/3}=\frac{3}{2}(1-0)=\frac{3}{2}.$$

9.43

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{3x}\frac{\ln(1+3x)}{1}\frac{1}{\sin x}=\lim_{x\to 0}3\frac{\ln(1+3x)}{3x}\frac{x}{\sin x}=3\cdot 1\cdot 1=3.$$

b)

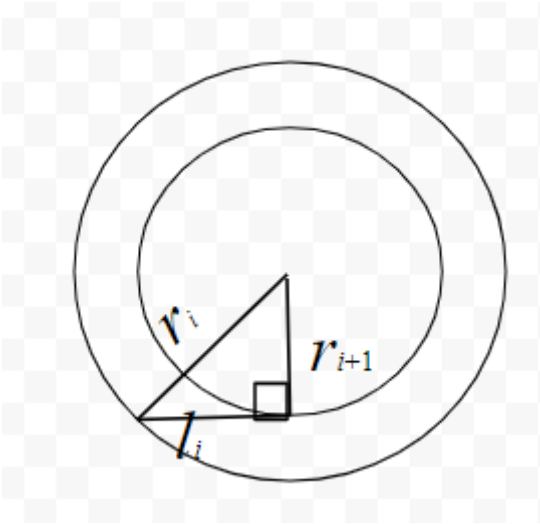
$$\lim_{x\to\infty}\frac{2^x+\ln x}{3\cdot 2^x-\ln x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{2^x}\frac{1+\ln x/2^x}{3-\ln x/2^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\ln x/2^x}{3-\ln x/2^x}=\frac{1+0}{3-0}=\frac{1}{3}.$$

c)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2^x+\ln x}{3\cdot 2^x-\ln x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\ln x}\frac{2^x/\ln x+1}{3\cdot 2^x-1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2^x/\ln x+1}{3\cdot 2^x-1}=\frac{0+1}{0-1}=-1.$$

I b) är 2^x den dominerande termen eftersom den växer snabbare än logaritmen, då $x\to\infty$, men när $x\to 0^+$ kommer istället logaritmen att dominera, eftersom den går mot $-\infty$.

9.44



Enligt Pythagoras sats, samt den asfula bilden, är $r_i^2 = r_{i+1}^2 + l_i^2 \implies l_i = \sqrt{r_i^2 - r_{i+1}^2}$, och vidare gäller det att $\frac{r_{i+1}}{r_i} = k \implies r_{i+1} = kr_i \implies r_i = r_0 k^i$ (om man upprepar rekursionen i gånger för r_i). Omkretsen för den yttersta cirkeln ges av $2\pi r_0$.

$$\sum_{i=0}^{\infty} l_i = \sum_{i=0}^{\infty} \sqrt{r_i^2 - r_{i+1}^2} = \sum_{i=0}^{\infty} r_i \sqrt{1 - \left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right)^2} = \sum_{i=0}^{\infty} r_0 k^i \sqrt{1-k^2} =$$

$$= r_0\sqrt{1-k^2}\sum_{i=0}^{\infty} k^i = [0 < k < 1] = r_0\sqrt{1-k^2}\frac{1}{1-k} = 2\pi r_0 \implies$$

$$\implies \frac{\sqrt{(1-k)(1+k)}}{1-k} = 2\pi \implies \sqrt{\frac{1+k}{1-k}} = 2\pi \implies \frac{1+k}{1-k} = 4\pi^2 \implies$$

$$\implies 1 + k = 4\pi^2 - 4\pi^2 k \implies k(1+4\pi^2) = 4\pi^2 - 1 \implies k = \frac{4\pi^2 - 1}{4\pi^2 + 1}.$$

9.45

$$\begin{array}{l|l}
 & x^2 - x + 1 \\
\hline
x^3 & x+1 \\
\hline
 & -x^2(x+1) \\
\hline
 & -x^2 \\
 & -(-x)(x+1) \\
\hline
 & x \\
 & -1 \cdot (x+1) \\
\hline
 & -1
\end{array}$$

Detta betyder att

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x+1}-p(x)\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x^2-x+1-\frac{1}{x+1}-p(x)\right)=0 \implies$$

$$\implies [\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+1}=0] \implies x^2-x+1-p(x)=0 \implies p(x)=x^2-x+1.$$

Kapitel 10

10.1

a)

Se b), med $a = 1$.

b)

$$\lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2a+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(2a+h) = 2a.$$

c)

Gränsvärdena är derivatans definition för funktionen $f(x) = x^2$, i punkterna $x = 1$ och $x = a$.

10.2

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

a)

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = \lim_{h\to 0}(3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2.$$

b)

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{x(x+h)h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}.$$

c)

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x.$$

d)

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \ln\left(\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right) =$$
$$= \begin{bmatrix} t = x/h \implies h = x/t \\ h/x = 1/t,\ 1/h = t/x \\ h \to 0 \implies t \to 0\ (x \neq 0) \end{bmatrix} = \lim_{t\to 0} \ln\left(\left(1 + \frac{1}{t}\right)^{\frac{t}{x}}\right) =$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{x} \ln\left(\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right) = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}.$$

10.3

Lösning finns redan.

10.4

Se facit.

10.5

Lösning finns redan.

10.6

$$\text{Tangentens ekvation: } y_t = f'(a)(x-a) + f(a).$$
$$\text{Normalens ekvation: } y_n = \frac{-1}{f'(a)}(x-a) + f(a).$$

a)

$$f(x) = \cos 2x \implies f'(x) = -2\sin 2x \implies f'(\pi/6) = -2\sin(2\frac{\pi}{6}) = -\sqrt{3} \implies$$
$$y_t = f'(\frac{\pi}{6})(x - \frac{\pi}{6}) + f(\frac{\pi}{6}) = -\sqrt{3}(x - \frac{\pi}{6}) + \cos(2\frac{\pi}{6}) = -\sqrt{3}x + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2},$$
$$y_n = \frac{-1}{f'(\frac{\pi}{6})}(x - \frac{\pi}{6}) + f(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2} = \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}} + \frac{1}{2}.$$

b)

$$a = 2,\ f(x) = \ln x \implies f'(x) = \frac{1}{x} \implies f'(a) = \frac{1}{2} \text{ och } f(a) = \ln 2 \implies$$
$$y_t = f'(a)(x-a) + f(a) = \frac{1}{2}(x-2) + \ln 2 = \frac{x}{2} - 1 + \ln 2,$$
$$y_n = \frac{-1}{f'(a)}(x-a) + f(a) = -2(x-2) + \ln 2 = -2x + 4 + \ln 2.$$

10.7

a)

Se facit för bilder.

b)

Man kan direkt säga att f_2 inte är deriverbar, eftersom ett nödvändigt krav för deriverbarhet är kontinuitet. Vidare kan man antingen titta på derivatans definition för f_1 och se om höger- och vänsterderivatan ger samma resultat, eller så kan man konstatera att utifrån grafen att de har olika lutning beroende på vilket håll man närmar sig $x = 1$, vilket betyder att $f_1'(1)$ inte existerar (jämför med hur absolutbeloppet inte är deriverbart i $x = 0$ eftersom det är ett veck där). Eftersom det inte är uppenbart för f_3 får man undersöka den närmare.

$$f_3(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, \ x \leq 1, \\ 4x - 1, \ x > 1 \end{cases} \implies f'(x) = \begin{cases} 2x + 2, \ x < 1, \\ 4, \ x > 1, \end{cases}$$

vilket visar att $f'(1^-) = 2 \cdot 1 + 2 = 4 = f'(1^+)$, där $1^-/1^+$ indikerar att det är vänster/högerderivatan. Eftersom dessa är lika är funktionen deriverbar.

10.8

Använd kedjeregeln och standardderivator flitigt.

a)

$$\frac{d}{dx}(e^{2x} - \sin 3x) = 2e^{2x} - 3\cos 3x.$$

b)

$$\frac{d}{dx}(\ln x + \arctan x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1 + x^2}.$$

c)

$$\frac{d}{dx}(\arcsin 2x + (2x+1)^7) = \frac{1}{\sqrt{1 - (2x)^2}} \cdot 2 + 7(2x+1)^6 \cdot 2 = \frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}} + 14(2x+1)^6.$$

d)

$$\frac{d}{dx}(\tan \pi x + \cos \frac{\pi x}{2}) = \frac{\pi}{\cos^2 \pi x} - \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi x}{2},$$

jag kommer inte ihåg om derivatan av $\tan x$ är en standardderivata, men om man inte kan den, går det snabbt att skriva den som $\sin x / \cos x$ och sedan använda kvotregeln.

e)

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

f)

$$\frac{d}{dx}(\frac{1}{x}) = \frac{d}{dx}(x^{-1}) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

g)

$$\frac{d}{dx}(\frac{1}{\sqrt{x}}) = \frac{d}{dx}(x^{-1/2}) = -\frac{1}{2}x^{-3/2} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}.$$

10.9

Använd kedjeregeln och produktregeln (eller kvotregeln).

a)

$$\frac{d}{dx}(e^{2x}\sin 3x) = 2e^{2x}\sin 3x + 3e^{2x}\cos 3x = (2\sin 3x + 3\cos 3x)e^{2x}.$$

b)

$$\frac{d}{dx}(e^{-x}(x^2+x)) = -e^{-x}(x^2+x) + e^{x}(2x+1) = (-x^2+x+1)e^{-x}.$$

c)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{d}{dx}(\frac{x+1-1}{x+1}) = \frac{d}{dx}(1-\frac{1}{x+1}) =$$
$$= \frac{d}{dx}(1-(x+1)^{-1}) = 0-(-(x+1)^{-2}) = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

d)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2x^2+1}{(x+1)^2}\right) = \frac{(4x+0)(x+1)^2-(2x^2+1)2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{4x(x+1)-4x^2-2}{(x+1)^3} =$$
$$= \frac{4x^2+4x-4x^2-2}{(x+1)^3} = \frac{4x-2}{(x+1)^3}.$$

e)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2\ln x}{e^x}\right) = \frac{d}{dx}(e^{-x}\ln x) = -e^{-x}\ln x + e^{-x}\frac{1}{x} = (\frac{1}{x}-\ln x)e^{-x} = \frac{\frac{1}{x}-\ln x}{e^x}.$$

f)

$$\frac{d}{dx}(x\ln|x|) = \ln|x| + x\frac{1}{x} = \ln|x|+1.$$

10.10

Jag kommer nu att börja skriva $'$ istället för $\frac{d}{dx}$ eftersom det går snabbare, men det betyder samma sak - nämligen att jag deriverar det inuti parentesen. Det kan hända att jag använder Leibniz notation på framtida uppgifter igen. Den största anledningen till att jag skriver på detta andra sätt är att det blir lättare att illustrera hur kedjeregeln används, och även andra deriveringsregler.

a)

$$(\ln(1+x^2))' = \frac{1}{1+x^2}(x^2)' = \frac{2x}{1+x^2}.$$

b)

$$\left((\ln x)^2\right)' = 2\ln x \cdot (\ln x)' = \frac{2\ln x}{x}.$$

c)

$$\left(e^{-x^2}\right)' = e^{-x^2}(-x^2)' = -2xe^{-x^2}.$$

d)

$$\left(e^{-1/x}\right)' = e^{-1/x}(-1/x)' = \frac{e^{-1/x}}{x^2}.$$

e)

$$\left(\sin\sqrt{x}\right)' = \cos\sqrt{x}(\sqrt{x})' = \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

f)

$$(\sin^3 x)' = 3\sin^2 x\cos x.$$

g)

$$(\tan^2 x)' = 2\tan x\frac{1}{\cos^2 x}.$$

h)

$$(\arctan\frac{1}{x})' = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{1/x^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2+1}.$$

Notera att detta betyder att

$$(\arctan x + \arctan\frac{1}{x})' = 0 \implies \arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \text{ konstant.}$$

i)

$$(\arcsin\sqrt{x})' = \frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2\sqrt{(1-x)x}}.$$

10.11

a)

$$(\arcsin(e^x))' = \frac{1}{\sqrt{1-(e^x)^2}}\cdot e^x = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$$

b)

$$\left(e^{\arcsin x}\right)' = e^{\arcsin x}(\arcsin x)' = \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

c)

$$\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \left((1-x^2)^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}(1-x^2)' = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

d)

Man kan göra på samma sätt som ovan, men för att skoja till det lite tänker jag använda kvotregeln tillsammans med resultatet från c).

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \frac{0\cdot\sqrt{1-x^2} - 1\cdot(\sqrt{1-x^2})'}{(\sqrt{1-x^2})^2} = \frac{-\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

e)

$$\left((1+x^2)^{3/2}\right)' = \frac{3}{2}(1+x^2)^{1/2}(1+x^2)' = \frac{3}{2}2x\sqrt{1+x^2} = 3x\sqrt{1+x^2}.$$

f)

$$\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)' = \frac{(1/x)'}{\sqrt{1-(1/x)^2}} = -\frac{1}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{\sqrt{x^4-x^2}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{x^2}\sqrt{x^2-1}} = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$$

10.12

a)

$$\left(\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)' = \frac{(x+\sqrt{1+x^2})'}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

b)

$$\left(\ln\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = \left(\ln|x| - \ln\sqrt{1+x^2}\right)' = \left(\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)' =$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} = \frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x(1+x^2)}.$$

c)

$$(\ln|\ln|x||)' = \frac{1}{\ln|x|}(\ln|x|)' = \frac{1}{x\ln|x|}.$$

10.13

a)

Se b), med b = 2.

b)

$$(b^x)' = \left(\left(e^{\ln b}\right)^x\right)' = \left(e^{x\ln b}\right)' = (\ln b)e^{x\ln b} = \ln b b^x \implies$$
$$(10^x)' = (\ln 10)10^x.$$

c)

$$\left(x^{\sqrt{2}} + x^{-\sqrt{2}}\right)' = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1} - \sqrt{2}x^{-\sqrt{2}-1}.$$

d)

$$(x^x)' = [b = x] = \left(e^{x\ln x}\right)' = e^{x\ln x}(x\ln x)' = x^x(x\frac{1}{x} + \ln x) = x^x(1 + \ln x).$$

e)

$$\left((\ln x)^{1-x}\right)' = \left(e^{(1-x)\ln(\ln x)}\right)' = e^{(1-x)\ln(\ln x)}((1-x)\ln(\ln x))' =$$
$$= (\ln x)^{1-x}((1-x)\frac{(\ln x)'}{\ln x} - \ln(\ln x)) = (\ln x)^{1-x}((1-x)\frac{1}{x\ln x} - \frac{\ln x}{\ln x}\ln(\ln x)) =$$
$$= (\ln x)^{-x}\left(\frac{1-x}{x} - \ln x\ln(\ln x)\right).$$

10.14

a)

$$F(x) = e^x.$$

b)

$$F(x) = \sin x.$$

c)

$$F(x) = -\cos x \text{ (tänk på att derivatan av cosinus är minus sinus).}$$

d)

$$F(x) = \frac{x^2}{2}.$$

e)

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}.$$

f)

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \implies F(x) = -\frac{1}{x}.$$

g)

$$F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \text{ (kompensera för den inre derivatan).}$$

h)

Titta på uppgift 10.10 b), det är nästan det vi vill ha, det är bara en faktor 2 för mycket. Alltså är

$$F(x) = \frac{(\ln x)^2}{2}.$$

i)

Eftersom derivatan av en konstant är 0 kan man lägga till en godtycklig konstant till svaret i samtliga deluppgifter, men fortfarande ha ett giltigt svar. Alltså, ja, det finns flera korrekta svar.

10.15

a)

Lösning finns redan.

b)

$$f_1(x) = e^{x^2} \implies f_1'(x) = 2xe^{x^2},$$

$$f_2(x) = (\arcsin x)^2 \implies f_2'(x) = \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$f_3(x) = x \implies f_3'(x) = 1,$$

$$f_4(x) = \sqrt{\cos x} \implies f_4'(x) = -\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}},$$

$$f_5(x) = \frac{1}{(\ln x)^6} = (\ln x)^{-6} \implies f_5'(x) = -6(\ln x)^{-7}(\ln x)' = -\frac{6}{x(\ln x)^7},$$

$$f_6(x) = \frac{1}{\sin^2 x} = \sin^{-2} x \implies f_6'(x) = -2\sin^{-3} x\cos x = -\frac{2\cos x}{\sin^3 x}.$$

Det gäller nu att $f = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot f_4 \cdot f_5 \cdot f_6$, och därmed att

$$\frac{f'}{f} = \frac{f_1'}{f_1} + \frac{f_2'}{f_2} + \frac{f_3'}{f_3} + \frac{f_4'}{f_4} + \frac{f_5'}{f_5} + \frac{f_6'}{f_6} =$$

$$= \frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}} + \frac{\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}}{(\arcsin x)^2} + \frac{1}{x} + \frac{-\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}}{\sqrt{\cos x}} + \frac{-\frac{6}{x(\ln x)^7}}{\frac{1}{(\ln x)^6}} + \frac{-\frac{2\cos x}{\sin^3 x}}{\frac{1}{\sin^2 x}} =$$

$$= 2x + \frac{2}{(\arcsin x)\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{x} - \frac{\sin x}{2\cos x} - \frac{6}{x\ln x} - \frac{2\cos x}{\sin x} =$$

$$= 2x + \frac{2}{(\arcsin x)\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\tan x - \frac{6}{x\ln x} - 2\cot x \implies$$

$$\implies f'(x) = f(x)\cdot\left(2x + \frac{2}{(\arcsin x)\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\tan x - \frac{6}{x\ln x} - 2\cot x\right).$$

10.16

Lösning finns redan.

10.17

$$p(t)(V(t))^{1,4} = C \implies \frac{d}{dt}(p(t)(V(t))^{1,4}) = \frac{d}{dt}(C) \implies$$

$$\implies p'(t)(V(t))^{1,4} + 1,4p(t)(V(t))^{0,4}V'(t) = 0 \implies$$

$$\implies p'(t) = -1,4p(t)\frac{V'(t)(V(t))^{0,4}}{(V(t))^{1,4}} = -\frac{7}{5}p(t)\frac{V'(t)}{V(t)} =$$

$$= [p(t_1) = 5 \text{ atm},\ V(t_1) = 56 \text{ dm}^3,\ V'(t_1) = 4 \text{ dm}^3/\text{s}] =$$

$$= -\frac{7}{5}\cdot 5\cdot\frac{4}{56} = -7\cdot\frac{1}{14} = -0,5 \text{ atm/s}.$$

10.18

Planet befinner sig konstant på höjden $y(t) = 5$, och det horisontella läget ändras enligt $x(t) = 15 - 600t$, där 600 km/h är hastigheten. Vinkeln $\theta = \theta(t)$, vilket, tillsammans med sambandet

$$\tan\theta = \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{5}{15-600t} = \frac{1}{3-120t},$$

och i just detta ögonblick ($t = 0$) gäller det att

$$\theta(0) = \arctan\frac{1}{3-120\cdot 0} = \arctan\frac{1}{3}.$$

Vi söker nu $\theta'(0)$, och

$$\frac{d}{dt}(\tan\theta(t)) = \frac{d}{dt}(\frac{1}{3-120t}) \implies \frac{\theta'(t)}{\cos^2\theta(t)} = \frac{120}{(3-120t)^2} \implies$$

$$\implies \left[\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x\right] \implies$$

$$\implies \theta'(t)\cdot(1+\tan^2\theta(t)) = \frac{120}{(3-120t)^2} \implies \theta'(0) = \frac{120}{(1+\tan^2\theta(0))(3-120\cdot 0)^2} =$$

$$= \frac{120}{(1+(1/3)^2)\cdot 3^2} = \frac{120}{9+1} = 12 \text{ rad/h}.$$

10.19

Volymen är konstant. Låt $h(t)$ beteckna höjden och $r(t)$ radien. Det gäller att $h'(t) = kh(t)$, vilket ger, via volymsambandet,

$$V = \pi(r(t))^2 h(t) \implies \frac{d}{dt}(V/\pi) = \frac{d}{dt}((r(t))^2 h(t)) \implies$$

$$\implies 0 = 2r(t)r'(t)h(t) + (r(t))^2 h'(t) \implies 2r'(t)h(t) = -r(t)h'(t) \implies$$

$$\implies r'(t) = -\frac{kh(t)}{2h(t)} r(t) = -\tilde{k}r(t). \quad \square$$

10.20

Radien kommer att öka linjärt med höjden eftersom det är en kon, vidare skall det gälla att $r = 0$, då $h = 0$, och att $r = 6$, då $h = 8$, vilket ger att $r(h) = \frac{6}{8}h = \frac{3}{4}h$. Vidare kan volymen för konen uttryckas som

$$V(t) = \frac{\pi(r(h(t)))^2 h(t)}{3} = \frac{\pi\left(\frac{3}{4}h(t)\right)^2 h(t)}{3} = \frac{3\pi(h(t))^3}{16} \implies$$

$$\implies \frac{d}{dt}(V(t)) = \frac{d}{dt}\left(\frac{3\pi(h(t))^3}{16}\right) \implies V'(t) = \frac{9\pi(h(t))^2 h'(t)}{16} \implies$$

$$\implies h'(t) = \frac{16V'(t)}{9\pi(h(t))^2} = [h(t_1) = 4 \text{ m},\ V'(t_1) = 0,1 \text{ m}^3/\text{min}] =$$

$$= \frac{16 \cdot 0,1}{9\pi \cdot 4^2} = \frac{1}{90\pi} \text{ m/min}.$$

10.21

Det är bara att deriverar som vanligt (behandla i som en konstant).

a)

$$\frac{d}{dx}(e^{ix}) = ie^{ix}.$$

b)

$$\frac{d}{dx}(e^{-ix}) = -ie^{ix}.$$

c)

$$\frac{d}{dx}(e^{(1+i)x}) = (1+i)e^{(1+i)x}.$$

10.22

Att ökningen avtar betyder att $f'(t)$ avtar, och alltså är derivatan av $f'(t)$ negativ, och derivatan av $f'(t)$ är just $f''(t)$, vilket betyder att dess tecken är negativt. Den skulle dock kunna vara noll också eftersom då är det en inflexionspunkt och ökningen avtar då också i punkten, så ett fullständigt svar blir att tecknet är icke-positivt.

10.23

a)

$$f(x) = e^{-3x} \implies f'(x) = -3e^{-3x} = -3f(x) \implies D^n f = (-3)^n f = (-3)^n e^{-3x}.$$

b)

Man kan relativt enkelt, via induktion, verifiera att den allmänna produktregeln,

$$D^n(fg) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)},$$

gäller. I fallet av denna uppgift är $g(x) = x^3$ och $f(x) = e^x$, där det gäller att $g^{(k)} = 0$, om $k \geq 4$, alltså är

$$\begin{aligned} D^n(x^3 e^x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^x\right)^{(n-k)} \left(x^3\right)^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^x \left(x^3\right)^{(k)} = \sum_{k=0}^{3} \binom{n}{k} e^x \left(x^3\right)^{(k)} = \\ &= \left(\binom{n}{0} x^3 + \binom{n}{1} 3x^2 + \binom{n}{2} 6x + \binom{n}{3} 6 + \right) e^x = \\ &= \left(x^3 + 3nx^2 + 6\frac{n(n-1)}{2} x + 6\frac{n(n-1)(n-2)}{6} \right) e^x = \\ &= \left(x^3 + 3nx^2 + 3n(n-1)x + n(n-1)(n-2) \right) e^x. \end{aligned}$$

10.24

Stationära punkter är sådana där derivatan är 0, vilket inte nödvändigtvis behöver vara en extrempunkt - ta till exempel en terasspunkt. Vidare behöver en extrempunkt inte nödvändigtvis vara en stationär punkt, ett exempel där det inte är fallet är för absolutbeloppet, som har en extrempunkt i $x = 0$, men den är inte ens deriverbar där.

a)

Lösning finns redan.

b)

$$f(x) = x^3 - 3x \implies f'(x) = 3x^2 - 3 \implies f''(x) = 6x.$$

Punkter av intresse ges av att

$$f'(x) = 0 \implies x = \pm 1,$$

de stationära punkternas karaktär kan i detta fall bestämmas enkelt med andraderivatan:

$$f''(-1) = -6 < 0 \implies x = -1 \text{ maximi och } f''(1) = 6 > 0 \implies \text{ minimi.}$$

$f(-1) = 2$, och $f(1) = -2$. Detta tillsammans ger att $(-1, 2)$ är ett lokalt maximi, och $(1, -2)$ är ett lokalt minimi (båda är stationära punkter).

c)

$$f(x) = x^2 e^x \implies f'(x) = (x^2 + 2x)e^x \implies f''(x) = (x^2 + 4x + 2)e^x,$$

$$f'(x) = 0 \implies (x^2 + 2x)e^x = 0 \implies x(x+2) = 0 \implies \begin{cases} x = -2, \\ x = 0, \end{cases}$$

$$f''(-2) = -2e^{-2} < 0 \implies \text{ maximi,}$$

$$f''(0) = 2e^2 > 0 \implies \text{ minimi,}$$

$$f(-2) = 4e^{-2} \text{ och } f(0) = 0.$$

Alltså är $(-2, 4e^{-2})$ ett lokalt maximi och $(0, 0)$ ett lokalt minimi (båda är stationära punkter).

d)

$$f(x) = (2 + \sin x)^5 \implies f'(x) = 5\cos x(2 + \sin x)^4 \implies$$

$$= f''(x) = 20\cos^2 x(2 + \sin x)^3 - 5\sin x(2 + \sin x)^4.$$

$$f'(x) = 0 \implies [\sin x \geq -1] \implies \cos x = 0 \implies x = \frac{\pi}{2} + n\pi, \ n \in \mathbb{Z},$$

$$f''(\frac{\pi}{2} + n\pi) = 20\cos^2(\frac{\pi}{2} + n\pi)(2 + \sin(\frac{\pi}{2} + n\pi))^3 - 5\sin(\frac{\pi}{2} + n\pi)(2 + \sin(\frac{\pi}{2} + n\pi))^4 =$$

$$= 0 - 5(-1)^n(2 + (-1)^2)^4 = c(-1)^{n+1},$$

där $c > 0$, vilket betyder att $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ är ett maximi när n är jämnt, och ett minimi när n är udda.

$$f(\frac{\pi}{2} + n\pi) = (2 + \sin(\frac{\pi}{2} + n\pi))^5 = (2 + (-1)^n)^5 = \begin{cases} 3^5, \ n \text{ jämn,} \\ 1, \ n \text{ udda.} \end{cases}$$

Detta ger sammanställt att stationära punkter ges av $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, och $(\frac{\pi}{2} + 2n\pi, 3^5)$ är maximipunkter, medan $(\frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi, 1)$ är minimpunkter.

e)

$$\begin{array}{l|l} \multicolumn{2}{l}{\quad\quad\quad\quad x} \\ \hline x^3 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2} \quad -x(x^2-1) & \\ \hline \quad\quad x & \end{array}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1} = x + \frac{x}{x^2 - 1} \implies f'(x) = 1 + \frac{1 \cdot (x^2 - 1) - x(2x)}{(x^2 - 1)^2} = 1 - \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} =$$

$$= \frac{x^4 - 2x^2 + 1 - x^2 - 1}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}, \ x \neq \pm 1.$$

$$f'(x) = 0 \implies x^2(x^2-3) = 0 \implies \begin{cases} x = -\sqrt{3} \implies f(-\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}, \\ x = 0 \implies f(0) = 0, \\ x = \sqrt{3} \implies f(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

x		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
$f'(x)$	+	0	-	§	-	0	-	§	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	§	$\searrow$	0	$\searrow$	§	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$

Detta visar att $(0,0)$ är en terrasspunkt, $(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2})$ är ett lokalt maximi, och $(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$ är ett lokalt minimi (alla är stationära punkter).

10.25

Se funktionsvärdena i de punkter som beskrivs som maximi- eller minimipunkt i föregående uppgift.

10.26

Lösning finns redan.

10.27

På b) och c) är det enda som man behöver undersöka, utöver det som har gjorts i 10.24, vad som händer med funktionen då $x \to \pm\infty$ och när x närmar sig punkter där funktionen inte är definierad (för b) och c) finns dock inte några sådana). Om möjligt, är det bra att veta funktionens nollställen också.

a)

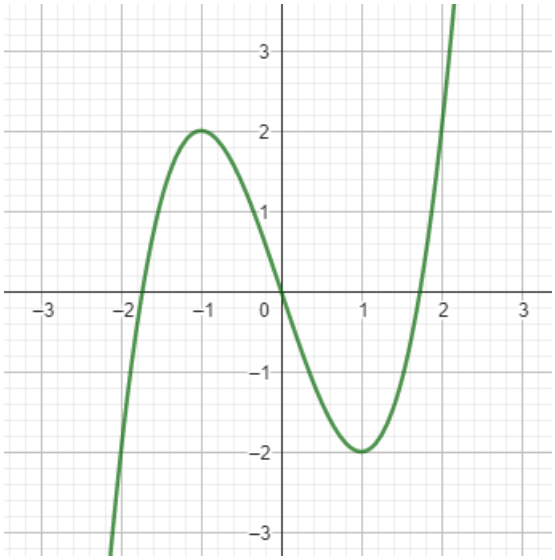
Lösning finns redan.

b)

$$\lim_{x\to\infty}(x^3 - 3x) = \infty, \ \lim_{x\to-\infty}(x^3 - 3x) = -\infty$$

$$x^3 - 3x = 0 \implies \begin{cases} x = -\sqrt{3}, \\ x = 0, \\ x = \sqrt{3}. \end{cases}$$

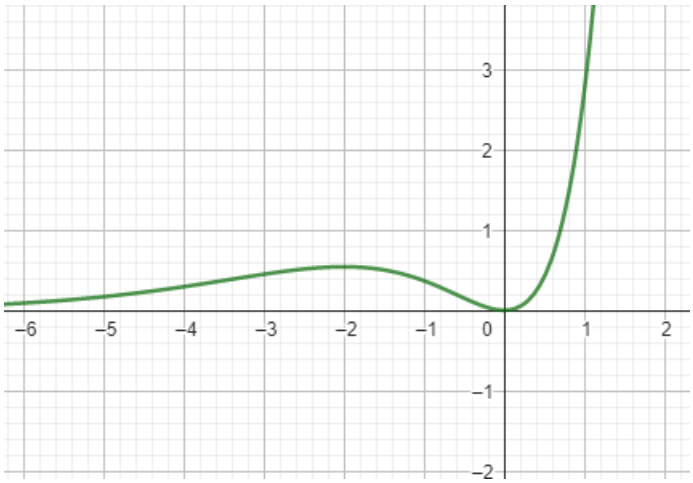
Vi kan nu rita funktionen till vår bästa förmåga.



c)

$$\lim_{x\to\infty} x^2e^x = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} x^2e^x = 0,$$

vi vet redan att $f(0) = 0$, så nu kan vi rita funktionen.



d)

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \implies f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \implies f''(x) = \frac{2}{x^3},$$

man ser direkt att $f(x)$ har den sneda asymptoten $y = x$, eftersom den andra termen försvinner för stora $|x|$.

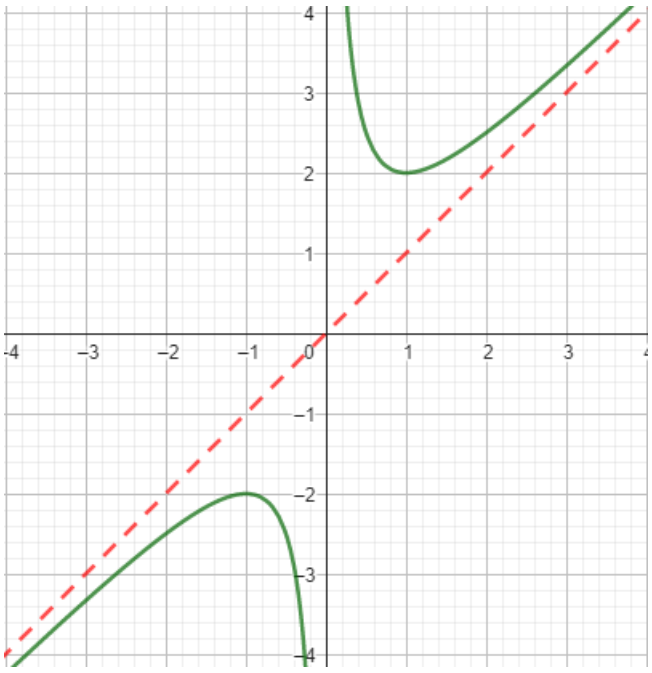
$$f'(x) = 0 \implies x^2 = 1 \implies x = \pm 1,$$

$$f''(-1) = -2 < 0 \implies \text{ maximi och } f''(1) = 2 > 0 \implies \text{ minimi.}$$

Funktionen har inga uppenbara nollställen (faktiskt inga alls). $f(-1) = -2$, $f(1) = 2$, och

$$\lim_{x\to 0^-}(x + \frac{1}{x}) = 0 - \infty = -\infty, \quad \lim_{x\to 0^+}(x + \frac{1}{x}) = 0 + \infty = \infty.$$

Nu har vi all information för att rita funktionen i stora drag.



e)

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2} = x^{-2}e^x \implies f'(x) = (-2x^{-3}+x^{-2})e^x \implies f''(x) = (6x^{-4}-4x^{-2}+x^{-2})e^x.$$

$$f'(x) = 0 \implies (\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3})e^x \implies [x \neq 0] \implies x - 2 = 0 \implies x = 2,$$

$$f''(2) = \frac{e^2}{8} > 0 \implies \text{ minimi.}$$

Vi har nu hittat ett lokalt minimi, och det finns inga nollställen vi kan hitta, därför skall vi nu ta en närmare titt på funktionens beteende vid $x = 0$ och $x \to \pm\infty$.

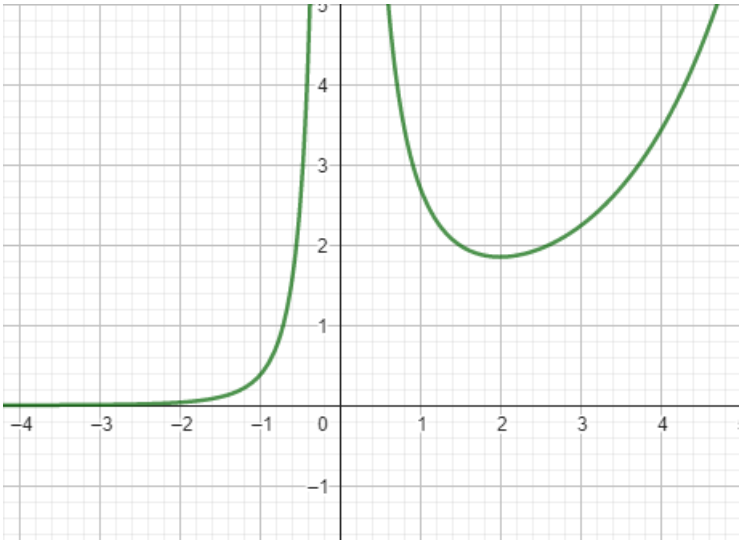
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{x^2} = \frac{e^0}{0^+} = \infty,$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x}{x^2} = \frac{e^0}{(0^-)^2} = \frac{1}{0^+} = \infty,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2} = \infty \text{ (exponentialfunktion vinner över polynom)},$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^2} = \frac{0}{\infty} = 0.$$

Slutligen tittar vi på funktionsvärdet för extrempunkten vi hittade, sedan kan vi rita funktionen, $f(2) = \frac{e^2}{4}$.



10.28

a)

Lösning finns redan.

b)

$1/x^2$ termen kommer att försvinna för stora $|x|$, vilket lämnar den sneda asymptoten $y = 1 - x$.

c)

$$\frac{2x^2 + 1}{x} = 2x + \frac{1}{x},$$

vilket är precis samma funktion som i a), där vi återigen ser att den andra termen kommer att försvinna, och därmed har vi den sneda asymptoten $y = 2x$.

d)

$$\frac{-x^3 + x^2 - 1}{x^2} = -x + 1 - \frac{1}{x^2},$$

vilket är samma som i b), varpå asymptoten är $y = 1 - x$.

10.29

Lösning finns redan.

10.30

a)

Lösning finns redan.

b)

$$\frac{x-x^2}{x^2+1} = \frac{x-(x^2+1)+1}{x^2+1} = \frac{x+1}{x^2+1} - 1 \to -1, \quad \text{då } x \to \pm\infty.$$

10.31

a)

Det är lättast att förenkla med polynomdivision, eftersom vi sedan direkt kan säga vad den sneda asymptoten är.

$$\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad\quad x-4 \\
\hline
x^3-4x^2+3x \qquad \underline{|\ x^2-1} \\
\qquad\quad -x(x^2-1) \\
\hline
\quad -4x^2+4x \\
\qquad -(-4)(x^2-1) \\
\hline
\qquad\qquad\quad 4x-4
\end{array}$$

Alltså är

$$\frac{x^3-4x^2+3x}{x^2-1} = x-4+\frac{4x-4}{x^2-1} = x-4+\frac{4}{x+1},$$

där vi ser att bråket försvinner då $x \to \pm\infty$, vilket lämnar den sneda asymptoten $y = x-4$ för $x \to \pm\infty$.

b)

$$\lim_{x\to\infty} \arctan\frac{x^2}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \arctan\frac{x}{1-1/x} = \arctan\frac{\infty}{1-0} = \arctan\infty = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan\frac{x^2}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \arctan\frac{x}{1-1/x} = \arctan\frac{-\infty}{1+0} = \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2},$$

vilket betyder att funktionen närmar sig ett konstant värde både för negativa och positiva x. Vi har då asymptoterna $y = \frac{\pi}{2}$ för $x \to \infty$ och $y = -\frac{\pi}{2}$ för $x \to -\infty$.

c)

För att hitta lutningen betraktas

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{(x+1)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2+2x+1} = 1,$$

och m-värdet fås av att betrakta

$$\lim_{x\to\pm\infty}(y-kx) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+2x+1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-x^3-2x^2-x}{x^2+2x+1}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+2x+1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} -\frac{2x^2+x}{x^2+2x+1} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} -\frac{2+1/x}{1+2/x+1/x^2} = -\frac{2+0}{1+0+0} = -2.$$

I detta fall blev gränsvärdena för $x \to \pm\infty$ samma, vilket betyder att den sneda asymptoten är $y = kx + m = x - 2$ för $x \to \pm\infty$.

d)

Det finns ingen sned asymptot (för positiva x) eftersom 2^x växer mycket snabbare än x, vilket betyder att den kommer att gå snabbare och snabbare mot ∞. När $x \to -\infty \implies 2^x \to 0 \implies \frac{2^x}{x} \to 0$, så vi har ingen asymptot för $x \to \infty$ och $y = 0$ för $x \to -\infty$.

e)

$$\frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{x^2-1+2}{x^2-1} = 1 + \frac{2}{x^2-1} \to 1, \text{ då } x \to \pm\infty,$$

alltså har vi asymptoten $y = 1$ för $x \to \pm\infty$.

f)

Det finns vertikala asymptoter vid både $x = 0$ och vid $x = 2$. Vidare är $\ln x$ bara definierad för $x > 0$, vilket betyder att det bara finns en poäng i att undersöka $x \to \infty$. Eftersom logaritmer växer långsammare än polynom kommer funktionen att närma sig 0 då $x \to \infty$, vilket ger oss asymptoten $y = 0$ för $x \to \infty$.

10.32

a)

$$f(x) = \frac{x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+1-2x-1}{x^2+2x+1} = 1 - \frac{2x+1}{(x+1)^2} \implies \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1.$$

$$f'(x) = 0 - \frac{2(x+1)^2 - (2x+1)2(x+1)}{(x+1)^4} = -\frac{2x+2-4x-2}{(x+1)^3} = \frac{2x}{(x+1)^3}.$$

Stationära punkter ges då

$$f'(x) = 0 \implies x = 0,$$

och det finns en vertikal asymptot vid $x = -1$,

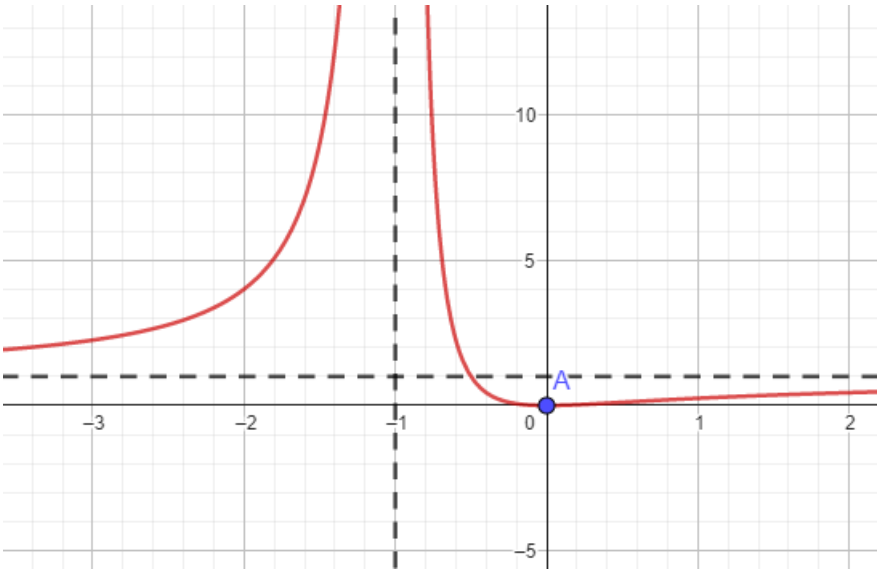
$$\lim_{x\to-1^+} \frac{x^2}{(x+1)^2} = \frac{1}{(0^+)^2} = \frac{1}{0^+} = \infty,$$

$$\lim_{x\to-1^-} \frac{x^2}{(x+1)^2} = \frac{1}{(0^-)^2} = \frac{1}{0^+} = \infty.$$

För att bestämma grafens allmänna utseende studeras nu en teckentabell.

x		-1		0	
$f'(x)$	+	§	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	§	$\searrow$	0	$\nearrow$

Detta visar att $A = (0, 0)$ är ett minimum.



b)

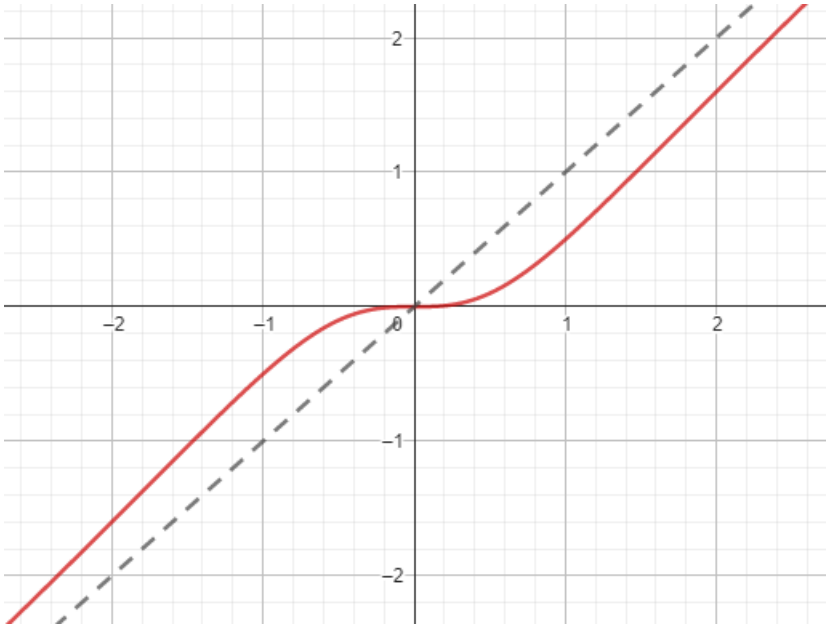
$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1} = \frac{x(x^2+1) - x}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1},$$

vilket betyder att det finns en sned asymptot $y = x$. För att hitta eventuella extrempunkter studeras nu derivatan.

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - x^3 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2},$$

$$f'(x) = 0 \implies x^2(x^2+3) = 0 \implies x = 0.$$

Nämnaren är alltid positiv, så det finns inga vertikala asymptoter. Funktionen är udda, så derivatan blir jämn, och alltså kommer den att vara positiv för $x < 0$ och för $x > 0$, vilket betyder att den stationära punkten svarar mot en terrasspunkt. Detta är tillräckligt för att kunna skissa grafen.



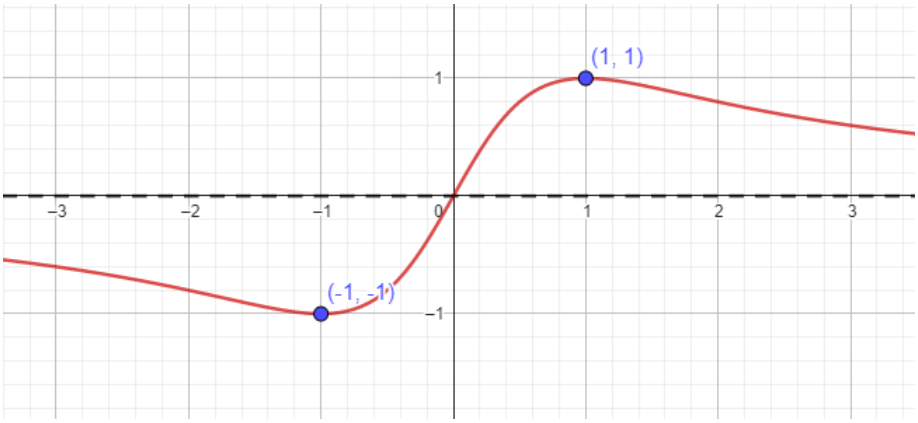
c)

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1} \implies f'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}.$$

$x^2 + 1 \neq 0 \implies$ inga vertikala asymptoter, dessutom är $\lim_{x\to\pm\infty} = 0$. Eventuella extrempunkter ges av

$$f'(x) = 0 \implies 2\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \implies x^2 - 1 = 0 \implies x = \pm 1.$$

Funktionen är udda, så vi behöver bara titta på den ena stationära punktens karaktär - eftersom om den ena är ett maximum vet vi direkt att den andra måste vara ett minimum. Man kan snabbt verifiera att $f'(0) > 0$ och att $f'(2) < 0$, vilket betyder att $x = 1$ är ett maximum, medan $x = -1$ är ett minimum. Med hjälp av detta kan vi skissera grafen.



d)

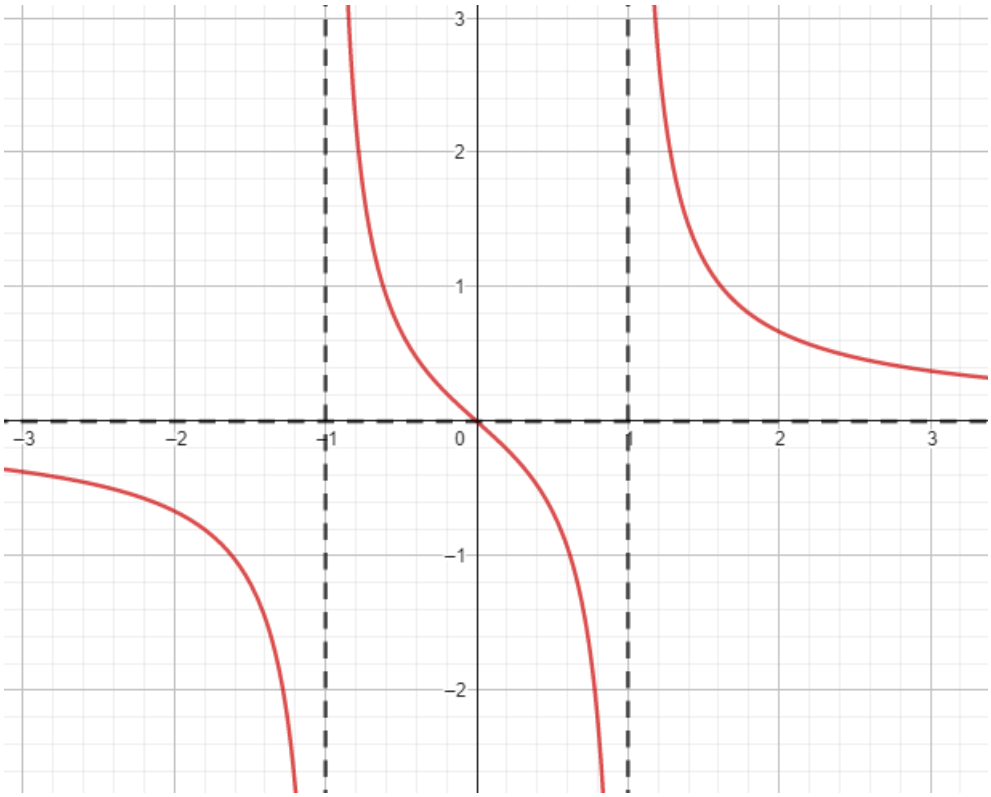
$$f(x) = \frac{x}{x^2-1} \implies f'(x) = \frac{1\cdot(x^2-1)-x(2x)}{(x^2-1)^2} = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} \neq 0.$$

Det finns alltså inga stationära punkter, dock finns det två vertikala asymptoter då $x^2-1=0 \implies x=\pm 1$. Funktionen går också mot 0 då $x \to \pm\infty$, vilket då är den horisontella asymptoten. Vi kan återigen underlätta vårt arbete genom att notera att funktionen är udda, så det räcker med att titta på den ena vertikala asymptoten.

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty \implies \lim_{x\to -1^+} f(x) = \infty,$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{0^+} = \infty \implies \lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty.$$

Ur detta skissar vi grafen.



10.33

Principen för dessa uppgifter är att först derivera funktion och hitta derivatans eventuella nollställen. Sedan kan man titta på om funktionen har några uppenbara nollställen, eller om den har några otillåtna x-värden. Därefter studeras ett antal gränsvärden för att se hur funktionen beter sig kring sina asymptoter. Funktionen undersöks sedan för att hitta eventuella sneda asymptoter, det vill säga asymptoter på formen $y = kx + m$,

där $k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, och $m = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx)$, notera att det kan vara olika k- och m-värden för $+\infty$ och $-\infty$. Efter att man har undersökt gränsvärden klart görs en teckentabell för att avgöra eventuella stationära punkters karaktär, samt funktions utseende i allmänhet. Slutligen kan man rita grafen ganska väl med hjälp av informationen man har tagit fram enligt ovanstående process.

a)

$$f(x) = x - \arctan 2x \implies f'(x) = 1 - \frac{2}{1+4x^2} \implies$$

$$\implies f'(x) = 0 \implies 1 + 4x^2 = 2 \implies 4x^2 = 1 \implies x = \pm\frac{1}{2}.$$

Ett nollställe till funktionen är $f(0) = 0$, och den har inga otillåtna x-värden. Nu undersöks sneda asymptoter:

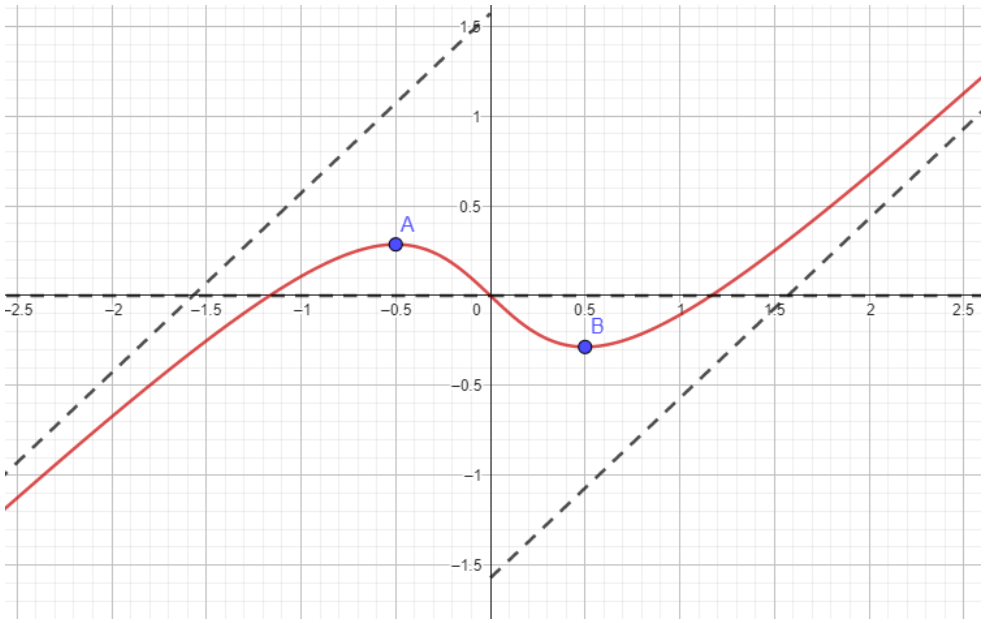
$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x - \arctan 2x}{x}\right) = 1 - 0 = 1,$$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty}(x - \arctan 2x - 1\cdot x) = \lim_{x\to\pm\infty} -\arctan 2x = \begin{cases} -\pi/2, & x \to \infty, \\ \pi/2, & x \to \infty \end{cases}.$$

Alltså har vi dem sneda asymptoterna $y = x - \frac{\pi}{2}$ för $x \to \infty$ och $y = x + \frac{\pi}{2}$ för $x \to \infty$. Nu vill vi undersöka dem stationära punkternas karaktär.

x		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$	$\searrow$	$\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$	$\nearrow$

Ur denna tabell kan vi se att $A = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ är ett lokalt maximum, och $B = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ är ett lokalt minimum. Nu kan vi äntligen skissera grafen.



b)

$$f(x) = \frac{x}{\ln x} \implies f'(x) = \frac{1 \cdot \ln x - x\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{1 - \ln x}{(\ln x)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \implies [x > 0,\ x \neq 1] \implies 1 - \ln x = 0 \implies x = e.$$

Inga uppenbara nollställen för funktionen, men beteendet kring $x = 0^+$, samt $x = 1^-$ och $x = 1^+$ behöver undersökas.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\ln x} = \frac{0}{-\infty} = 0,$$

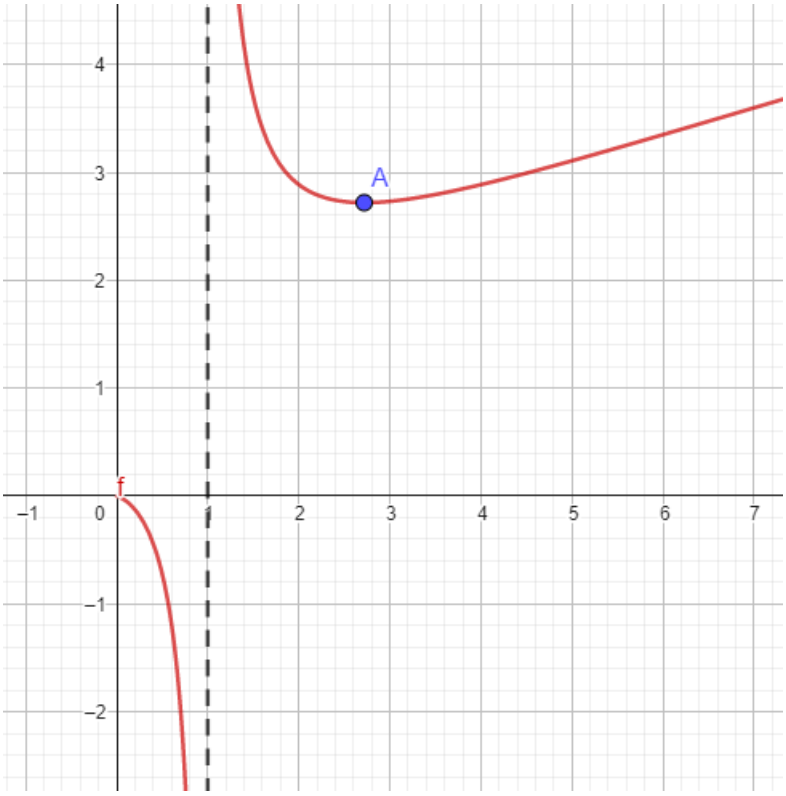
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x}{\ln x} = \frac{1}{0^-} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x}{\ln x} = \frac{1}{0^+} = \infty.$$

Funktionen har inga sneda asymptoter (jämför 10.31 f)), och $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$. Vi går därför direkt till teckentabellen.

x		1		e	
$f'(x)$	-	§	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	§	$\searrow$	e	$\nearrow$

Vilket visar att $A = (e, e)$ är ett lokalt minimum. Detta ger grafen:



c)

$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} - \arctan x \implies f'(x) = \frac{2\sqrt{1+x^2} - 2x\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= \frac{2+2x^2-2x^2}{(1+x^2)^{3/2}} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{2-\sqrt{1+x^2}}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

$f(0) = 0$, och det finns inga otillåtna värden på x. Stationära punkter

$$f'(x) = 0 \implies 2 - \sqrt{1+x^2} = 0 \implies 1 + x^2 = 4 \implies x = \pm\sqrt{3},$$

båda är giltiga lösningar. Det kan vara värt att notera att funktionen är udda också, vilket betyder att kvoten $f(x)/x$ är jämn, så det kommer vara samma k för $\pm\infty$. Därför räcker det med att titta på ett gränsvärde för att hitta k-värdet till den sneda asymptoten.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} - \arctan x}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{\arctan x}{x}\right) = 0 - 0 = 0.$$

Igen, eftersom $f(x) - kx$ är udda, kommer m för $x \to -\infty$ att vara samma som $-m$ för $x \to \infty$, så vi kan titta på det ena gränsvärdet och sedan negera det för att få det andra. (Om man tycker det är förvirrande med alla dessa "udda/jämn-resonemang"kan man beräkna alla gränsvärden för sig, vilket kommer ge samma resultat (men jag vill dock underlätta mitt arbete).)

$$m_+ = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} - \arctan x - 0\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{|x|\sqrt{1/x^2+1}} - \arctan x\right) =$$

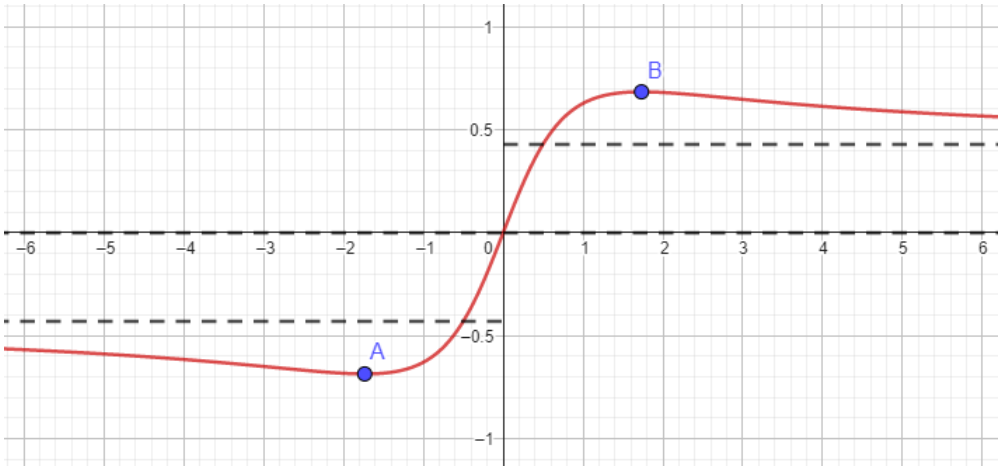
$$= [x > 0] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{x\sqrt{1/x^2+1}} - \arctan x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{1/x^2+1}} - \arctan x\right) = \frac{2}{\sqrt{0+1}} - \frac{\pi}{2} = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

Detta ger direkt att $m_- = \frac{\pi}{2} - 2$, och vi har alltså dem sneda asymptoterna $y = 2 - \frac{\pi}{2}$ för $x \to \infty$, och $y = \frac{\pi}{2} - 2$ för $x \to -\infty$. Vi vill nu undersöka dem stationära punkternas karaktär.

x		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	$\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$	$\nearrow$	$\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$	$\searrow$

Alltså är $A = \left(-\sqrt{3}, \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$ ett minimum, och $B = \left(\sqrt{3}, \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$ ett maximum. Med denna information kan vi nu rita grafen.



d)

Funktionen är $2\pi/3$-periodisk, så det räcker med att undersöka den på intervallet $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$, och sedan bara utvidga den $2\pi/3$-periodiskt.

$$f(x) = \frac{\sin 3x}{1 + \frac{1}{2}\cos 3x} \implies f'(x) = \frac{3\cos 3x(1 + \frac{1}{2}\cos 3x) - \sin 3x(-\frac{3}{2}\sin 3x)}{(1 + \frac{1}{2}\cos 3x)^2} =$$

$$= \frac{3\cos 3x + \frac{3}{2}\cos^2 3x + \frac{3}{2}\sin^2 3x}{(1 + \frac{1}{2}\cos 3x)^2} = [\cos^2 3x + \sin^2 3x = 1] =$$

$$= \frac{3\cos 3x + \frac{3}{2}}{(1 + \frac{1}{2}\cos 3x)^2} = \frac{12\cos 3x + 6}{(2 + \cos 3x)^2}.$$

Eftersom $-1 \leq \cos 3x \leq 1$ är nämnaren alltid skild från 0 och vi har inga otillåtna punkter att undersöka.

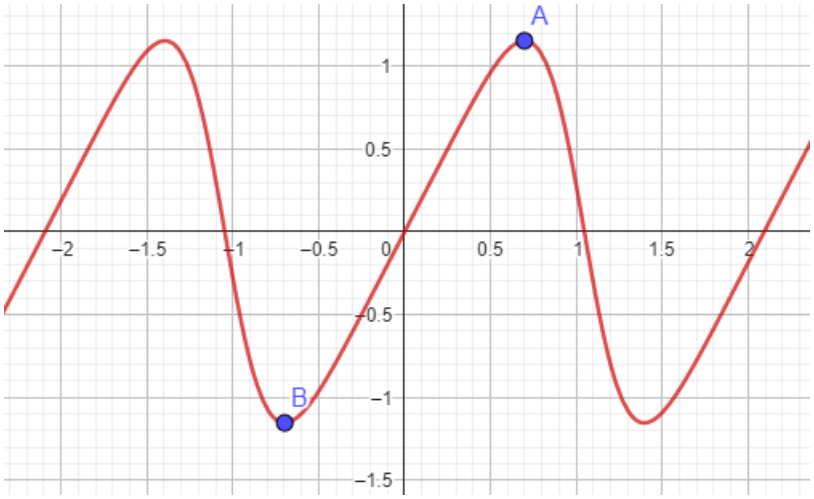
$$f(x) = 0 \implies \sin 3x = 0 \implies 3x = k\pi \implies x = \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z},$$

på intervallet vi tittar på får vi nollstället $x = 0$ och $x = -\frac{\pi}{3}$. Stationära punkter ges av

$$f'(x) = 0 \implies 12\cos 3x + 6 = 0 \implies \cos 3x = -\frac{1}{2} \implies$$

$$\implies 3x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \implies x = \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3},$$

vilket på vårt intervall ger de stationära punkterna $x = -\frac{2\pi}{9}$ och $x = \frac{2\pi}{9}$. Även denna gång är funktionen udda, så det räcker med att undersöka den ena stationära punkten. Det finns inte heller några sneda asymptoter - eftersom funktionen är periodisk. Detta betyder att det enda som är kvar att göra är att kontrollera en av de stationära punkterna, samt titta på funktionsvärdet där. $f(2\pi/9) = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Man kontrollerar även kvickt att $f'(\pi/9) > 0$, och $f'(\pi/3) < 0$, vilket betyder att $x = \frac{2\pi}{9}$ är ett maximum, och således är $x = -\frac{2\pi}{9}$ ett minimum. Vi har därför extrempunkterna, på vårt intervall, $A = \left(\frac{2\pi}{9}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ som är ett maximum, och $B = \left(-\frac{2\pi}{9}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ som är ett minimum. Utvidgar man allt detta som vi har tagit reda på $\frac{2\pi}{9}$-periodiskt får man grafen.



10.34

För att hitta största och minsta värde för funktioner definierade på ett slutet intervall, behöver man titta på stationära punkter, randpunkterna, och eventuella punkter där funktionen inte är deriverbar/kontinuerlig.

a)

Lösning finns redan.

b)

Randpunkter att kontroller: $x = 0$, $x = 2$.

$$f(x) = 6x - x^3 \implies f'(x) = 0 \implies 6 - 3x^2 = 0 \implies x = \underset{(-)}{+}\sqrt{2},$$

den negativa roten är utanför intervallet och ignoreras därför.

$$\begin{cases} f(0) = 0, \\ f(\sqrt{2}) = 6\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}, \\ f(2) = 12 - 8 = 4, \end{cases}$$

alltså är största värdet $4\sqrt{2}$ och minsta 0.

c)

Randpunkter att kontroller: $x = 0$, $x = 2$.

$$f(x) = xe^{-x} \implies f'(x) = 0 \implies e^{-x} - xe^{-x} = 0 \implies x = 1,$$

$$\begin{cases} f(0) = 0, \\ f(1) = e^{-1}, \\ f(2) = 2e^{-2} < e^{-1}. \end{cases}$$

Största: e^{-1}; minsta: 0.

10.35

Lösning finns redan.

10.36

Lösning finns redan.

10.37

a)

Inga randpunkter att kontroller, men vi behöver undersöka gränsvärdet då $x \to \pm\infty$.

$$f(x) = x^4 e^{-x} \implies f'(x) = (4x^3 - x^4)e^{-x},$$

$$f'(x) = 0 \implies x^3(4-x)e^{-x} = 0 \implies \begin{cases} x = 0, \\ x = 4, \end{cases}$$

x		0		4	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$256e^{-4}$	$\searrow$

$$\lim_{x\to\infty} x^4 e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{e^x} = 0,$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^4 e^{-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4}{e^x} = \frac{(-\infty)^4}{0^+} = \infty.$$

Detta visar att funktionen inte har något största värde, men att $f(0) = 0$ ger ett minsta värde. Vi vet nu att funktionen har ett lokalt minimi i $x = 0$, ett maximi i $x = 4$, och har minsta värde 0.

b)

$$f(x) = \frac{x}{\ln x} \implies f'(x) = \frac{1 \cdot \ln x - x\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \implies \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} = 0 \implies [x \neq 1] \implies \ln x - 1 = 0 \implies x = e.$$

x		1		e	
$f'(x)$	-	§	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	§	$\searrow$	e	$\nearrow$

Det finns alltså ett lokalt minimi vid $x = e$. Nu behöver vi undersöka några gränsvärden. Ställen av intresse är 0^+, 1^-, 1^+, och ∞. Eftersom jag vet svaret kommer jag att börja med 1^- och 1^+.

$$\lim_{x\to1^-} \frac{x}{\ln x} = \frac{1}{0^-} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to1^+} \frac{x}{\ln x} = \frac{1}{0^+} = \infty.$$

Detta visar att funktionen inte antar något största eller minsta värde.

c)

Man ser direkt att $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$, så den antar inte något största värde.

$$f(x) = x^2 e^{\frac{x^2}{2}-3x+1} \implies$$

$$\implies f'(x) = 2xe^{\frac{x^2}{2}-3x+1} + x^2(x-3)e^{\frac{x^2}{2}-3x+1} = x(x^2-3x+2)e^{\frac{x^2}{2}-3x+1}.$$

$$f'(x) = 0 \implies x(x^2-3x+2) = 0 \implies \begin{cases} x = 0, \\ x = 1, \\ x = 2. \end{cases}$$

x		0		1		2	
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$e^{-3/2}$	$\searrow$	$4e^{-3}$	$\nearrow$

Alltså är $x = 0$ ett lokalt minimi, $x = 1$ ett lokalt maximi, och $x = 2$ ett lokalt minimi. Ur tabellen kan det också avgöras att 0 är funktionens minsta värde.

d)

Funktionen är begränsad, eftersom

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x^2+1} + 2\arctan x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+2/x}{x+1/x} + 2\arctan x\right) =$$

$$= \frac{1+0}{\infty+0} + 2\arctan\infty = 0 + 2\frac{\pi}{2} = \pi,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+2}{x^2+1} + 2\arctan x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1+2/x}{x+1/x} + 2\arctan x\right) =$$

$$= \frac{1-0}{-\infty-0} + 2\arctan(-\infty) = 0 - 2\frac{\pi}{2} = -\pi.$$

Det är dock viktigt att notera att funktion aldrig antar dessa värden i oändligheten, bara att funktionen närmar sig dem.

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2+1} - 2\arctan x \implies f'(x) = \frac{1\cdot(x^2+1)-(x+2)2x}{(x^2+1)^2} + \frac{2}{1+x^2} =$$

$$= \frac{x^2+1-2x^2-4x+2x^2+2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2-4x+3}{(x^2+1)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \implies x^2-4x+3 = 0 \implies \begin{cases} x = 1, \\ x = 3. \end{cases}$$

x		1		3	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}+\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}+2\arctan 3$	$\nearrow$

Härur ser vi att $x = 1$ är ett lokalt maximi, och $x = 3$ är ett lokalt minimi. Vidare ser vi att $\frac{3}{2}+\frac{\pi}{2} < \pi$, vilket innebär att funktionen inte antar något största värde, och inte heller något minsta för den delen (men det är lättare att se eftersom $\frac{1}{2}+2\arctan 3 > 0 > -\pi$).

e)

Randpunkter att kontrollera $x = 1/2$, och dessutom är $\ln x \neq 0$ på det angivna intervallet.

$$f(x) = x\ln x + (x\ln x)^2 \implies f'(x) = \ln x + x\frac{1}{x} + 2x(\ln x)(\ln x + x\frac{1}{x}) =$$

$$= \ln x + 1 + 2x(\ln x)^2 + 2x\ln x = 2x(\ln x)^2 + 2x\ln x + \ln x + 1 =$$

$$= 2x(\ln x)(\ln x + 1) + \ln x + 1 = (\ln x + 1)(2x\ln x + 1).$$

$$f'(x) = 0 \implies \begin{cases} \ln x + 1 = 0, \\ 2x\ln x + 1 = 0 \text{ (saknar lösning)} \end{cases} \implies \ln x = -1 \implies x = e^{-1}.$$

x		e^{-1}	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$-e^{-1} + e^{-2}$	$\nearrow$

Detta visar att $x = e^{-1}$ är ett lokalt minimi, nu behöver vi bara titta på funktionsvärdet i $x = 1/2$ och gränsvärdet då $x \to 0^+$.

$$f(1/2) = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{\ln 2}{2} + \left(-\frac{\ln 2}{2}\right)^2 =$$

$$= -\frac{\ln 2}{2} + \frac{(\ln 2)^2}{4} > -e^{-1} + e^{-2} \text{ (kontrollera med miniräknare)},$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x\ln x + (x\ln x)^2\right) = 0 + 0^2 = 0.$$

Vi kan nu säga att funktionen saknar största värde (den är ej definierad i $x = 0$), och att den har ett lokalt minimi i $x = e^{-1}$, med minsta värde $-e^{-1} + e^{-2}$.

10.38

Alla funktioner är kontinuerlig och definierade på hela sitt intervall, vilket betyder att de kommer anta alla värden mellan deras största och minsta. Med denna kunskap kan vi direkt säga vad värdemängden för funktionerna är.

a)

Värdemängden är $[-1, 3]$.

b)

Värdemängden är $[0, 4\sqrt{2}]$.

c)

Värdemängden är $[0, e^{-1}]$.

10.39

Funktionen är definierad på hela $\mathbb{R}$, och den är kontinuerlig, alltså kommer den att anta alla värden mellan sitt största och sitt minsta. Det gör att vi direkt kan säga att värdemängden är $(-\infty, 27e^{-3}]$

10.40

Volymen ges av $V = \pi r^2 h$, och materialåtgången bestäms av mantelarean, $A = \pi r^2 + 2\pi r h$, vilket är summan av botten och cylinderytans area. Ur volymen får vi att $h = V/(\pi r^2)$, vilket insatt i arean ger

$$A(r) = \pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = \pi r^2 + \frac{2V}{r},$$

vi finner nu minimum genom att betrakta när derivatan är 0,

$$A'(r) = 2\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0 \implies r^3 = \frac{2V}{2\pi} = \frac{V}{\pi} \implies$$

$$\implies r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} \implies h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi \left(\frac{V}{\pi}\right)^{2/3}} = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}.$$

Egentligen behöver man också kontrollera att detta svarar mot ett faktiskt minimi, men eftersom arean växer mot oändligheten när antingen r eller h blir stort är det uppenbart ett minimi. Om man inte tror mig kan man kontrollera att andraderivatan är positiv för det aktuella värdet på r.

10.41

Kostnaden för t timmars körning ges av

$$K(t) = 86t + 6(2 + \frac{x^2}{300})t,$$

och för en 300 km lång körning är $t = 300/x$, där x är hastigheten i km/h, alltså är

$$K(x) = 86\frac{300}{x} + (12 + \frac{6x^2}{300})\frac{300}{x} = \frac{29400}{x} + 6x.$$

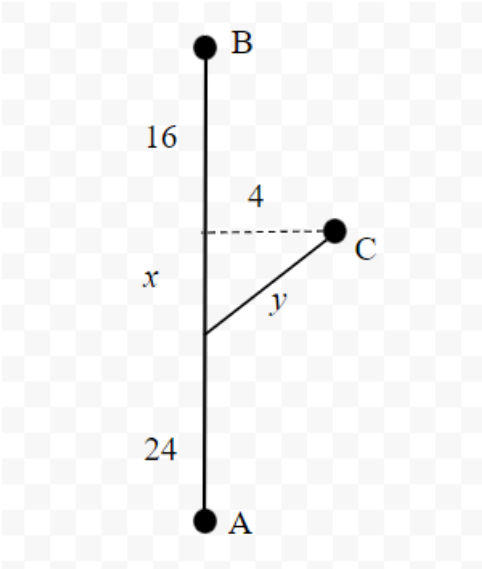
Vi får nu den minsta kostnaden genom att sätta derivatan till 0 och genom att kontrollera randpunkterna, $x = 30$ samt $x = 90$,

$$K'(x) = -\frac{29400}{x^2} + 6 = 0 \implies x^2 = 4900 \implies x = {}_{(-)}^{+}70 \text{ km/h},$$

$$\begin{cases} K(70) = 840 \text{ kr}, \\ K(30) = 1160 \text{ kr}, \\ K(90) \approx 867 \text{ kr}, \end{cases}$$

vilket visar att $x = 70$ km/h ger den minsta kostnaden 840 kr.

10.42



I någon godtycklig enhet kan vi uttrycka den totala förbrukning, som vi vill minimera, enligt

$$f(x,y) = 2(y + 24 - x) + y + 16 + x,$$

där den första termen är sträckan till A, medan den andra är till B. Pythagoras berättar vänligt nog för oss att $y = \sqrt{x^2 + 4^2}$, vilket insatt i förbrukningen ger att

$$f(x) = 3\sqrt{x^2 + 16} + 64 - x \implies f'(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 16}} - 1.$$

Minimi ges av

$$f'(x) = 0 \implies 3x = \sqrt{x^2 + 16} \implies 9x^2 = x^2 + 16 \implies x = {}_{(-)}^{+}\sqrt{2},$$

där den negativa roten är en falsk lösning. Det kan enkelt kontrolleras att detta faktiskt svarar mot ett minimi, och enligt bilden är x definierad positiv som sträckan från C ner mot A, alltså kommer anslutningen att vara $24 - \sqrt{2}$ km norr om A.

10.43

Tiden det tar ges av

$$f(t) = t_{\text{strand}} + t_{\text{sjö}} = \frac{x_{\text{strand}}}{v_{\text{strand}}} + \frac{x_{\text{sjö}}}{v_{\text{sjö}}} = \frac{x_{\text{strand}}}{10} + \frac{x_{\text{sjö}}}{6}.$$

Om vi betecknar sträckan från P till den punkt han når stranden med x, får vi att $x_{\text{strand}} = x$, och $x_{\text{sjö}} = \sqrt{2^2 + (6-x)^2}$, vilket betyder att vi skall minimera

$$f(x) = \frac{x}{10} + \frac{\sqrt{(x-6)^2 + 4}}{6} \implies$$

$$\implies f'(x) = \frac{1}{10} + \frac{1}{6}\frac{2(x-6)}{2\sqrt{(x-6)^2+4}} = \frac{1}{10} + \frac{1}{6}\frac{x-6}{\sqrt{(x-6)^2+4}},$$

vilket betyder att vi vill veta när

$$f'(x) = 0 \implies \frac{1}{10} + \frac{1}{6}\frac{x-6}{\sqrt{(x-6)^2+4}} = 0 \implies \frac{6}{10}\sqrt{(x-6)^2+4} = 6 - x \implies$$

$$\implies \frac{9}{25}((x-6)^2+4) = (6-x)^2 = (x-6)^2 \implies (x-6)^2\left(1 - \frac{9}{25}\right) = \frac{36}{25} \implies$$

$$\implies (x-6)^2 = \frac{36}{16} = \frac{9}{4} \implies x = 6 \overset{(+)}{(-)} \frac{3}{2} = \frac{9}{2} \text{ km},$$

den positiva roten är en falsk lösning och utesluts därför. Om man vill kan man kontrollera att detta faktiskt är ett minimi.

10.44

Avståndsformeln ger att avståndet till origo är

$$d(x,y) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + (1-x)^2},$$

men eftersom $\sqrt{x}$ är en växande funktion räcker det med att minimera diskriminanten, det vill säga $D = d^2$.

$$D(x) = x^2 + (1-x)^2 = x^2 + 1 - 2x^2 + x^4 = x^4 - x^2 + 1 \implies D'(x) = 4x^3 - 2x \implies$$

$$\implies D''(x) = 12x^2 - 2.$$

$$D'(x) = 0 \implies x(4x^2 - 2) = 0 \implies \begin{cases} x = 0, \\ x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} D''(0) = -2 < 0 \implies \text{ maximi}, \\ D''(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = 12\frac{1}{2} - 2 = 4 > 0 \implies \text{ minimi}. \end{cases}$$

Detta visar att punkterna $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$ är närmast origo.

10.45

Tangenten till kurvan i en godtycklig punkt $x = a \geq 0$ ges av

$$y_t = f'(a)(x-a) + f(a) = [f(x) = e^{-x}] = -e^{-a}(x-a) + e^{-a} = e^{-a}(a+1-x).$$

Basen för triangeln ges av tangentens skärning med x-axeln, och höjden av skärningen med y-axeln.

$$y_t = 0 \implies e^{-a}(a+1-x) = 0 \implies b = x = a+1,$$

$$h = y_t(0) = e^{-a}(a+1) \implies$$

$$A(a) = \frac{bh}{2} = \frac{e^{-a}(a+1)^2}{2} \implies A'(a) = -\frac{1}{2}e^{-a}(a+1)^2 + e^{-a}(a+1) =$$

$$= e^{-a}(a+1)(-\frac{1}{2}(a+1)+1) = \frac{1}{2}e^{-a}(a+1)(-a+1) = \frac{1}{2}e^{-a}(1-a^2).$$

Stationära punkter ges av:

$$A'(a) = 0 \implies \frac{1}{2}e^{-a}(1-a^2) = 0 \implies a = \underset{(-)}{+}1,$$

där den negativa utesluts eftersom $a \geq 0$. Av uppgiftens utformning kan vi säkert anta att detta svarar mot ett maximi - man kan även kolla det om man känner sig osäker - och arean blir då $A(1) = 2e^{-1}$ areaenheter.

10.46

$$y = f(x) = \frac{x}{1+x} = \frac{1+x-1}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x} \implies f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

Av bekvämlighetsskäl kommer jag att skriva $P = (x, y) = (a, \frac{a}{1+a})$, så förvirring inte uppstår. Kurvnormalen genom P ges nu av

$$y_n = \frac{-1}{f'(a)}(x-a) + f(a) = -(1+a)^2(x-a) + \frac{a}{1+a},$$

och Q ges av normalens skärning med x-axeln:

$$y_n = 0 \implies (1+a)^2(x-a) = \frac{a}{1+a} \implies x = a + \frac{a}{(1+a)^3}.$$

Om vi återgår till bokens skrivsätt för P, har vi nu hörnen $P = \left(x, \frac{x}{1+x}\right)$, $Q = \left(x + \frac{x}{(1+x)^3}, 0\right)$, och $R = (x, 0)$, detta betyder att basen för triangeln är $b = x + \frac{x}{(1+x)^3} - x = \frac{x}{(1+x)^3}$, och höjden är $h = \frac{x}{1+x}$. Arean blir då

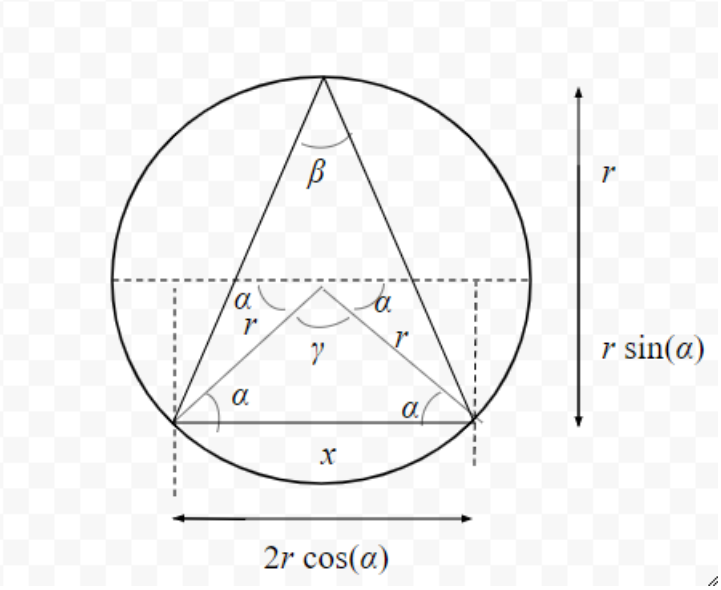
$$A(x) = \frac{bh}{2} = \frac{1}{2}\frac{x}{(1+x)^3}\frac{x}{1+x} = \frac{x^2}{2(1+x)^4} \implies$$

$$\implies A'(x) = \frac{2x(1+x)^4 - x^2 4(1+x)^3}{2(1+x)^8} = \frac{x-x^2}{(1+x)^5}.$$

$$A'(x) = 0 \implies [x \geq 0] \implies x - x^2 = 0 \implies \begin{cases} x = 0, \\ x = 1, \end{cases}$$

där $x = 0$ uppenbarligen är ett minimi ($A(0) = 0$), vilket betyder att den största arean ges då $x = 1$ (man kan inte ha två minimi efter varandra om funktionen är kontinuerlig mellan - inte i endimensionell analys iallafall (i flerdimensionell analys kan det hända)), men hursomhelst blir $P = (1, \frac{1}{2})$.

10.47



Den extremt kladdiga bilden visar att höjden på triangeln ges av $r + r\sin\alpha$, och att basen ges av $2r\cos\alpha$, vilket ger arean

$$A(\alpha) = \frac{2r\cos\alpha(r + r\sin\alpha)}{2} = [r = 1] = \cos\alpha(1 + \sin\alpha) = \cos\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha \implies$$

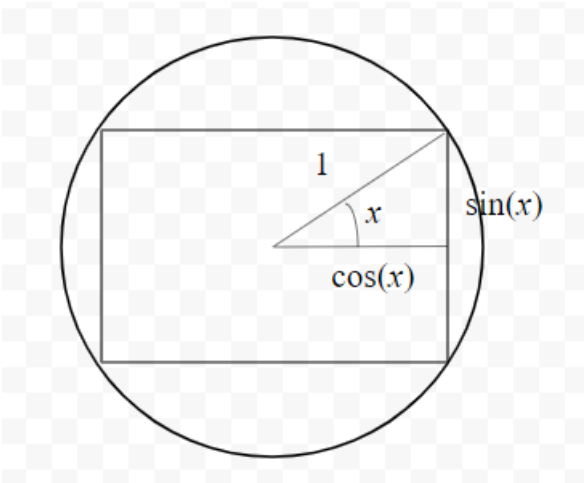
$$\implies A'(\alpha) = -\sin\alpha + \cos 2\alpha = -\sin\alpha + 1 - 2\sin^2\alpha,$$

vi söker nu när $A'(\alpha) = 0 \implies [t = \sin\alpha] \implies -2t^2 - t + 1 = 0 \implies \begin{cases} t = \sin\alpha = -1, \\ t = \sin\alpha = \frac{1}{2}, \end{cases}$ att $\sin\alpha = -1$ betyder att punkterna som benen går mot hade sammanfallit med topppunkten, och alltså hade det inte funnits en triangel, bara en punkt. För $\sin\alpha = 1/2$ räcker det med att titta på den första lösningen som är $\alpha = \pi/6$.

$$A''(\alpha) = -\cos\alpha - 2\sin 2\alpha \implies A''(\pi/6) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\frac{\sqrt{3}}{2} < 0 \implies \text{ maximi.}$$

Arean blir då $A(\pi/6) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$. Lösningen $\alpha = 5\pi/6$ är geometriskt konstig att föresälla sig, och därför orimlig. Notera att det inte säger något om vilken form triangeln har, men randvinkelsatsen säger att $\gamma = 2\beta$ och den räta linjen ger att $2\alpha + \gamma = \pi \implies 2\beta = \pi - 2\pi/6 = 2\pi/3 \implies \beta = \pi/3$. Att triangeln är likbent betyder att summan av resterande vinklar är $\pi - \beta = 2\pi/3$, och vinklarna är lika, vilket betyder att alla vinklar är $\pi/3$ och triangeln är därmed liksidig.

10.48



Arean ges av rektangelns bas gånger dess höjd, det vill säga

$$A(x) = 2\cos(x)2\sin(x) = 2\sin 2x \implies A'(x) = 4\cos 2x \implies A''(x) = -8\sin 2x.$$

$$A'(x) = 0 \implies 4\cos 2x = 0 \implies 2x = \pi/2 \implies x = \pi/4,$$

$$A''(\pi/4) = -8\sin(\pi/2) = -8 < 0 \implies \text{ maximi},$$

och att vinkeln är $\pi/4$ innebär att det är en kvadrat. $\square$
Arean blir $A(\pi/4) = 2\sin(\pi/2) = 2$ areaenheter.

10.49

Låt längden på brädorna normeras till 1 (man kan sätta det till någon godtycklig konstant, men det kommer bara vara mer symboliskt krävande att skriva). Cosinussatsen ger att basen till den övre rektangelbiten i kvadrat kan skrivas som

$$y^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cdot 1\cdot 1\cdot\cos\alpha = 2 - 2\cos\alpha \implies y = {}_{(-)}^{+}\sqrt{2-2\cos\alpha}.$$

Detta tillsammans med areasatsen ger att den totala arean som vi får av brädkonfigurationen är

$$A(\alpha) = 1\cdot y + \frac{1\cdot 1\cdot\sin\alpha}{2} = \sqrt{2-2\cos\alpha} + \frac{1}{2}\sin\alpha \implies$$

$$\implies A'(\alpha) = \frac{(2-2\cos\alpha)'}{2\sqrt{2-2\cos\alpha}} + \frac{1}{2}\cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2-2\cos\alpha}} + \frac{1}{2}\cos\alpha.$$

$$A'(\alpha) = 0 \implies \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2-2\cos\alpha}} + \frac{1}{2}\cos\alpha = 0 \implies 2\sin\alpha = \cos\alpha\sqrt{2-2\cos\alpha} \implies$$

$$\implies 4\sin^2\alpha = \cos^2\alpha(2-2\cos\alpha) \implies [t = \cos\alpha,\ \sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = 1-t^2] \implies$$

$$\implies 4 - 4t^2 = 2t^2 - 2t^3 \implies t^3 - 3t^2 + 2 = 0,$$

$t = 1$ är en rot, så vi kan utföra polynomdivision.

$$\begin{array}{r|l} t^2 - 2t - 2 & \\ \hline t^3 - 3t^2 + 2 & t - 1 \\ \hline -t^2(t-1) & \\ \hline -2t^2 + 2 & \\ -(-2t)(t-1) & \\ \hline -2t + 2 & \\ -(-2)(t-1) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$t^3 - 3t^2 + 2 = (t-1)(t^2 - 2t - 2) = 0 \implies \begin{cases} t = \cos\alpha = 1, \\ t = \cos\alpha = 1 \overset{(+)}{-} \sqrt{3}, \end{cases}$$

den positiva roten till andragradsfaktorn ignoreras eftersom $\cos\alpha \leq 1$. $\cos\alpha = 1 \implies \alpha = 0$, vilket ger arean 0, så det är ett minimum. Alltså måste $\cos\alpha = 1 - \sqrt{3}$ motsvara ett maximum. Detta betyder att vinkeln vi söker ges av

$$\alpha = \arccos(1 - \sqrt{3}) = 2\arccos\frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

10.50

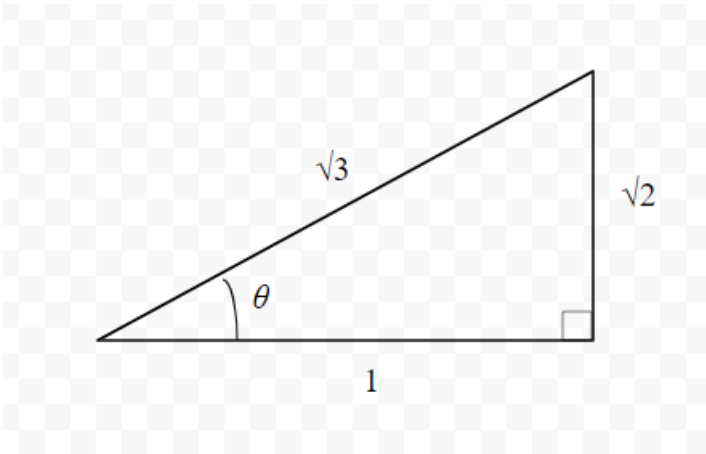
Om vi övergår till polära koordinater blir $x = r\cos\theta$, och $y = r\sin\theta$, r är fixt. Bredden och höjden ges av $2x$ respektive $2y$. I polära koordinater blir

$$W(\theta) = \frac{xy^2}{6} = \frac{r^3\cos\theta\sin^2\theta}{6} \implies W'(\theta) = \frac{r^3}{6}(2\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta).$$

$$W'(\theta) = 0 \implies 2\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta = \sin\theta(2\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0 \implies$$

$$\implies \begin{cases} \sin\theta = 0, \\ 2\cos^2\theta - \sin^2\theta = 0 \implies \tan^2\theta = 2. \end{cases}$$

$\sin\theta = 0$ ger att $W = 0$, det vill säga ett minimum, och av symmetri ger $\pm\theta$ samma belopp, vilket betyder att det räcker med att titta på $\tan\theta = \sqrt{2} \implies \theta = \arctan\sqrt{2}$, som motsvarar ett maximum.



Ur figuren ser vi att $\theta = \arctan\sqrt{2} = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}} = \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$. Vilket betyder att den sökta bredden och höjden är

$$b = 2x = 2r\cos\theta = 2r\cos(\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}r}{3},$$

$$h = 2y = 2r\sin\theta = 2r\sin(\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}) = 2r\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2\sqrt{6}r}{3}.$$

10.51

a)

Vi vill minimera $\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x-1)^2+y^2}$, där $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} = 1 \implies y^2 = 4-\frac{4x^2}{9}$. Eftersom $\sqrt{x}$ är växande räcker det med att minimera diskriminanten - vi vill alltså hitta när följande funktion antar sitt minsta värdet, eller en konstant multiplicerat med den,

$$(x-1)^2+4-\frac{4x^2}{9} = x^2-2x+1+4-\frac{4x^2}{9} = \frac{5x^2}{9}-2x+5 \implies [\text{multiplicera med } 9/5] \implies$$

$$\implies \text{hitta när följande funktion är som minst: } x^2-\frac{18}{5}x+9 =$$

$$= (x-\frac{9}{5})^2 - \left(\frac{9}{5}\right)^2 + 9,$$

och denna är som minst då $x = 9/5$. Alltså är det ursprungliga avståndet, som vi är intresserade av, som minst när $x = 9/5$, detta ger att planeten har det närmsta avståndet

$$\sqrt{\left(\frac{9}{5}-1\right)^2+4-\frac{4}{9}\left(\frac{9}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{4^2}{5^2}+4-\frac{4\cdot 9}{5^2}} = \sqrt{\frac{80}{25}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

b)

Exakt samma princip som i a), nu med $x^2 = y^2+1$. Alltså är avståndet

$$\sqrt{(x^2+(y-1)^2} = \sqrt{y^2+1+y^2-2y+1} = \sqrt{2y^2-2y+2} =$$

$$= \sqrt{2\left(\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+1\right)} = \sqrt{2\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+2} =$$

$$= \sqrt{2\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}} \geq [y = 1/2] \geq \sqrt{2\cdot 0+\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

10.52

Lösning finns redan.

10.53

Sätt $t = e^x \implies e^{2x} - e^x = a \iff t^2 - t - a = 0$. pq-formeln ger nu att

$$t = e^x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + a}.$$

$e^x > 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$, vilket ger ett antal villkor på roten.

$$\begin{cases} \frac{1}{4} + a < 0 \implies \text{0 lösningar}, \\ \frac{1}{4} + a = 0 \implies \text{1 lösning}, \\ 0 < \sqrt{\frac{1}{4} + a} < \frac{1}{2} \implies \text{2 lösningar}, \\ \sqrt{\frac{1}{4} + a} \geq \frac{1}{2} \implies \text{1 lösning}, \end{cases} \iff \begin{cases} a < -\frac{1}{4} \implies \text{0 lösningar}, \\ a = -\frac{1}{4} \implies \text{1 lösning}, \\ -\frac{1}{4} < a < 0 \implies \text{2 lösningar}, \\ a \geq 0 \implies \text{1 lösning}. \end{cases}$$

Att det första villkoret ger 0 lösningar beror på att rötterna är komplexa då, det andra ger 1 lösning eftersom man får en positiv dubbelrot, det tredje ger 2 lösningar för att roten är tillräckligt liten så att när man subtraherar den från 1/2 blir det fortfarande positivt, så man har två positiva rötter, och slutligen ger den sista 1 lösning eftersom den negativa roten ger en negativ lösning, men $e^x > 0$.

10.54

Principen för alla dessa är att flytta över allt till en sida, bilda en funktion, visa att den är växande på det angivna intervallet, och sedan kontrollera dess startvärde. Om man har en funktion som är växande på ett intervall och den börjar med att vara större än 0, kommer den fortsätta att vara det - eftersom den är växande. Man kan även få ett funktionen är avtagande, men man kan fortfarande titta på ett startvärde och sedan på punkten där den blir växande igen, och om funktionen är kontinuerlig vet man att den inte har gjort några otillåtna hopp (detta blev lite konstigt förklarat, och det är nog bättre att titta på deluppgift b) istället).

a)

Lösning finns redan.

b)

$$e^x > x + 1,\ x \neq 0 \iff f(x) = e^x - x - 1 > 0,\ x \neq 0.$$

$$f'(x) = e^x - 1 \implies \begin{cases} f'(x) < 0,\ x < 0, \\ f'(x) > 0,\ x > 0 \end{cases}$$

Derivatans enda nollställe är då $x = 0$, vilket betyder att funktionen är strängt avtagande för $x < 0$ och strängt växande för $x > 0$. Det som behöver kontrolleras nu är att om funktionen är positiv i $-\infty$ och precis innan $x = 0$ eftersom då vet vi att den inte kan ha passerat nollan, vidare behöver vi kontrollera att funktionen är icke-negativ i $x = 0$

och sedan tar det faktum att den är strängt växande för positiva x hand om att den är positiv då.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty,\ f(0) = 0,$$

vilket visar att den är positiv för negativa x och för positiva x. □

c)

$$\ln(1+4x) > \arctan 3x,\ x > 0 \iff f(x) = \ln(1+4x) - \arctan 3x > 0,\ x > 0.$$

$$f'(x) = \frac{4}{1+4x} - \frac{3}{1+(3x)^2} = \frac{4(1+9x^2-3(1+4x))}{(1+4x)(1+9x^2)} =$$

$$= \frac{1+36x^2-12x}{(1+4x)(1+9x^2)} = \frac{(6x-1)^2}{(1+4x)(1+9x^2)} > 0,\ \text{då } x > 0.$$

Det ses snabbt att $f(0) = 0$, och eftersom funktion är strängtväxande för $x > 0$ har vi visat olikheten. □

d)

$$\ln(1+x) > x - \frac{1}{2}x^2,\ x > 0 \iff f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2 > 0,\ x > 0.$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1-(1+x)+x(1+x)}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} > 0,\ \text{då } x > 0.$$

Igen kan man enkelt kolla att $f(0) = 0$, vilket visar olikheten. □

e)

$$\ln x \le \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}},\ x \ge 1 \iff f(x) = \ln x - \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \le 0,\ x \ge 1.$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}-x-1}{2x\sqrt{x}} = -\frac{x-2\sqrt{x}+1}{2x\sqrt{x}} =$$

$$= -\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2x\sqrt{x}} \le 0,\ \text{då } x \ge 1.$$

Vidare är $f(1) = 0$. Eftersom funktionen är avtagande då $x \ge 1$ och den börjar icke-positiv har vi visat olikheten. □

10.55

Randpunkter att kontrollera: $z = 1,5$, $z = 3$.

$$F(z) = \frac{(11z+10,5)\tan 37^\circ}{(21z-4,5)\tan 22^\circ} = \left[\frac{\tan 37^\circ}{\tan 22^\circ} = k\right] = k\frac{11z+10,5}{21z-4,5} \implies$$

$$\implies F'(z) = k\frac{11(21z-4,5)-21(11z+10,5)}{(21z-4,5)^2} = k\frac{-270}{(21z-4,5)^2} \ne 0,$$

alltså ges det minsta värdet av en av randpunkterna. Snabb insättning visar att $z = 3$ minimerar F.

10.56

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} = \frac{x(x^2-4)+4x}{x^2-4} = x + \frac{4x}{x^2-4} \implies f'(x) = 1 + \frac{4(x^2-4)-4x2x}{(x^2-4)^2} =$$

$$= 1 - \frac{4x^2+16}{(x^2-4)^2} = \frac{x^4-8x^2+16-4x^2-16}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}.$$

Omskrivningen $f(x) = x + \frac{4x}{x^2-4}$ visar direkt att den sneda asymptoten ges av $y = x$. Stationära punkter:

$$f'(x) = 0 \implies [x \neq \pm 2] \implies \begin{cases} x = 0, \\ x = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}. \end{cases}$$

Funktionen är udda, så det räcker med att undersöka en av de vertikala asymptoterna, säg $x = 2$.

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^3}{x^2-4} = \frac{8}{0^-} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^3}{x^2-4} = \frac{8}{0^+} = \infty,$$

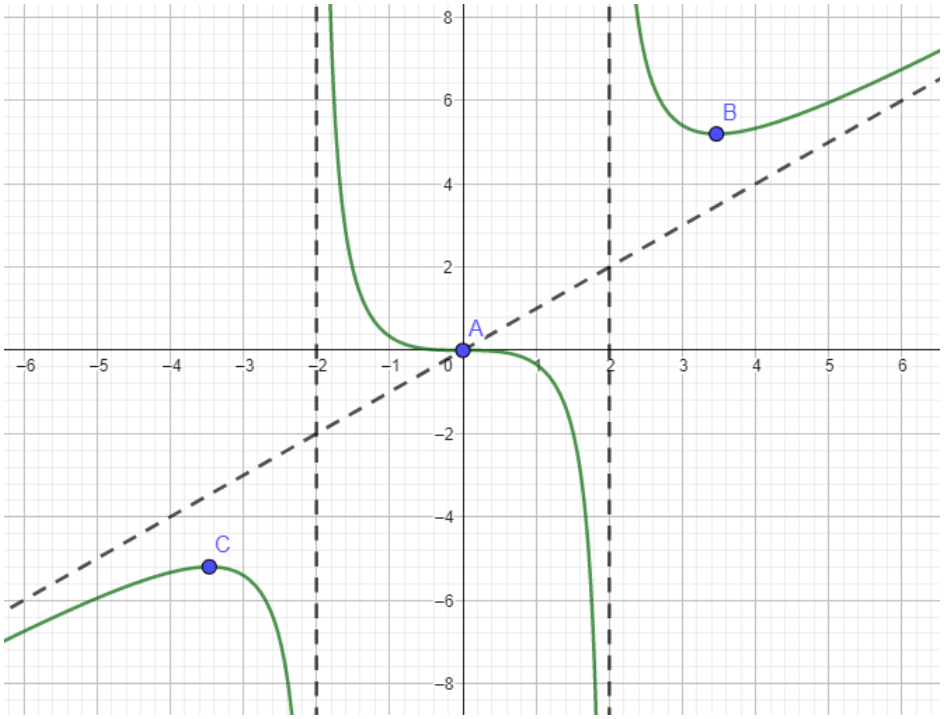
alltså är

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty, \text{ och } \lim_{x\to -2^+} f(x) = \infty.$$

(Notera att $-(2^+) = -2^-$.) Ett teckenschema betraktas nu för att se vilken karaktär de stationära punkterna har.

x		$-2\sqrt{3}$		-2		0		2		$\sqrt{12}$	
$f'(x)$	+	0	-	§	-	0	-	§	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$-3\sqrt{3}$	$\searrow$	§	$\searrow$	0	$\searrow$	§	$\searrow$	$-3\sqrt{3}$	$\nearrow$

Alltså är $C = (-2\sqrt{3}, -3\sqrt{3})$ ett lokalt maximi, $B = (2\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$ ett lokalt minimi, och $A = (0, 0)$ en terrasspunkt.



10.57

$$f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x} \implies f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1/x^2}{1+(1/x)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

Detta betyder att funktionen måste vara en konstant. Eftersom funktionen inte är definierad i $x = 0$, men deriverbar för $x < 0$ och $x > 0$, kan den ha två olika konstanta värden för $x < 0$ och $x > 0$ (eftersom den fortfarande kommer vara kontinuerlig, då funktionen inte är definierad i nollan). Så, för att ta reda på dessa två värden är det lättast att sätta in $x = \pm 1$:

$$f(1) = \arctan 1 + \arctan \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2},$$

$$f(-1) = \arctan(-1) + \arctan(-\frac{1}{1}) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2},$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & x < 0. \end{cases}$$

10.58

a)

$$f(x) = \frac{1}{x} + 2\ln(x+1) \implies f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x+1} = \frac{-x-1+2x^2}{x^2(x+1)}.$$

$1/x \implies x \neq 0$ och $\ln(x+1) \implies x+1>0 \iff x-1$, vilket ger definitionsmängden $x>-1,\ x\neq 0$. För att rita kurvan behöver vi undersöka vad som sker när $x \to -1^+$, när $x \to 0$, när $x \to \infty$, och var derivatan är 0.

$$f'(x)=0 \implies 2x^2-x-1=0 \implies \begin{cases} x=-1/2, \\ x=1 \end{cases}.$$

$$\lim_{x\to -1^+}\left(\frac{1}{x}+2\ln(x+1)\right)=-1+2(-\infty)=-\infty,$$

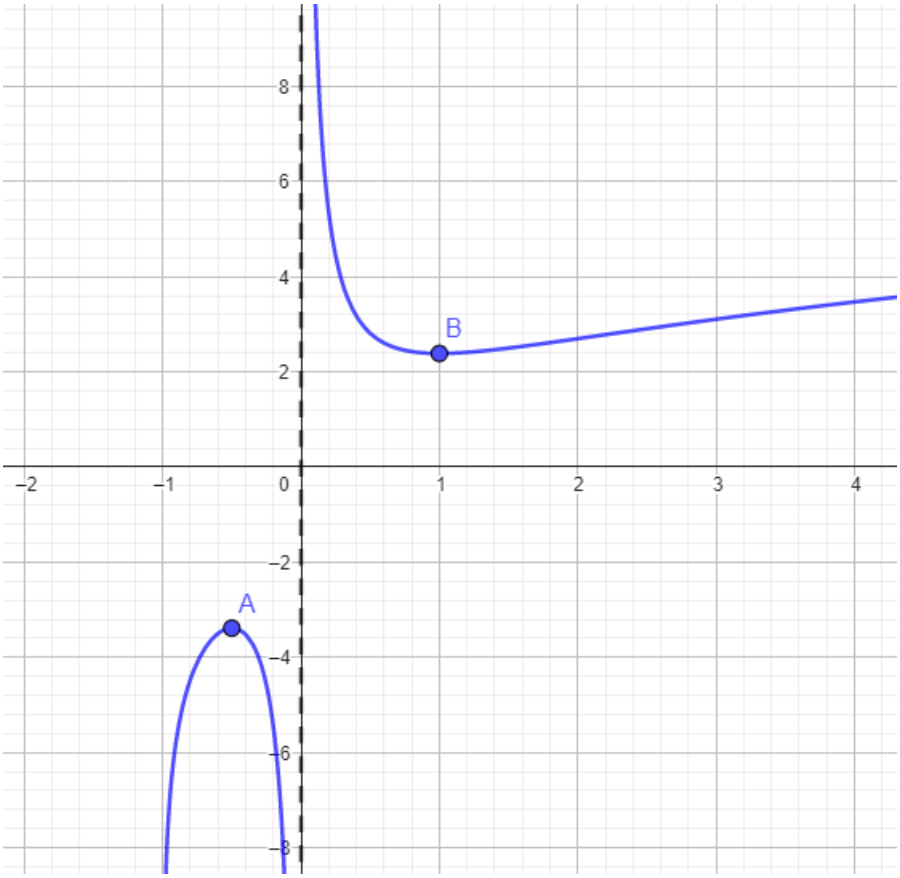
$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}+2\ln(x+1)\right)=\frac{1}{0^+}+0=\infty,$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}+2\ln(x+1)\right)=\frac{1}{0^-}+0=-\infty,$$

$$\lim_{x\to \infty}\left(\frac{1}{x}+2\ln(x+1)\right)=0+2\infty=\infty.$$

x		$\frac{-1}{2}$		0		1	
$f'(x)$	$+$	0	-	§	-	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-2-2\ln 2$	$\searrow$	§	$\searrow$	$1+2\ln 2$	$\nearrow$

Härur ser vi att $A=\left(-\frac{1}{2},-2-2\ln 2\right)$ är ett lokalt maximi, och $B=(1,1+2\ln 2)$ är ett lokalt minimi.



b)

Ur informationen vi samlat i a)-uppgiften kan vi direkt säga att $f(x) = 0$ inte har några lösningar, men att $f(x) = 3$ har två lösningar.

10.59

Vi ritar polynomet och dess extrempunkter, sedan betraktar vi en linje $y = a$ och ser hur många skärningar som förekommer.

$$p(x) = 3x^4 + 16x^3 + 18x^2 \implies p'(x) = 12x^3 + 48x^2 + 36x = 12x(x^2 + 4x + 3) \implies$$

$$\implies p''(x) = 36x^2 + 96x + 36.$$

$$p'(x) = 0 \implies 12x(x^2 + 4x + 3) = 0 \implies \begin{cases} x = -3, \\ x = -1, \\ x = 0, \end{cases}$$

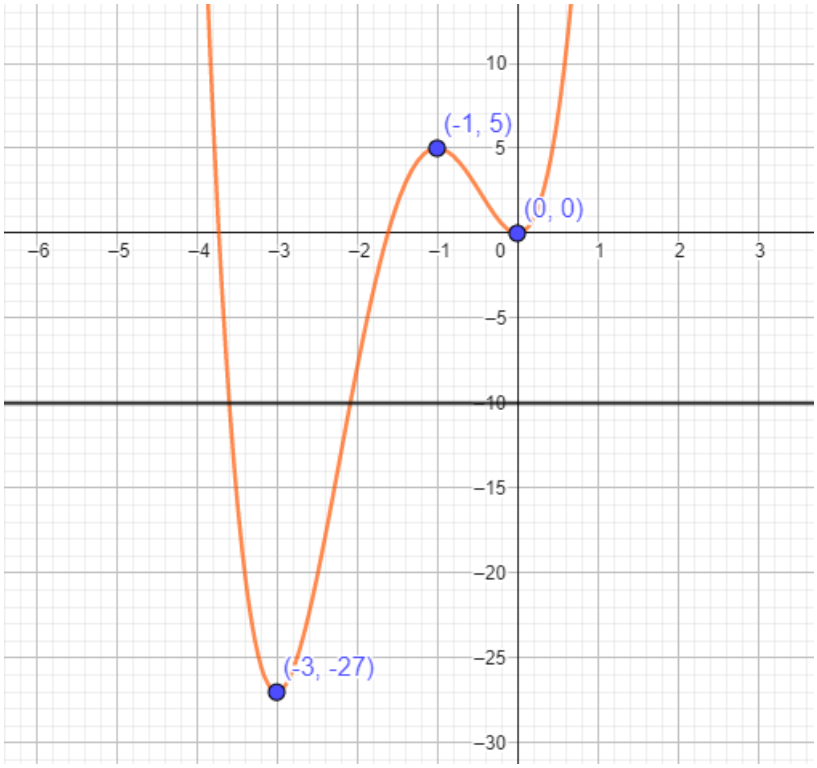
$$\begin{cases} f''(-3) = 72 > 0 \implies \text{ minimi}, \\ f''(-1) = -24 < 0 \implies \text{ maximi}, \\ f''(0) = 36 > 0 \implies \text{ minimi}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(-3) = -27, \\ f(-1) = 5, \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

Slutligen konstaterar vi att

$$\lim_{x \to \pm\infty} = \infty.$$

Detta är nu tillräckligt med information för att rita grafen.



Den svarta linjen illustrera $y = a$, för $a = -10$. Vi ser nu tydligt att

a		-27		0		5	
$N(a)$	0	1	2	3	4	3	2

10.60

Beteckna de två bitarnas längd med x och y, det skall gälla att $x+y = 28 \implies y = 28-x$ och $x, y \geq 4 \implies x, y \leq 24$. Bitarna kommer att bidra till omkretsen. En kvadrat med sidan b har omkretsen $4b = y \implies b = y/4 = (28-x)/4 = 7 - x/4$ och arean blir då $b^2 = (7 - x/4)^2$. En cirkel med radien r har omkretsen $2\pi r = x \implies r = x/(2\pi)$ och arean $\pi r^2 = \pi x^2/(4\pi^2) = x^2/(4\pi)$. Den totala arean kan nu uttryckas som

$$A(x) = \left(7 - \frac{x}{4}\right)^2 + \frac{x^2}{4\pi} \implies A'(x) = -2\frac{1}{4}(7 - \frac{x}{4}) + \frac{x}{2\pi} = x\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2\pi}\right) - \frac{7}{2} \implies$$

$$\implies A''(x) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2\pi} > 0.$$

Detta betyder att derivatans nollställe kommer att ge ett minimi.

$$A'(x) = 0 \implies x\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2\pi}\right) x\frac{\pi+4}{8\pi} = \frac{7}{2} \implies x = \frac{56\pi}{2\pi+8} = \frac{28\pi}{\pi+4}.$$

Tyvärr måste vi sätta in detta i formeln för arean för att kunna jämföra det med randvärdena (vi vet att det är ett minimi, men inte om det är mindre än något av

randvärdena), $x = 4$ och $x = 24$ - tänk på att x betecknar den del av snöret som används till cirkeln.

$$\begin{cases} A(\frac{28\pi}{\pi+4}) = ... = \frac{196}{\pi+4} \approx 27 \text{ cm}^2, \\ A(4) = ... = 36 + \frac{4}{\pi} \approx 37 \text{ cm}^2, \\ A(24) = ... = 1 + \frac{144}{\pi} \approx 47 \text{ cm}^2. \end{cases}$$

a)

Ovan ger att minimal area uppnås då cirkelns omkrets är $x = \frac{28\pi}{\pi+4}$ cm och kvadratens är $y = 28 - x = \frac{28\pi+112}{\pi+4} - \frac{28\pi}{\pi+4} = \frac{112}{\pi+4}$ cm.

b)

Maximal area fås då $x = 24$ cm och $y = 4$ cm.

10.61

$$f(x) = \frac{x}{x-1}e^{1/x} \implies f'(x) = \frac{(e^{1/x} + x(-1/x^2)e^{1/x})(x-1) - xe^{1/x} \cdot 1}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{(1-1/x)(x-1) - x}{(x-1)^2}e^{1/x} = \frac{x-1-1+1/x-x}{(x-1)^2}e^{1/x} = \frac{1-2x}{x(x-1)^2}e^{1/x}.$$

Det är uppenbart att $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$, vilket är en horisontell asymptot. Vidare är $x = 1$ och $x = 0$ otillåtna x-värden.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x-1}e^{1/x} = \begin{bmatrix} t = 1/x \\ t \to \infty \end{bmatrix} = \lim_{t\to\infty} \frac{1/t}{1/t-1}e^t = \lim_{t\to\infty} \frac{e^t}{-t+1} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{x-1}e^{1/x} = \begin{bmatrix} t = 1/x \\ t \to -\infty \end{bmatrix} = \lim_{t\to-\infty} \frac{1/t}{1/t-1}e^t = \lim_{t\to-\infty} \frac{e^t}{-t+1} = \frac{0}{-\infty} = 0,$$

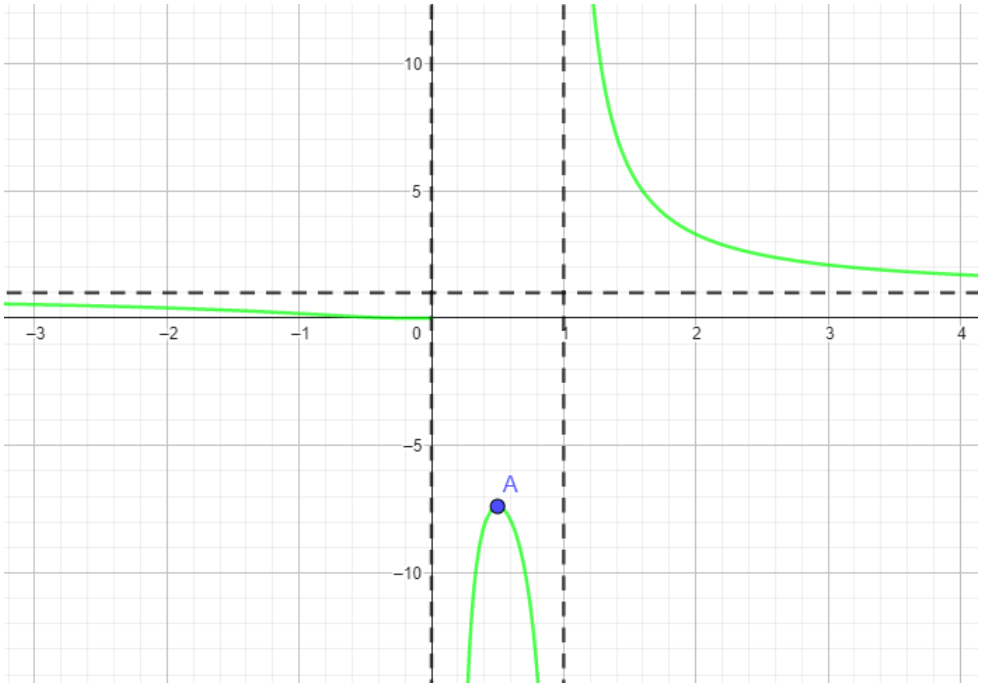
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x-1}e^{1/x} = \frac{e}{0^+} = \infty,$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x-1}e^{1/x} = \frac{e}{0^-} = -\infty.$$

Nu har vi undersökt asymptoter färdigt, och det är dags att beskåda en teckentabell.

x		0		$\frac{1}{2}$		1	
$f'(x)$	-	§	+	0	-	§	-
$f(x)$	$\searrow$	x§	$\nearrow$	e^2	$\searrow$	§	$\searrow$

Detta visar att $A = (\frac{1}{2}, e^2)$ är ett lokalt maximi, och vi kan nu rita grafen.



10.62

De två fallen som dyker upp beror på åt vilket håll man väljer att plåtburkens höjd ska gå. Låt oss säga att fall 1 är när plåtburkens höjd, h, är den, enligt bilden, längre sidan. Det betyder att den horisontella biten av metallplattan ska vara diametern på locket och även omkretsen på cylindern. Fall 2 är när den vertikala biten är omkretsen, och när den horisontella biten är höjden och diametern. Beteckna radien med r. Volymen ges av $V = \pi r^2 h$.

$$\underline{\text{Fall 1:}} \begin{cases} h = 10, \\ 2r + 2\pi r = 10 \implies r = \frac{5}{\pi+1} \end{cases} \implies V = \frac{250}{(\pi+1)^2} \text{ cm}^3 \approx 15 \text{ cm}^3.$$

$$\underline{\text{Fall 2:}} \begin{cases} 2\pi r = 10 \implies r = \frac{5}{\pi}, \\ 2r + h = 10 \implies h = 10 - \frac{10}{\pi} \end{cases} \implies V = \frac{250}{\pi}\left(1 - \frac{1}{\pi}\right) \text{ cm}^3 \approx 54 \text{ cm}^3.$$

Maximal volym ges av $r = 5/\pi$, och $h = 10(1 - 1\pi)$. (Detta kanske bara är randvärdena, och man ska egentligen kolla på ett kontinuerligt spektrum av metallbitar, men det känns uppenbart att man får maximal volym om man utnyttjar så mycket av metallplattan som möjligt.)

10.63

$$V(t) = \pi(r(t))^2 h(t) \implies \frac{d}{dt}(V) = \frac{d}{dt}(\pi r^2 h) \implies V' = \pi(2rr'h + r^2 h') \implies$$

$$\Longrightarrow\ h'(t) = \frac{V'(t)}{\pi(r(t))^2} - \frac{2h(t)r'(t)}{r(t)} \Longrightarrow \begin{bmatrix} V'(t_1) = 7\ \mathrm{m}^3/\mathrm{min} \\ r(t_1) = 100\ \mathrm{m} \\ h(t_1) = 0,005\ \mathrm{m} \\ r'(t_1) = 2\ \mathrm{m/min} \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$h'(t_1) = \frac{7}{10000\pi} - \frac{1}{5000} = \frac{7-2\pi}{10000}\ \mathrm{m/min}\ (\text{ökar}).$$

10.64

Uppgiften innefattar att bestämma största och minsta värde. Eftersom funktionen är kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$ behöver vi bara undersöka stationära punkter.

$$f(x) = \arcsin\frac{x^2-1}{x^2+1} - 2\arctan x = \arcsin\frac{x^2+1-2}{x^2+1} - 2\arctan x =$$

$$= \arcsin\left(1 - \frac{2}{x^2+1}\right) - 2\arctan x \Longrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)^2}}\left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)' - \frac{2}{1+x^2} =$$

$$= \frac{4x}{(1+x^2)^2}\frac{1}{\sqrt{1-\left(1-\frac{4}{1+x^2}+\frac{4}{(1+x^2)^2}\right)}} - \frac{2}{1+x^2} =$$

$$= \frac{4x}{\sqrt{(1+x^2)^4\left(\frac{4}{1+x^2}-\frac{4}{(1+x^2)^2}\right)}} - \frac{2}{1+x^2} = \frac{4x}{\sqrt{4(1+x^2)^3-4(1+x^2)^2}} - \frac{2}{1+x^2} =$$

$$= \frac{4x}{\sqrt{4(1+x^2)^2(1+x^2-1)}} - \frac{2}{1+x^2} = \frac{4x}{2(1+x^2)\sqrt{x^2}} - \frac{2}{1+x^2} =$$

$$= \frac{2}{1+x^2}\left(\frac{x}{|x|}-1\right) = \begin{cases} 0,\ x>0, \\ -\frac{4}{1+x^2} \neq 0,\ x<0. \end{cases}$$

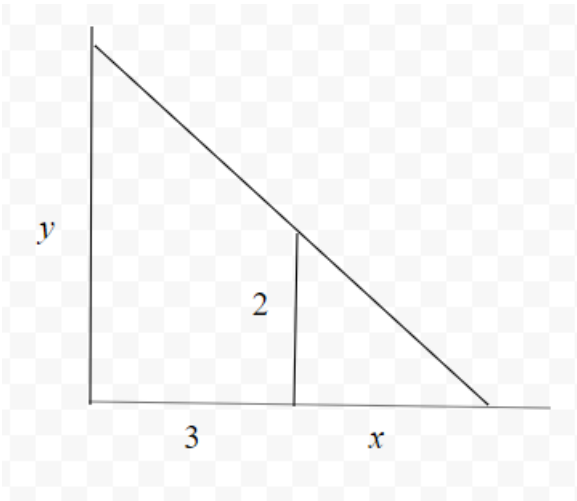
Funktionen är alltså strängt avtagande för $x < 0$, och konstant för $x > 0$. För att hitta största och minsta värde betraktas nu vad som händer när $x \to -\infty$ och ett funktionsvärde för $x > 0$.

$$f(1) = \arcsin 0 - 2\arctan 1 = -\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\arcsin\frac{x^2-1}{x^2+1} - 2\arctan x\right) = \arcsin 1 - 2\arctan(-\infty) = \frac{\pi}{2} + 2\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2},$$

vilket visar att funktionen inte antar något största värde, men har det minsta värdet $-\pi/2$. Kontinuiteten ger att alla värden mellan dessa antas, vilket ger värdemängden $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.

10.65



Likformighet ger att

$$\frac{y}{2} = \frac{x+3}{x} \implies y^2 = \frac{4(x+3)^2}{x^2},$$

och längden på stegen i kvadrat ges, enligt Pythagoras sats, av

$$L(x) = (l(x))^2 = y^2 + (x+3)^2 = (x+3)^2\left(1 + \frac{4}{x^2}\right).$$

Vi vill nu minimera L.

$$L'(x) = 2(x+3)\left(1 + \frac{4}{x^2}\right) + (x+3)^2\left(-\frac{8}{x^3}\right) = 2(x+3)\left(1 + \frac{4}{x^2} - (x+3)\frac{4}{x^3}\right) =$$

$$= 2(x+3)\left(1 - \frac{12}{x^3}\right) = 0 \implies \begin{cases} x = -3 \text{ (negativ längd)}, \\ x = \sqrt[3]{12}. \end{cases}$$

Eftersom längden går mot oändligheten när x går mot 0 och när x går mot oändligheten vet vi att $x = \sqrt[3]{12}$ är ett minimum.

$$l(\sqrt[3]{12}) = (\sqrt[3]{12} + 3)\sqrt{1 + \frac{4}{12^{2/3}}} \text{ m}.$$

10.66

$$f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}} \implies f'(x) = \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}2x - \ln(x^2+1)\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{2x - x\ln(x^2+1)}{(x^2+1)^{3/2}},$$

största/minsta värde kan fås av att

$$f'(x) = 0 \implies [x^2+1 \neq 0] \implies x(2 - \ln(x^2+1)) = 0 \implies$$

$$\implies \begin{cases} x = 0, \\ x^2 + 1 = e^2 \implies x = \pm\sqrt{e^2-1}, \end{cases} \implies \begin{cases} f(0) = 0 \text{ (minsta värde)}, \\ f(\pm\sqrt{e^2-1}) = \frac{2}{e} \text{ (största värde)}. \end{cases}$$

10.67

För $y = h(x) = x^2/2$ ges tangenten i punkten $x = a$ av

$$y_t = h'(a)(x-a) + h(a) = a(x-a) + \frac{a^2}{2} = ax - \frac{a^2}{2},$$

och för $y = g(x) = \ln x$ ges tangenten i punkten $x = b$ av

$$y_t = f'(b)(x-b) + f(b) = \frac{1}{b}(x-b) + \ln b = \frac{x}{b} - 1 + \ln b.$$

För att tangenten ska kunna tangera båda kurvorna måste den, i tangeringspunkten på vardera kurva, ha samma lutning som kurvan, vilket ger kravet $a = \frac{1}{b}$. Sedan måste konstanterna vara lika eftersom annars är det inte samma räta linje.

$$-\frac{a^2}{2} = -1 + \ln b = -1 + \ln\frac{1}{a} = -1 - \ln a \implies a^2 - 2 - 2\ln a = 0,$$

antalet lösningar till denna ekvation besvarar frågan. Bilda därför $f(x) = x^2 - 2 - 2\ln x$, $x > 0$. Vi vill nu undersöka denna funktions utseende. Vi kan direkt säga att $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, och att $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$.

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = 0 \implies x^2 = 1 \implies x = {}_{(-)}^{+}1,$$

där den negativa roten utesluts eftersom $x > 0$. $f(1) = 1 - 2 - 2\ln 1 = -1 < 0$. Eftersom funktionen är kontinuerlig på intervallet $(0, \infty)$ måste den passera 0 någonstans på intervallet $(0, 1)$ och någonstans på intervallet $(1, \infty)$. Funktionen passerar också 0 precis en gång på varje intervall, eftersom det bara finns ett giltigt nollställe till derivatan. Alltså har ekvationen två lösningar för positiva x och därmed finns det två sådana linjer.

10.68

Att x_0 är en stationär punkt definieras av att $f'(x_0) = 0$, därmed råder det en ekvivalens mellan A och D. Ett lokalt extremvärde behöver inte nödvändigtvis vara ett minimum, så vi har att B implicerar C. Slutligen, eftersom f är deriverbar i x_0 vet vi att derivatan måste vara 0 i x_0 för att B och C skall gälla. Alltså $B \implies C \implies D \iff A$.

10.69

Vi behöver bara välja konstanterna så att $f(x)$ blir både kontinuerlig och deriverbar i $x = 1$ (kontinuitet nödvändigt villkor för deriverbarhet). Alltså behöver vi titta på vänster- och högergränsvärdet, samt vänster- och högerderivatan.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & x \le 1, \\ x + 2, & x > 1 \end{cases} \implies f'(x) = \begin{cases} 2x + a, & x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Detta ger följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} f(1^-) = f(1^+), \\ f'(1^-) = f'(1^+) \end{cases} \implies \begin{cases} 1 + a + b = 1 + 2, \\ 2 + a = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -1, \\ b = 2 - a = 3. \end{cases}$$

10.70

Normalens ekvation, punkten $x = h$, ges av $y_n = \frac{-1}{f'(h)}(x-h) + f(h)$. Med

$$f(x) = e^{2x} - 2x \implies f'(x) = 2e^{2x} - 2 \implies$$

$$y_n = -\frac{1}{2(e^{2h}-1)}(x-h) + e^{2h} - 2h,$$

skärning med y-axeln ges av att $x = 0$, vilket ger att

$$y_n = -\frac{1}{2(e^{2h}-1)}(0-h) + e^{2h} - 2h \implies \lim_{h\to 0}\left(e^{2h} - 2h + \frac{1}{2}\frac{h}{e^{2h}-1}\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(e^{2h} - 2h + \frac{1}{4}\frac{2h}{e^{2h}-1}\right) = e^0 - 0 + \frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{5}{4}.$$

Gränspunkten är alltså $(0, \frac{5}{4})$.

10.71

$$g(x) = \ln\left(\frac{\sin x}{x^2}\right) = \ln(\sin x) - 2\ln x \implies g'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{2}{x} = \cot x - \frac{2}{x}.$$

10.72

$$f(x) = \arctan(e^x) + \arctan(e^{-x}) \implies f'(x) = \frac{e^x}{1+(e^x)^2} + \frac{-e^{-x}}{1+(e^{-x})^2} =$$

$$= \frac{e^x}{1+e^{2x}} - \frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}} = \frac{e^x}{e^x}\frac{1}{e^{-x}+e^x} - \frac{e^{-x}}{e^{-x}}\frac{1}{e^x+e^{-x}} = \frac{1}{e^x+e^{-x}} - \frac{1}{e^x+e^{-x}} = 0.$$

10.73

a)

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)' = \left(\frac{x+1-1}{x+1}\right)' = \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)' = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

b)

$$\left(e^{x^2/(1+x)}\right)' = e^{x^2/(1+x)}\left(\frac{x^2}{1+x}\right)' = e^{x^2/(1+x)}\frac{2x(1+x) - x^2\cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{x^2-2x}{(1+x)^2}e^{x^2/(1+x)}.$$

c)

$$\left(\frac{2x+3}{\sqrt{4x^2+12x+10}}\right)' = \left(\frac{2x+3}{\sqrt{(2x+3)^2+1}}\right)' =$$

$$= \frac{2\sqrt{(2x+3)^2+1} - (2x+3)\frac{2(2x+3)\cdot 2}{2\sqrt{(2x+3)^2+1}}}{\left(\sqrt{(2x+3)^2+1}\right)^2} = \frac{\frac{2((2x+3)^2+1)}{\sqrt{(2x+3)^2+1}} - \frac{2(2x+3)^2}{\sqrt{(2x+3)^2+1}}}{(2x+3)^2+1} =$$

$$= \frac{2}{((2x+3)^2+1)^{3/2}} = \frac{2}{(4x^2+12x+10)^{3/2}}.$$

d)

$$\left((x^2+1)\sqrt{x^2+1}\right)' = \left((x^2+1)^{3/2}\right)' = \frac{3}{2}(x^2+1)^{1/2}2x = 3x\sqrt{x^2+1}.$$

10.74

a)

$$(A\cos(\omega x+\delta))' = -A\sin(\omega x+\delta)(\omega x+\delta)' = -\omega A\sin(\omega x+\delta).$$

b)

$$\left(e^{-x}\sin x\right)' = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x = (\cos x - \sin x)e^{-x}.$$

c)

$$\left(e^{\sin x}\right)' = \cos(x)e^{\sin x}.$$

d)

$$(-x+\tan x)' = -1+1+\tan^2 x = \tan^2 x.$$

e)

$$(\cot t)' = \left(\frac{\cos t}{\sin t}\right)' = \frac{-\sin t\sin t - \cos t\cos t}{\sin^2 t} = -\frac{1}{\sin^2 t} \implies$$

$$\left(\cot\sqrt{x}\right)' = -\frac{(\sqrt{x})'}{\sin^2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2x\sin^2\sqrt{x}}.$$

f)

$$\left(\sin^5(3x)\right)' = 5\sin^4(3x)(\sin(3x))' = 15\sin^4(3x)\cos(3x).$$

g)

$$\left(\tan^3 x\right)' = 3\tan^2 x(1+\tan^2 x) = 3(\tan^2 x + \tan^4 x).$$

h)

$$(\sin(\cos 2x))' = \cos(\cos 2x)(\cos 2x)' = -2\sin(2x)\cos(\cos 2x).$$

10.75

Låt längden av linan som hänger vertikalt ner till M betecknas med y. Eftersom linans längd av rimliga skäl måste vara konstant, får man, med hjälp av Pythagoras sats, att

$$y + \sqrt{h^2 + x^2} = \text{ konstant},$$

där $x = x(t) = v_0 t \implies x' = v_0$. Om vi deriverar detta samband, med avseende på tiden ($y = y(t)$), får vi

$$\frac{d}{dt}(y + \sqrt{h^2 + x^2}) = \frac{d}{dt}(\text{konstant}) \implies$$

$$\implies y' + \frac{\left(h^2 + x^2\right)'}{2\sqrt{h^2 + x^2}} = 0 \implies y' = -\frac{2xx'}{2\sqrt{h^2 + x^2}} = -\frac{2v_0 x}{2\sqrt{h^2 + x^2}}.$$

Minustecknet betyder bara att längden på den vertikala biten minskar, vilket är rimligt.

10.76

$$f(x) = x \arctan x - \ln \sqrt{1 + x^2} = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln (1 + x^2) \implies$$

$$\implies f'(x) = \arctan x + \frac{x}{1 + x^2} - \frac{1}{2}\frac{2x}{1 + x^2} = \arctan x,$$

$$g(x) = \arcsin \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \arcsin \left(\frac{e^{2x} + 1 - 2}{e^{2x} + 1} \right) = \arcsin \left(1 - \frac{2}{e^{2x} + 1} \right) \implies$$

$$\implies g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{2}{e^{2x}+1}\right)^2}} \left(1 - \frac{2}{e^{2x} + 1} \right)' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{4}{e^{2x}+1} + \frac{4}{(e^{2x}+1)^2}\right)}} \left(0 + \frac{2e^{2x} \cdot 2}{(e^{2x} + 1)^2} \right) =$$

$$= \frac{4e^{2x}}{\sqrt{(e^{2x} + 1)^4 \left(\frac{4}{e^{2x}+1} - \frac{4}{(e^{2x}+1)^2}\right)}} = \frac{4e^{2x}}{\sqrt{(e^{2x} + 1)^2 \left(4(e^{2x} + 1) - 4\right)}} =$$

$$= \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)2e^x} = \frac{2e^x}{e^{2x} + 1}.$$

10.77

$$y(x) = x^2 \implies y'(x) = 2x \implies y_n = \frac{-}{y'(a)}(x - a) + y(a) = -\frac{1}{2a}(x - a) + a^2,$$

och vi vill att denna normal ska skära $y = x^2$, det vill säga

$$y = y_n \implies -\frac{1}{2a}(x - a) + a^2 = x^2 \implies x^2 - a^2 + \frac{1}{2a}(x - a) = 0 \implies$$

$$\implies (x - a)(x + a + \frac{1}{2a}) = 0 \implies \begin{cases} x = a, \\ x = -a - \frac{1}{2a}, \end{cases}$$

vilket ger skärningspunkterna

$$(a, a^2) \text{ och } \left(-(a+\frac{1}{2a}), (a+\frac{1}{2a})^2\right), \ (a \neq 0).$$

10.78

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2(60-h) \implies \frac{d}{dt}(V) = \frac{d}{dt}(\frac{1}{3}\pi h^2(60-h)) \implies$$
$$\implies V' = \frac{2}{3}\pi hh'(60-h) - \frac{1}{3}\pi h^2 h' = \frac{\pi}{3}(2h(60-h)-h^2)h' = \frac{\pi}{3}(120-3h)hh' =$$
$$= \pi(40-h)hh' \implies V'(t) = \pi(40-h(t))h(t)h'(t) \implies$$
$$\implies [h(t_1) = 10 \text{ cm}, h'(t_1) = 0,03 \text{ cm/s}] = \pi(40-10)\cdot 10 \cdot 0,03 = 9\pi \text{ cm}^3/\text{s}.$$

10.79

Tangentens ekvation: $y_t = f'(a)(x-a) + f(a)$.

a)

$$f(x) = \ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln x \implies f'(x) = \frac{1}{2x}, \ a = 1 \implies$$
$$y_t = \frac{1}{2\cdot 1}(x-1) + \ln\sqrt{1} = \frac{1}{2}(x-1).$$

b)

$$f(x) = 2^{-x} = e^{-x\ln 2} \implies f'(x) = -(\ln 2)e^{-x\ln 2}, \ a = 0 \implies$$
$$y_t = -(\ln 2)e^0(x-0) + 2^{-0} = -(\ln 2)x + 1.$$

10.80

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \implies [10.12 \text{ a)}] \implies f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Normalens ekvation i punkten $x = a$:

$$y_n = \frac{-1}{f'(a)}(x-a) + f(a) \implies [a = 0] \implies$$
$$\implies y_n = \frac{-1}{f'(0)}(x-0) + f(0) = -\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1+0^2}}}x + \ln(0 + \sqrt{1+0^2}) = -x,$$

och tangentens ekvation i $x = 0$:

$$y_t = f'(0)(x-0) + f(0) = \frac{1}{\sqrt{1+0^2}}x + \ln(0+\sqrt{1+0^2}) = x.$$

10.81

a)

Eftersom funktionerna $1/x$ och $\cos x$ är injektiva (och kontinuerliga) på det angivna intervallet kommer även deras sammansättning vara injektiv (och kontinuerlig), vilket betyder att det existerar en invers. Vidare är $(\sec x)' = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = 0$, då $x = 0$. $\sec 0 = 1$, och $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \sec x = 1/0^+ = \infty$. Denna information är tillräcklig för att rita funktionen på intervallet. (Se facit för bild.)

Funktionen har värdemängden $(1, \infty)$ på det angivna intervallet, som är definitionsmängden $(0, \frac{\pi}{2})$. Eftersom definitionsmängd och värdemängd byter plats när man betraktar inversen kommer inversen att ha definitionsmängd $(1, \infty)$, och värdemängd $(0, \frac{\pi}{2})$. Nu skall vi också bestämma inversen:

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x} \implies \cos x = \frac{1}{y} \implies x = \arccos \frac{1}{y} = \text{ invers.}$$

b)

Antingen kan man bara derivera inversen, eller så kan man använda en sats som säger att, om nödvändiga villkor är uppfyllda, att

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)}.$$

Med $y = f(x) = \sec x \implies f^{-1}(y) = \operatorname{arcsec} y$, och att $1 + \tan^2 x = \sec^2 x \implies \tan x = {}_{(-)}^{+}\sqrt{\sec^2 x - 1} = \sqrt{y^2 - 1}$ (funktionen (och inversen) är positiv på det intervall vi betraktar, därför väljer vi den positiva roten), får vi

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos^2 x}} = \frac{1}{\sec x \tan x} = \frac{1}{y\sqrt{y^2 - 1}}.$$

Kapitel 11

11.1

a)

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k \implies \int \frac{1}{1+x}dx = \int \sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k dx \implies$$

$$\implies \ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty}\int(-x)^k dx = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}x^{k+1} = \begin{bmatrix} k \to k-1 \\ k:\ 1 \to \infty \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k.$$

Utifrån detta kan vi direkt bestämma det Maclaurinpolynom vi vill ha, det är bara att ta en ändlig delsumma till den ordning av polynom vi söker.

$$p_1(x) = x,$$

$$p_2(x) = x - \frac{x^2}{2},$$

$$p_3(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3},$$

$$p_4(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}.$$

Man kan också beräkna varje derivata för hand och sätta in $x = 0$, om man vill.

b)

Gör själv.

c)

Gör själv.

11.2

Det gäller att

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k,$$

där $f^{(0)}(x) = f(x)$.

a)

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = f'''(x) = e^x \implies f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 1,$$

och

$$p_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

b)

Om man deriverar sinus två gånger får man tillbaka minus sinus, alltså kommer man alltid att få att $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x \implies f^{(2k)}(0) = 0$, på samma sätt får man att $f^{(4k+1)}(x) = \cos x \implies f^{(4k+1)}(0) = 1$ och att $f^{(4k+3)}(x) = -\cos x \implies f^{(4k+3)}(0) = -1$. Alltså blir

$$p_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = x - \frac{x^3}{6}.$$

c)

Enligt resonemanget i b), blir det samma som p_3, eftersom fjärdederivatan är 0 i $x = 0$.

d)

$$f(x) = \sqrt{1+x} \implies f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \implies f''(x) = -\frac{1}{4(1+x)^{3/2})} \implies$$
$$\implies f(0) = 1,\ f'(0) = \frac{1}{2},\ f''(0) = -\frac{1}{4} \implies$$
$$\implies p_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}.$$

11.3

a)

Uppgift 11.2 d) ger att $p_1(x) = 1 + \frac{x}{2}$, vilket är högerledet ovan, alltså har man linjäriserat funktionen.

b)

Se facit.

c)

Enligt sats, eller något, så ges resttermen på Lagrange form av

$$R_2(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}x^2,$$

där ξ ligger mellan 0 och x. Skrivsättet med att ξ ligger mellan 0 och x är ekvivalent med att skriva $\xi = \theta x$, där $0 \le \theta \le 1$. Hursomhelst blir då ($f''(x)$ beräknades i 11.2 d))

$$R_2(x) = -\frac{x^2}{8(1+\xi)^{3/2}}.$$

d)

$$|R_2(x)| = \left| -\frac{x^2}{8(1+\xi)^{3/2}} \right| = \frac{1}{8}\left| \frac{x^2}{(1+\xi)^{3/2}} \right|,$$

om $x \ge 0$ kommer $1 + \xi \ge 1 + 0 = 0 \implies \frac{1}{(1+\xi)^{3/2}} \le \frac{1}{(1+0)^{3/2}} = 1$, alltså är

$$\frac{1}{8}\left| \frac{x^2}{(1+\xi)^{3/2}} \right| \le \frac{1}{8}\left|1 \cdot x^2\right| = [|x^2| = x^2] = \frac{x^2}{8}. \quad \square$$

e)

Enligt d) vet vi att $|R_2(x)| \leq \frac{x^2}{8} \leq [0 \leq x \leq 0,1] \leq 0,1^2/8 = 0,00125 < 0,005 = 5 \cdot 10^{-3}$. $\square$

f)

Vi vill alltså ha ett a, där $0 \leq x \leq a$, sådant att $|R_2(x)| \leq 5 \cdot 10^{-4}$, då $0 \leq x \leq a$. Detta ger att

$$a^2/8 \leq 5 \cdot 10^{-4} \iff a^2 \leq 40 \cdot 10^{-4} \implies a \leq \sqrt{40} \cdot 10^{-2}.$$

g)

Se 11.2 d).

h)

Se facit.

i)

$$f''(x) = -\frac{1}{4(1+x)^{3/2}} \implies f'''(x) = \frac{3}{8(1+x)^{5/2}} \implies$$
$$\implies R_3(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3 = \frac{x^3}{16(1+\xi)^{5/2}},\ 0 \leq \xi \leq x.$$

j)

Igen är $\frac{1}{(1+\xi)^{5/2}} \leq 1$, vilket ger

$$|R_3(x)| = \left|\frac{x^3}{16(1+\xi)^{5/2}}\right| \leq \left|\frac{x^3}{16} \cdot 1\right| = [x \geq 0 \implies |x^3| = x^3] = \frac{x^3}{16}. \quad \square$$

k)

Exakt samma sak som i e) ger att $|R_3(x)| \leq \frac{1}{16} \cdot 10^{-3}$, då $0 \leq x \leq 0,1$.

11.4

a)

Se uppgift 11.2 b). Båda blir x.

b)

$$f(x) = \sin x \implies f''(x) = -\sin x \text{ och } f'''(x) = -\cos x \implies$$
$$R_2(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}x^2 = -\frac{\sin\xi}{2}x^2,$$
$$R_3(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3 = -\frac{\cos\xi}{6}x^3,$$

där $0 \leq \xi \leq x$, och det är olika ξ för de olika resttermerna.

c)

$|\sin\xi| \leq 1$ och $|\cos\xi| \leq 1$. Detta betyder att vi får följande uppskattningar då $|x| \leq 0,1$:

$$|R_2(x)| = \left|-\frac{\sin\xi}{2}x^2\right| \leq \frac{x^2}{2} \leq 0,1^2/2 = 0,005,$$

$$|R_3(x)| = \left|-\frac{\cos\xi}{6}x^3\right| \leq \frac{x^3}{6} \leq 0,1^3/6 \approx 0,0002.$$

Detta visar att restermen med högre ordning är minst, och därför bäst att använda.

11.5

a)

11.2 a) ger att

$$p_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

b)

$$f^{(4)}(x) = e^x \implies R_4(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4 = \frac{e^\xi}{24}x^4.$$

c)

$$|R_4(x)| = \left|\frac{e^\xi}{24}x^4\right| = [e^\xi > 0,\ x^4 \geq 0] = \frac{e^\xi}{24}x^4 \leq [e^\xi < 3] \leq \frac{3}{24}x^4 \leq \frac{1}{8}\cdot 10^{-4}.$$

d)

Ur c) får vi uppskattningen $R_4(x) \leq \frac{x^4}{8}$.

11.6

Lösning finns redan.

11.7

Låt $f(x) = \ln(1+x)$. Om vi tittar på 11.1, ser vi att $p_2(x) = x - \frac{x^2}{2}$ till $\ln(1+x)$. Vidare har vi att

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \implies R_3(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3 = \frac{x^3}{3(1+\xi)^3},$$

där ξ ligger mellan 0 och x. Vi kan nu skriva $f(x) = p_2(x) + R_3(x)$, vilket betyder att

$$\left|f(x) - x + \frac{x^2}{2}\right| = \left|p_2(x) + R_3(x) - x + \frac{x^2}{2}\right| =$$

$$= \left|x - \frac{x^2}{2} + R_3(x) - x + \frac{x^2}{2}\right| = |R_3(x)| = \left|\frac{x^3}{3(1+\xi)^3}\right|,$$

och om $|x| \leq 1/2$, så kommer $1+\xi \geq 1-1/2 = 1/2 \implies 1/(1+\xi)^3 \leq 1/(1/2)^3 = 8$.

$$\left|\frac{x^3}{3(1+\xi)^3}\right| \leq \frac{8|x|^3}{3}. \quad \square$$

11.8

$$f(x) = \arctan x \implies f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \implies f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2},$$
$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,$$

alltså är Maclaurinpolynomet av ordning 1 till arctan, $p_1(x) = x$. Vi kan nu skriva $f(x) = p_1(x) + R_2(x)$, där $R_2(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}x^2 = -\frac{\xi}{(1+\xi^2)}x^2$, där ξ ligger mellan 0 och x. Då $|x| \leq 0,1$ gäller det att

$$\left|-\frac{\xi}{(1+\xi^2)}x^2\right| < \left|\frac{0,1}{(1+0)}x^2\right| = \frac{x^2}{10}.$$

Uppskattnings absoluta fel är därför

$$|\arctan x - x| = |f(x) - x| = |p_1(x) + R_2(x) - x| = |R_2(x)| < \frac{x^2}{10} \leq 10^{-3} = 0,001. \quad \square$$

11.9

$$f(x) = \tan x \implies f'(x) = 1 + \tan^2 x \implies f''(x) = 2\tan x + 2\tan^3 x \implies$$
$$\implies f'''(x) = 2 + 2\tan^2 x + 6\tan^2 x(1+\tan^2 x) = 2 + 8\tan^2 x + 6\tan^4 x,$$
$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,$$

alltså är

$$\tan x = f(x) = p_2(x) + R_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3 =$$
$$= x + \frac{1 + 4\tan^2\xi + 3\tan^4\xi}{3}x^3,$$
$$|R_3(x)| = \left|\frac{1 + 4\tan^2\xi + 3\tan^4\xi}{3}x^3\right| \leq [\tan\xi \leq \tan\frac{\pi}{4} = 1,\ \text{om } |x| \leq \frac{\pi}{4}] \leq$$
$$\leq \frac{1+4+3}{3} = \frac{8}{3},$$

vilket betyder att

$$|\tan x - x| = |R_3(x)| \leq \frac{8}{3}|x|^3 \leq \frac{9}{3}|x|^3 = 3|x|^3. \quad \square$$

11.10

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{e^{\theta t}}{4!}t^4,\ 0 \le \theta \le 1 \implies$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{e^{\theta x}}{24}x^4,$$

$$e^{-x} = 1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{6} + \frac{e^{\theta(-x)}}{24}(-x)^4 = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{e^{-\theta x}}{24}x^4,$$

$$e^x + e^{-x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{e^{\theta x}}{24}x^4 + 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{e^{-\theta x}}{24}x^4 =$$

$$= 2 + x^2 + \left(e^{\theta x} + e^{-\theta x}\right)\frac{x^4}{24},$$

$e^x + e^{-x}$ är jämn och antar sitt minimum i $x = 0$, sedan växer den strängt bort från 0, vilket betyder att då $|x| \le 1$ kommer $e^x + e^{-x} \le e^1 + e^{-1} \le 3 + 1 = 4$. Alltså blir

$$\left|e^x + e^{-x} - 2 - x^2\right| = \left|\left(e^{\theta x} + e^{-\theta x}\right)\frac{x^4}{24}\right| \le 4\frac{x^4}{24} = \frac{x^4}{6}. \quad \square$$

11.11

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\cos\xi}{5!}x^5 \implies \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{\cos\xi}{120}x^4.$$

Alltså får vi att

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1 + \frac{x^2}{6}\right| = \left|1 - \frac{x^2}{6} + \frac{\cos\xi}{120}x^4 - 1 + \frac{x^2}{6}\right| = \left|\frac{\cos\xi}{120}x^4\right| \le [|\cos\xi| \le 1] \le \frac{x^4}{120}. \quad \square$$

(ξ ligger mellan 0 och x.)

11.12

Lösning finns redan.

11.13

a)

Utveckla $\ln(1+t)$ till ordning 2 och ersätt sedan t med $-x^2$, precis som i 11.12. (Restermen har beräknats i uppgift 11.7.)

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3(1+\theta t)^3} \implies$$

$$\implies \ln(1-x^2) = -x^2 - \frac{(-x^2)^2}{2} + \frac{(-x^2)^3}{3(1+\theta(-x^2))^3} = -x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3(1-\theta x^2)^3},$$

där $0 \le \theta \le 1$. Polynomet får vi genom att titta på det som inte är resttermen, alltså

$$p_4(x) = -x^2 - \frac{x^4}{2}$$

b)

Som vi har sett många gånger ges felet av

$$|f(x) - p_4(x)| = \left| -\frac{x^6}{3(1-\theta x^2)^3} \right|,$$

och när $|x| \geq 1/4$ är $1 - \theta x^2 \geq 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16} \implies 1/(1-\theta x^2)^3 \leq \frac{16^3}{15^3}$.

$$\left| \frac{1}{(1-\theta x^2)^3} \right| \frac{x^6}{3} \leq \frac{16^3}{15^3} \frac{x^6}{3} \leq \frac{16^3}{15^3} \frac{(1/4)^6}{3} = \frac{1}{3 \cdot 15^3}.$$

11.14

Jag kommer att använda mig av standardutvecklingar flitigt, samt att Maclaurinutvecklingar är entydiga, vilket betyder att jag kan utveckla $f(t)$ och sedan ersätta t med en annan funktion för att underlätta mitt arbete.

a)

Lösning finns redan.

b)

Se a), men med $t = -x$, vilket ger

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + x^4 B(x).$$

c)

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + t^4 B_1(t) \implies [t = x/2] \implies$$

$$\implies \cos\frac{x}{2} = 1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^4 B_1(\frac{x}{2}) = 1 - \frac{x^2}{8} + x^4 B(x),$$

$$B(x) = \frac{1}{16} B_1(x/2).$$

d)

$$\ln(1+t) = t - t^2 B_1(t) \implies [t = x^2] \implies$$

$$\ln(1+x^2) = x^2 + (x^2)^2 B_1(x^2) = [B(x) = B_1(x^2)] = x^2 + x^4 B(x).$$

e)

$$\ln(1+t) = t - t^2 B_1(t) \implies [t = -x^2] \implies$$

$$\ln(1+x^2) = -x^2 + (-x^2)^2 B_1(-x^2) = [B(x) = B_1(-x^2)] = -x^2 + x^4 B(x).$$

I fortsättningen kommer jag inte explicit att skriva ut hur jag ersätter B_1, B_2 och så vidare. Utan jag kommer bara att bunta ihop alla begränsade funktioner till en med den

lägst förekommande ordningen. Alltså, om det till exempel står $2x^2B_1(2x) - x^3B_2(x)$ kommer jag direkt att skriva att det är lika med $x^2B(x)$. Möjligen kommer jag att faktorisera ut den lägsta ordningen, och sedan ersätta den andra faktorn med en ny begränsad funktion, alltså $2x^2B_1(2x) - x^3B_2(x) = x^2(2B_1(2x) - xB_2(x)) = x^2B(x)$. Men det beror på om jag orkar eller inte.

11.15

$$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}t^3 + ...$$

a)

$\alpha = 1/2$ och $t = x$.

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2 + x^3B(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^3B(x).$$

b)

$\alpha = -1$ och $t = x$.

$$\frac{1}{1+x} = 1 + (-1)x + \frac{-1(-1-1)}{2!}x^2 + x^3B(x) = 1 - x + x^2 + x^3B(x).$$

Notera att detta är en geometrisk serie med kvoten $-x$.

c)

$\alpha = 1/3$ och $t = x$.

$$(1+x)^3 = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2!}x^2 + x^3B(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + x^3B(x).$$

d)

$\alpha = 1/2$ och $t = -x/2$.

$$\sqrt{1-\frac{x}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}\right) + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}\left(-\frac{x}{2}\right) + \left(-\frac{x}{2}\right)^3 B_1(-\frac{x}{2}) = 1 - \frac{x}{4} - \frac{x^2}{32} + x^3B(x).$$

e)

$\alpha = 1/3$ och $t = x^2$. Här behövs bara t-utvecklingen till första ordningen, eftersom t i sig har grad 2.

$$(1+x^2)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x^2 + (x^2)^2B_1(x^2) = 1 + \frac{x^2}{3} + x^4B(x)$$

11.16

a)

Lösning finns redan.

b)

$$x\sin x = x(x - \frac{x^3}{6} + x^5)B(x) = x^2 - \frac{x^4}{6} + x^6 B(x).$$

c)

$$x(\cos x - 1) = x(1 - \frac{x^2}{2} + x^4 B(x) - 1) = -\frac{x^3}{2} + x^5 B(x).$$

11.17

a)

Med $t = x^2$ utvecklar vi e^t till andra ordningen, och $\cos x$ till fjärde.

$$e^t \cos x = (1 + t + \frac{t^2}{2} + t^3 B_1(t))(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^6 B_2(x)) =$$

$$= 1 \cdot 1 - 1 \cdot \frac{x^2}{2} + 1 \cdot \frac{x^4}{24} + t \cdot 1 - t\frac{x^2}{2} + \frac{t^2}{2} \cdot 1 + x^6 B(x) =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^4}{2} + x^6 B(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^6 B(x).$$

b)

Eftersom

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k \implies \arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}.$$

Detta ger att

$$\sin x \arctan x = (x - \frac{x^3}{6} + x^5 B_1(x))(x - \frac{x^3}{3} + x^5 B_2(x)) =$$

$$= x^2 - x\frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{6}x + x^6 B(x) = x^2 - \frac{x^4}{2} + x^6 B(x).$$

c)

Lösning finns redan.

11.18

a)

$$e^{\sin x} = e^{x - \frac{x^3}{6} + x^5 B_1(x)} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + x^5 B_1(x)\right) + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + x^5 B_1(x)\right)^2}{2} +$$

$$+ \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + x^5 B_1(x)\right)^3}{3!} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + x^5 B_1(x)\right)^4}{4!} +$$

$$+\left(x-\frac{x^3}{6}+x^5B_1(x)\right)^5 B_2\left(x-\frac{x^3}{6}+x^5B_1(x)\right)=$$

$$=1+x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^2-2x\frac{x^3}{6}}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+x^5B(x)=1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+x^5B(x).$$

b)

$$e^{\cos x}=e^{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+x^6B_1(x)}=ee^{-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+x^6B_1(x)}=$$

$$=e\left(1+\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+x^6B_1(x)\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+x^6B_1(x)\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+x^6B_1(x)\right)^3 B_2\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+x^6B_1(x)\right)\right)=$$

$$=e\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2\right)+x^6B(x)=e-\frac{e}{2}x^2+\frac{e}{6}x^4+x^6B(x).$$

11.19

Funktionen är redan ett Maclaurinpolynom (alla x står för sig själva, det är inte $(x-a)$ någonstans).

11.20

Lösning finns redan.

11.21

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{x^2}{2}+x^3B(x)-1-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x^3B(x)}{2x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+2xB(x)}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2},$$

eftersom $B(x)$ är begränsad nära $x=0$ kommer $x^nB(x)\to 0$, då $x\to 0$, för $n>0$ - alltid.

b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sin 2x-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{(2x)-\frac{(2x)^3}{6}+(2x)^5B_1(2x)-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{-\frac{8x^3}{6}+x^5B(x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{-\frac{4}{3}+x^2B(x)}=\frac{1}{-\frac{4}{3}+0}=-\frac{3}{4}.$$

11.22

Om man är förvirrad över det första steget i varje deluppgift, så är det bara att jag utvecklar funktionen kring $x=0$ till tillräckligt hög ordning. Jag förutsätter också att man kan standardutvecklingarna.

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{x^2}}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+x^4B_1(x)-\left(1+(x^2)+(x^2)^2B_2(x^2)\right)}{x(x+x^3B_3(x))} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}-1-x^2+x^4B_4(x)}{x^2(1+x^2B_3(x))} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{3x^2}{2}+x^4B_4(x)}{x^2(1+x^2B_3(x))} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{3}{2}+x^2B_4(x)}{1+x^2B_3(x)} = \frac{-3/2+0}{1+0} = -\frac{3}{2}.$$

b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\ln(1-x)}{1-\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{x+(-x)-\frac{(-x)^2}{2}+(-x)^3B_1(-x)}{1-\left(1+\frac{1}{2}(-x^2)+(-x^2)^3B_2(-x^2)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}+x^3B_3(x)}{\frac{x^2}{2}+x^6B_4(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}+xB_3(x)}{\frac{1}{2}+x^4B_4(x)} = \frac{-1/2+0}{1/2+0} = -1.$$

c)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \arctan x}{x(\cos 2x - 1)} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{+}6x^5B_1(x)-\left(x-\frac{x^3}{3}+x^5B_2(x)\right)}{x(1-\frac{(2x)^2}{2}+(2x)^4B_3(2x)-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{6}+x^5B_4(x)}{-2x^3+x^5B_5(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}+x^2B_4(x)}{-2+x^2B_5(x)} = \frac{1/6+0}{-2+0} = -\frac{1}{12}.$$

11.23

a)

$$(1+x)^{1/x} = \left(e^{\ln(1+x)}\right)^{1/x} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^{\frac{x-x^2/2+x^3B_1(x)}{x}} = e^{1-x/2+x^2B_1(x)} =$$

$$= ee^{-x/2+x^2B_1(x)} = e\left(1-\frac{x}{2}+x^2B_1(x)+\left(-\frac{x}{2}+x^2B_1(x)\right)^2B_2\left(-\frac{x}{2}+x^2B_1(x)\right)\right) =$$

$$= e-\frac{e}{2}x+x^2B_3(x) \implies$$

$$\implies \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e-\frac{e}{2}x+x^2B_3(x)-e}{x} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{e}{2}+xB_3(x)\right) = -\frac{e}{2}.$$

b)

$$\ln(1+\sin^2 x) = \ln(1+(x+x^3B_1(x))^2) =$$

$$= (x+x^3B_1(x))^2+\left((x+x^3B_1(x))^2\right)^2B_2\left((x+x^3B_1(x))^2\right) = x^2+x^4B_3(x),$$

och

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin^2 x)^{-2/x^2} = \lim_{x\to 0}e^{-\frac{2}{x^2}\ln(1+\sin^2 x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}e^{-\frac{2}{x^2}(x^2+x^3B_3(x))} = \lim_{x\to 0}e^{-2(1+xB_3(x))} = e^{-2}.$$

11.24

a)

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\begin{bmatrix} t=x-1 \implies x=1+t \\ x\to 1 \implies t\to 0\end{bmatrix}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{1+t}{t}-\frac{1}{\ln(1+t)}\right)=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)\ln(1+t)-t}{t\ln(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)+t\ln(1+t)-t}{t\ln(1+t)}=1+\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)-t}{t\ln(1+t)}=$$

$$=1+\lim_{t\to 0}\frac{t-\frac{t^2}{2}+t^3B_1(t)-t}{t(t+t^2B_2(t))}=1-\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^2}{2}+t^3B_1(t)}{t^2(1+tB_2(t))}=$$

$$=1-\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}+tB_1(t)}{1+tB_2(t)}=1-\frac{1/2+0}{1+0}=\frac{1}{2}.$$

b)

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2\sqrt[3]{1+x^3}-x^3\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x^2\sqrt[3]{x^3}\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}+1}-x^3\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}x^3\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}-1\right)=\begin{bmatrix} t=1/x \\ t\to 0\end{bmatrix}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+t^3}-1}{t^3}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1+\frac{1}{3}t^3+(t^3)^2B(t)-1}{t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{3}t^3+t^6B(t)}{t^3}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{3}+t^3B(t)\right)=\frac{1}{3}.$$

11.25

Lösning finns redan.

11.26

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-\cos x}{x}-a}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x-ax}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{x^2}{2}+x^3B_1(x)-\left(1-\frac{x^2}{2}+x^4B_2(x)\right)-ax}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-a)x+x^2+x^3B_3(x)}{x^2}=[a=1]=\lim_{x\to 0}(1+xB_3(x))=1.$$

a måste vara 1, annars kommer den linjära termen i täljaren inte försvinna, vilket gör så att gränsvärdet inte existerar.

11.27

Lösning finns redan.

11.28

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax-\ln(1+x)}{1-\cos ax}=\lim_{x\to 0}\frac{(ax)-(ax)^3B_1(ax)-\left(x-\frac{x^2}{2}+x^3B_2(x)\right)}{1-\left(1-\frac{(ax)^2}{2}+(ax)^4B_3(ax)\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(a-1)x+\frac{x^2}{2}+x^3B_4(x)}{\frac{a^2x^2}{2}+x^4B_5(x)}=[a=1]=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}+xB_4(x)}{\frac{1}{2}+x^2B_5(x)}=\frac{1/2+0}{1/2+0}=1.$$

Igen måste a vara 1, annars kommer den linjära termen i täljaren inte försvinna, vilket gör så att gränsvärdet inte existerar.

11.29

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+x}=e\implies\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+x}\right)=\ln e=1\implies$$

$$\implies(n+x)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1\implies x_n\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-n\implies$$

$$\implies\lim_{n\to\infty}x_n=\begin{bmatrix}t=1/n\\ t\to 0\end{bmatrix}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+t)}-\frac{1}{t}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{t-\ln(1+t)}{t\ln(1+t)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t-\left(t-\frac{t^2}{2}-t^3B_1(t)\right)}{t\left(t+t^2B_2(t)\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^2}{2}+t^3B_1(t)}{t^2(1+tB_2(t))}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}+tB_1(t)}{1+tB_2(t)}=\frac{1/2+0}{1+0}=\frac{1}{2}.$$

11.30

Lösning finns redan.

11.31

a)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\bigg|_{x=2}=e^x|_{x=2}=e^2.$$

b)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}x^{2k-1}\bigg|_{x=1}=\arctan x|_{x=1}=\frac{\pi}{4}.$$

c)

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\pi^{2k}}{(2k)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}\bigg|_{x=\pi}=\cos x|_{x=\pi}=-1.$$

d)

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\pi^{2k+1}}{6^{2k+1}(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}\bigg|_{x=\pi/6} = \sin x|_{x=\pi/6} = \frac{1}{2}.$$

e)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k\bigg|_{x=1} = \ln(1+x)|_{x=1} = \ln 2.$$

11.32

a)

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k\bigg|_{x=3} = e^x|_{x=3} = e^3.$$

b)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2^k k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k\bigg|_{x=1/2} = \ln(1+x)|_{x=1/2} = \ln\frac{3}{2}.$$

11.33

Taylorpolynomet kring $x = a$ av ordning n ges av

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

med hjälp av denna kunskap är det bara att derivera och sätta in det relevanta värdet på a. Det finns oftast inte (om någonsin) trick för att hitta Taylorpolynom, åtminstone inte som det gör för Maclaurinpolynom. Eftersom denna uppgift bara är numeriskt krävande tänker jag inte skriva upp detaljerade lösningar. Man kan kontrollera att man har deriverat rätt med typ Wolfram Alpha.

a), b), c), d), e)

Inses lätt.

11.34

$$f(x) = \frac{1}{7}(1+\frac{x}{2})^{7/2} \implies f'(x) = \frac{1}{4}(1+\frac{x}{2})^{5/2} \implies f''(x) = \frac{5}{16}(1+\frac{x}{2})^{3/2} \implies$$

$$\implies f'''(x) = \frac{15}{64}(1+\frac{x}{2})^{1/2} \implies f(0) = \frac{1}{7},\ f'(0) = \frac{1}{4},\ f''(0) = \frac{5}{16} \implies$$

$$f(x) = p_2(x) + R_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(\xi)}{6}x^3 =$$

$$= \frac{1}{7} + \frac{x}{4} + \frac{5x^2}{32} + \frac{15}{384}(1+\frac{\xi}{2})^{1/2}x^3,$$

$$|f(x)-p_2(x)| = |R_3(x)| = \left|\frac{15}{384}(1+\frac{\xi}{2})^{1/2}x^3\right| \le \frac{15}{64}(1+\frac{0,1}{2})^{1/2}\cdot 0,1^3 \le 10^{-4},$$

där ξ ligger mellan 0 och x, vilket betyder att polynomet $p_2 = \frac{1}{7}+\frac{x}{4}+\frac{5x^2}{32}$ duger.

11.35

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x - \sin x}{x\left((1+x)^{1/3}-e^{x/3}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3}+x^5B_1(x)-\left(x-\frac{x^3}{6}+x^5B_2(x)\right)}{x\left(1+\frac{1}{3}x+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2}x^2+x^3B_3(x)-\left(1+\frac{x}{3}+\frac{\left(\frac{x}{3}\right)^2}{2}+\left(\frac{x}{3}\right)^3B_4(\frac{x}{3})\right)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{6}+x^5B_5(x)}{x\left(-\frac{x^2}{9}-\frac{x^2}{18}+x^3B_6(x)\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{6}+x^2B_5(x)}{-\frac{1}{6}+xB_6(x)} = \frac{-1/6+0}{-1/6+0} = 1.$$

11.36

$$\ln\left(\frac{1+2x}{(1+x)^2}\right) = \ln(1+2x)-\ln\left((1+x)^2\right) = \ln(1+2x)-2\ln(1+x) =$$

$$= 2x-\frac{(2x)^2}{2}+(2x)^3B_1(2x)-2\left(x-\frac{x^2}{2}+x^3B_2(x)\right) =$$

$$= -2x^2+x^2+x^3B_3(x) = -x^2+x^3B_3(x) \implies$$

$$\implies \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1+2x}{(1+x)^2}\right)}{1-\cos 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^2+x^3B_3(x)}{1-\left(1-\frac{(2x)^2}{2}+(2x)^4B_4(2x)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-x^2+x^3B_3(x)}{2x^2+x^4B_5(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-1+xB_3(x)}{2+x^2B_5(x)} = \frac{-1+0}{2+0} = -\frac{1}{2}.$$

11.37

$$f(x) = (1+2x)^{1/3} \implies f'(x) = \frac{2}{3}(1+2x)^{-2/3} \implies$$

$$\implies f''(x) = -\frac{8}{9}(1+2x)^{-5/3} \implies f'''(x) = \frac{80}{27}(1+2x)^{-8/3} \implies$$

$$\implies f(0)=1,\ f'(0)=\frac{2}{3},\ f''(0)=-\frac{8}{9} \implies$$

$$p_2(x) = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2 = 1+\frac{2}{3}x-\frac{4}{9}x^2,$$

$$f(x) = p_2(x)+R_3(x),$$

där

$$R_3(x) = \frac{f'''(\xi)}{6}x^3 = \frac{40}{81(1+\xi)^{8/3}}x^3,$$

där ξ är ett tal mellan 0 och x. Felet ges av

$$|f(x)-p_2(x)| = |R_3(x)| = \left|\frac{40}{81(1+\xi)^{8/3}}x^3\right|,$$

när $0 \leq x \leq 0,1 \implies 1+\xi \geq 1 \implies \frac{1}{(1+\xi)^{8/3}} \leq 1$, alltså är

$$\left|\frac{40}{81(1+\xi)^{8/3}}x^3\right| \leq \frac{40}{81}|x|^3 \leq \frac{10^{-3}}{2} \leq 10^{-3}. \quad \square$$

11.38

Om $p = \pi + x \implies |\pi - p| = |x| \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-n}$, och

$$p + \sin p = \pi + x + \sin(\pi + x) = \pi + x - \sin x = \pi + x - \left(x + \frac{-\cos\xi}{6}x^3\right) = \pi - \frac{\cos\xi}{6}x^3,$$

där jag har utvecklat $\sin x$ till ordning 1 och skrivit upp resttermen på Lagrange form - ξ är ett tal mellan 0 och x. Felet blir nu

$$|\pi - p - \sin p| = \left|\pi - \left(\pi - \frac{\cos\xi}{6}x^3\right)\right| = \left|\frac{\cos\xi}{6}x^3\right| \leq [|\cos\xi| \leq 1] \leq \frac{|x|^3}{6} \leq$$

$$\leq \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} \cdot 10^{-n}\right)^3 = \frac{1}{48} \cdot 10^{-3n} \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-3n}. \quad \square$$

11.39

$$f(x) = \int_0^x \frac{t}{\cos t}dx \implies [\text{analysens huvudsats}] \implies f'(x) = \frac{x}{\cos x} \implies$$

$$\implies f''(x) = \frac{\cos x + x\sin x}{\cos^2 x} \implies$$

$$\implies f(0) = 0,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = 1 \implies$$

$$\implies p_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = \frac{x^2}{2}.$$

11.40

a)

Första derivatan fås med analysens huvudsats,

$$S(x) = \int_0^x \ln(\cos t)dt \implies S'(t) = \ln(\cos x),$$

sedan är det bara att derivera 4 gånger till, vilket jag inte orkar skriva ner.

b)

$$S(0) = 0,\ S'(0) = 0,\ S''(0) = 0,\ S'''(0) = -1,\ S^{(4)}(0) = 0,$$
$$S^{(5)}(x) = -2(1 + 3\tan^2 x)(1 + \tan^2 x),$$

vilket betyder att

$$S(x) = p_4(x) + R_5(x),$$

där

$$p_4(x) = S(0) + S'(0)x + \frac{S''(0)}{2}x^2 + \frac{S'''(0)}{3!}x^3 + \frac{S^{(4)}(0)}{4!}x^4 = -\frac{x^3}{6},$$

och

$$R_5(x) = \frac{S^{(5)}(\xi)}{5!}x^5 = -\frac{(1+3\tan^2\xi)(1+\tan^2\xi)}{60}x^5.$$

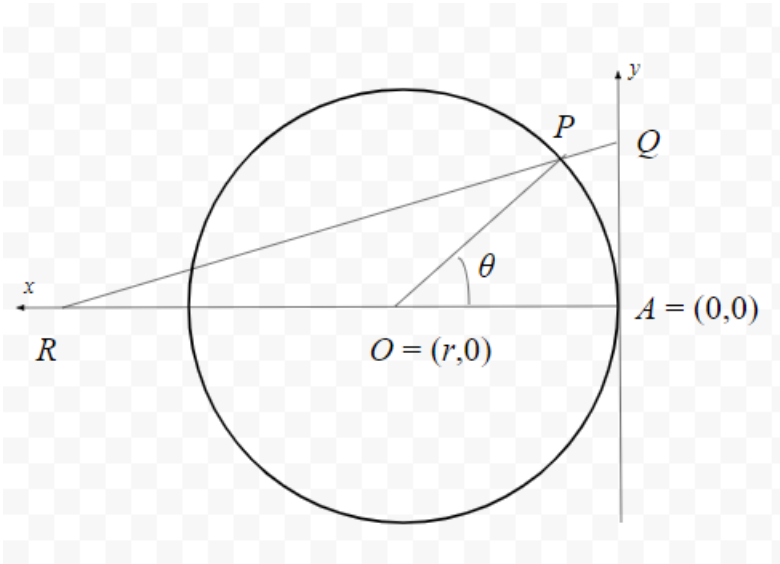
ξ ligger mellan 0 och x. För $|x| \leq \pi/4$ är $|\tan\xi| \leq 1$, vilket betyder att

$$|S(x) - p_4(x)| = |p_4(x) + R_5(x) - p_4(x)| = |R_5(x)| =$$

$$= \left| -\frac{(1+3\tan^2\xi)(1+\tan^2\xi)}{60}x^5 \right| \leq [\text{triangelolikheten}] \leq$$

$$\leq (|1| + |3\tan^2 x|)(|1| + |\tan^2 x|)\frac{|x|^5}{60} \leq (1+3)(1+1)\frac{|x|^5}{60} = \frac{8|x|^5}{60} = \frac{2}{15}|x|^5 \leq \frac{|x|^5}{3}. \quad \square$$

11.41



Att cirkeln har radien r ger direkt att $P = (r - r\cos\theta, r\sin\theta)$, och att sträckan $\overline{AP} = r\theta$, vilket ger att $Q = (0, r\theta)$. Med detta kan vi bilda en linje genom P och Q - tänk på att x-axeln ökar åt vänster i figuren. Riktningskoefficienten ges av

$$k = \frac{r\sin\theta - r\theta}{r - r\cos\theta - 0} = \frac{\sin\theta - \theta}{1 - \cos\theta},$$

skärningen med y-axeln är beskriven i punkten Q. Linjens skärning med x-axeln (punkten R:s definition) ges av att

$$y = \frac{\sin\theta - \theta}{1 - \cos\theta}x + r\theta = 0 \implies x = \frac{-r\theta}{\frac{\sin\theta - \theta}{1-\cos\theta}} = r\frac{\theta(\cos\theta - 1)}{\sin\theta - \theta},$$

vi vill nu bestämma

$$\lim_{\theta\to 0} r\frac{\theta(\cos\theta - 1)}{\sin\theta - \theta} = \lim_{\theta\to 0} r\frac{\theta\left(1 - \frac{\theta^2}{2} + \theta^4 B_1(\theta) - 1\right)}{\theta - \frac{\theta^3}{6} + \theta^5 B_2(\theta) - \theta} =$$

$$= \lim_{\theta\to 0} r\frac{-\frac{\theta^3}{2} + \theta^5 B_1(\theta)}{-\frac{\theta^3}{6} + \theta^5 B_2(\theta)} = \lim_{\theta\to 0} r\frac{-\frac{1}{2} + \theta^2 B_1(\theta)}{-\frac{1}{6} + \theta^2 B_2(\theta)} = r\frac{-1/2 + 0}{-1/6 + 0} = 3r.$$

11.42

a)

$$T(v) = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right).$$

Med $x = v^2/c^2$ får vi funktionen

$$T(x) = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1\right),$$

och om vi skalar om med en konstant får vi funktionen

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1 = (1-x)^{-1/2} - 1.$$

Funktionen $(1+t)^\alpha$ har en standardutveckling:

$$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}t^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{n!}t^k + t^{k+1}B(t),$$

vilket betyder att

$$f(x) = (1-x)^{-1/2} - 1 = [t = -x,\ \alpha = -1/2] =$$
$$= 1 + (-\frac{1}{2})(-x) + (-x)^2B_1(-x) - 1 = \frac{1}{2}x + x^2B(x).$$

Alltså är

$$T(v) \approx m_0c^2\frac{1}{2}x = m_0c^2\frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{2}m_0v^2,$$

vilket är den kinetiska energin i klassisk fysik.

b)

Vi behöver undersöka storleken på resttermen $x^2B(x)$, och, skriven på Lagrange form, är

$$f(x) = (1-x)^{-1/2} - 1 \implies f'(x) = \frac{1}{2}(1-x)^{-3/2} \implies f''(x) = \frac{3}{4}(1-x)^{-5/2} \implies$$
$$\implies x^2B(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}x^2 = \frac{\frac{3}{4}(1-\xi)^{-5/2}}{2}x^2 = \frac{3}{8(1-\xi)^{5/2}}x^2,$$

vilket ger oss det relativa felet

$$\left|\frac{m_0c^2\frac{3}{8(1-\xi)^{5/2}}x^2}{\frac{1}{2}m_0c^2x}\right| = \left|\frac{3}{4(1-\xi)^{5/2}}x\right| = \left|\frac{3}{4(1-\xi)^{5/2}}\cdot\frac{v^2}{c^2}\right| = \frac{3v^2}{4c^2(1-\xi)^{5/2}},$$

eftersom $0 \le v \le 10^{-3}c$, och ξ är ett tal mellan 0, kan vi skriva $0 \le \xi \le x = v^2/c^2 \le (10^{-3}c)^2/c^2 = 10^{-6}$. Detta betyder att nämnaren är som minst

$$4c^2(1-10^{-6})^{5/2} = 3,99999c^2,$$

alltså är

$$\frac{3v^2}{4c^2(1-\xi)^{5/2}} \le \frac{3(10^{-3}c^2)}{3,99999c^2} = \frac{3\cdot 10^{-6}}{3,99999} \le 10^{-6}. \quad \square$$

11.43

$$f(x) = 1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{5}{32}x^4 - \frac{1}{12}x^5 + x^6 B(x) =$$

$$= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + x^6 B(x) \implies$$

$$\implies f'(0) = 0 \text{ och } \frac{f^{(5)}(0)}{120} = -\frac{1}{12} \implies f^{(5)}(0) = -10.$$

Kapitel 12

Om det står "bestäm en primitiv funktion", behöver man inte lägga till en integrationskonstant, men om det står "bestäm alla primitiva funktioner", så måste man göra det.

12.1

Inses lätt som standardintegraler.

12.2

Skriv om på formen $x^\alpha \implies \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, $\alpha \neq -1$. Exempelvis är $\frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{3/2}} = x^{-3/2}$. När man har gjort detta inses deluppgifterna lätt.

12.3

Kompensera för den inre derivatan, och kontrollera om nämnarens grad är 1, för då kommer man att få en logaritm. Med denna information inses deluppgifterna lätt. (Jag hade ändå bara skrivit upp svaret, så "lösningar" hade inte gett något.)

12.4

Integraler är linjära operator, så man kan integrera varje term för sig.

a)

Inses lätt.

b)

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = x^{-1} - x^{-2} + x^{-3} \implies$$

$$\implies \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) dx = \ln|x| + x^{-1} - x^{-2}/2 + C = \ln|x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C.$$

c)

$$\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \int \left(x^{1/2} + x^{-1/2}\right) dx = 2x^{3/2}/3 + 2x^{1/2} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C.$$

d)

$$\int \frac{3 + 5x^{2/3}}{x^3} dx = \int \left(3^{x^{-3}} + 5x^{-7/3}\right) dx = -\frac{3}{2x^2} - \frac{15}{4x^{4/3}} + C.$$

e)

Kvadraten är på hela nämnaren, vilket ger $\frac{-1}{1+x} + C$

f)

Kvadraten är bara på x, så vi får $-\arctan x + C$.

12.5

Återigen är det bara att kompensera för den inre derivatan, vilket gör att även dessa deluppgifter inses lätt. På h) är $e^{(2x+1)} = ee^{2x}$.

12.6

Nej.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{x^2}}{2x}\right) = \frac{2xe^{x^2}2x-2e^{x^2}}{4x^2} = \left(1-\frac{1}{2x^2}\right)e^{x^2} \neq e^{x^2}.$$

12.7

Lösning finns redan.

12.8

Man skulle kunna göra variabelbytet i huvudet, och bara se den inre derivatan, men för att vara tydlig kommer jag, åtminstone på denna uppgift, att explicit göra variabelbytet.

a)

$$\int e^{x^2}\cdot x\ dx = \begin{bmatrix} t = x^2 \\ dt = 2xdx \\ xdx = dt/2 \end{bmatrix} = \int e^t\ \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}e^t = \frac{1}{2}e^{x^2}.$$

b)

Exakt samma variabelbyte som i a) ger

$$\int \frac{1}{6}e^t\ dt = \frac{1}{6}e^t = \frac{1}{6}e^{x^2}.$$

c)

$t = x^2 \implies dt = 2xdx \implies$

$$\int \cos x^2 \cdot 2x\ dx = \int \cos t\ dt = \sin t = \sin x^2.$$

d)

Detta är halva funktionen i c), alltså blir en primitiv

$$\frac{1}{2}\sin x^2.$$

e)

Med $t = x^3 \implies dt = 3x^2 dx \implies x^2 dx = dt/3$ får vi att

$$\int x^2 \cos x^3 \; dx = \int \cos t \; \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \sin t = \frac{1}{3} \sin x^3.$$

f)

Samma variabelbyte som ovan ger

$$\int x^2 \sin x^3 \; dx = \int \sin t \; \frac{dt}{3} = \frac{-1}{3} \cos t = -\frac{1}{3} \cos x^3.$$

g)

$$\int \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} \; dx = \begin{bmatrix} t = \dfrac{1}{x} \\ dt = -\dfrac{1}{x^2} dx \end{bmatrix} = \int -\cos t \; dt = -\sin t = -\sin \frac{1}{x}.$$

h)

$$\int 2x(x^2+5)^8 \; dx = \begin{bmatrix} t = x^2 + 5 \\ dt = 2x dx \end{bmatrix} = \int t^8 \; dt = \frac{1}{9} t^9 = \frac{1}{9}(x^2+5)^9.$$

12.9

a)

Lösning finns redan.

b)

$$\int \cos x \sin^3 x \; dx = \begin{bmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{bmatrix} = \int t^3 \; dt = \frac{1}{4} t^4 = \frac{1}{4} \sin^4 x.$$

c)

$$\int \cos x \sin x \; dx = \begin{bmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{bmatrix} = \int t \; dt = \frac{1}{2} t^2 = \frac{1}{2} \sin^2 x,$$

$$\int \cos x \sin x \; dx = \begin{bmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{bmatrix} = \int -t \; dt = -\frac{1}{2} t^2 = -\frac{1}{2} \cos^2 x,$$

$$\int \cos x \sin x \; dx = \int \frac{1}{2} \sin 2x \; dx = -\frac{1}{4} \cos 2x.$$

d)

$$\int \cos x \frac{1}{\sin^2 x} \; dx = \begin{bmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{bmatrix} = \int \frac{1}{t^2} \; dt = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{\sin x}.$$

e)

Lösning finns redan.

f)

Samma som e).

g)

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}\ dx = \begin{bmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{bmatrix} = \int \frac{-1}{t}\ dt = -\ln|t| = -\ln|\cos x|.$$

h)

Samma som g), eftersom $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

12.10

a)

$$\int \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x\ dx = \begin{bmatrix} t = x^2+1 \\ dt = 2xdx \end{bmatrix} = \int \frac{1}{t}\ dt = \ln|t| =$$
$$= \ln|x^2+1| = [x^2+1>0] = \ln(x^2+1).$$

b)

Samma som a).

c)

Integranden är halva den i b).

d)

$$\int \frac{3x^2}{x^3+1}\ dx = \begin{bmatrix} t = x^3+1 \\ dt = 3x^2dx \end{bmatrix} = \int \frac{1}{t}\ dt = \ln|t| = \ln|x^3+1|.$$

e)

Integranden är en tredjedel av den i d).

f)

$$\int \frac{e^x}{e^x+1}\ dx = \begin{bmatrix} t = e^x+1 \\ dt = e^xdx \end{bmatrix} = \int \frac{1}{t}\ dt = \ln|t| =$$
$$= \ln|e^x+1| = [e^x+1>0] = \ln(e^x+1).$$

g)

$$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\ dx = \begin{bmatrix} t = e^x + e^{-x} \\ dt = (e^x - e^{-x})dx \end{bmatrix} = \int \frac{1}{t}\ dt = \ln|t| =$$
$$= \ln|e^x + e^{-x}| = [e^x + e^{-x} > 0] = \ln(e^x + e^{-x}).$$

h)

$$\int \frac{e^x + 1}{e^x}\ dx = \int \left(\frac{e^x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right)\ dx = \int \left(1 + e^{-x}\right)\ dx = x - e^{-x}.$$

12.11

I samtliga deluppgifter kommer variabelbytet $t = \ln x \implies dt = \frac{1}{x}dx$ att användas.

a)

$$\int \frac{1}{x}(\ln x)^2\ dx = \int t^2\ dt = \frac{1}{3}t^3 = \frac{1}{3}(\ln x)^3.$$

b)

$$\int \frac{1}{x}(\ln x)\ dx = \int t\ dt = \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2}(\ln x)^2.$$

c)

Samma som a).

d)

Samma som b).

e)

$$\int \frac{1}{x}\sin(\ln x)\ dx = \int \sin t\ dt = -\cos t = -\cos(\ln x).$$

f)

$$\int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln x}\ dx = \int \frac{1}{t}\ dt = \ln|t| = \ln|\ln x|.$$

g)

Samma som f).

h)

Samma som e).

12.12

a)

$$f(x) = \int f'(x)\ dx = \int x \sin x^2\ dx = \begin{bmatrix} t = x^2 \\ dt = 2xdx \end{bmatrix} = \int \frac{1}{2} \sin t\ dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\cos t + C = -\frac{1}{2}\cos x^2 + C,$$

$$f(0) = 0 \implies 0 = -\frac{1}{2} + C \implies C = \frac{1}{2} \implies$$

$$\implies f(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos x).$$

b)

$$f(x) = \int f'(x)\ dx = \int \frac{1}{(1+x^2)\arctan x}\ dx = \begin{bmatrix} t = \arctan x \\ dt = \dfrac{dx}{1+x^2} \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{1}{t}\ dt = \ln|t| + C = \ln|\arctan x| + C,$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \implies \lim_{x\to\infty} (\ln|\arctan x| + C) = \ln\frac{\pi}{2} + C = 0 \implies C = -\ln\frac{\pi}{2} \implies$$

$$\implies f(x) = \ln|\arctan x| - \ln\frac{\pi}{2}.$$

12.13

Lösning finns redan, dock anser jag att variabelbytet $t = e^x + 5$ är bättre, men det är en marginell skillnad.

12.14

a)

Se 12.11 f)/g) och lägg till en integrationskonstant.

b)

$$\int \sin x \cos^{-4/3} x\ dx = \begin{bmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{bmatrix} = \int -t^{-4/3}\ dt = \frac{3}{4}t^{-1/3} = 3\cos^{-1/3} x.$$

12.15

Om man använder sin repertoar av kända derivator kan man ofta se en kedjeregelsderivata bland integranderna, vilket motiverar ett lämpligt variabelbyte.

a)

Lösning finns redan.

b)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\sqrt{x}\ dx = \begin{bmatrix} t = \sqrt{x} \\ dt = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}} \end{bmatrix} = \int 2\sin t\ dt = -2\cos t + C = -2\cos\sqrt{x} + C.$$

c)

$$\int x\sqrt{7x^2+5}\ dx = \begin{bmatrix} t = 7x^2+5 \\ dt = 14xdx \\ xdx = dt/14 \end{bmatrix} = \int \sqrt{t}\ \frac{dt}{14} = \frac{1}{14}\frac{2}{3}t\sqrt{t} + C = \frac{1}{21}(7x^2+5)^{3/2} + C.$$

d)

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}\ dx = \begin{bmatrix} t = x^2+5 \\ dt = 2xdx \end{bmatrix} = \int \frac{1}{2\sqrt{t}}\ dt = \sqrt{t} + C = \sqrt{x^2+5} + C.$$

e)

Se facit.

12.16

a)

Lösning finns redan.

b)

$$\int x\sqrt{x+1}\ dx = \begin{bmatrix} t = x+1 \implies x = t-1 \\ dt = dx \end{bmatrix} = \int (t-1)\sqrt{t}\ dt = \int \left(t\sqrt{t} - \sqrt{t}\right)\ dt =$$

$$= \frac{2}{5}t^{5/2} - \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C.$$

c)

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x+5}}\ dx = \begin{bmatrix} t = 2x+5 \implies x = (t-5)/2 \\ dx = dt/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\int \frac{t-5}{\sqrt{t}}\ dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(\sqrt{t} - \frac{5}{\sqrt{t}}\right)\ dt = \frac{1}{4}\frac{2}{3}t^{3/2} - \frac{5}{4}2\sqrt{t} + C = \frac{1}{6}(2x+5)^{3/2} - \frac{5}{2}\sqrt{2x+5} + C =$$

$$= \left(\frac{2x}{6} + \frac{5}{6} - \frac{5}{2}\right)\sqrt{2x+5} + C = \frac{1}{3}(x-5)\sqrt{2x+5} + C.$$

d)

$$\int \frac{1}{x+x^{1/3}}\ dx = \int \frac{1}{x^{1/3}(x^{2/3}+1)}\ dx = \int \frac{x^{-1/3}}{x^{2/3}+1}\ dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x^{-1/3}/3}{x^{2/3}+1}\ dx = \begin{bmatrix} t = x^{2/3}+1 \\ dt = 2x^{-1/3}/3 \end{bmatrix} = \frac{3}{2}\int \frac{1}{t}\ dt = \frac{3}{2}\ln|t| + C =$$

$$= \frac{3}{2}\ln|x^{2/3}+1| + C = [x^{2/3}+1>0] = \frac{3}{2}\ln(x^{2/3}+1) + C.$$

12.17

Om man glömmer bort partialintegrationsformeln kan man enkelt härleda den genom att utgå från produktregeln:

$$(fg)' = f'g + fg' \iff fg' = (fg)' - f'g \implies \int fg'\ dx = \int ((fg)' - f'g)\ dx \implies$$

$$\implies \int fg'\ dx = \int (fg)'\ dx - \int f'g\ dx = fg - \int f'g\ dx.$$

Där vi har funnit formeln

$$\int fg'\ dx = fg - \int f'g\ dx.$$

Principen för hur/när man vill använda partialintegration kan variera lite. Om man har ett polynom gånger något är det lämpligt att derivera bort polynomet, men om man har en invers funktion ($\ln x$ eller $\arctan x$ till exempel) är det lämpligt att derivera den inversa funktionen, eftersom man då får ett rationellt uttryck.

a)

Lösning finns redan.

b)

$$\int xe^{-x}\ dx = -xe^{-x} - \int -1\cdot e^{-x}\ dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C = -(x+1)e^{-x} + C.$$

c)

$$\int \sqrt{x}\ln x\ dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x - \int \frac{2}{3}x\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}\ dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x - \int \frac{2}{3}\sqrt{x}\ dx =$$

$$= \frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x - \frac{4}{9}x\sqrt{x} + C.$$

d)

$$\int \arctan x\ dx = \int 1\cdot\arctan x\ dx = x\arctan x - \int x\cdot\frac{1}{1+x^2}\ dx = [12.10\text{ c)}] =$$

$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

e)

Lösning finns redan.

f)

På denna uppgift kan man välja den primitiva funktionen till 1 lämpligt för att underlätta sitt arbete, det gäller ju att $\int 1\ dx = x + \tilde{C}$, så om vi väljer $\tilde{C}$ på ett bra sätt kommer integralen som är kvar att underlättas.

$$\int \ln(x+1)\ dx = \int 1 \cdot \ln(x+1)\ dx = (x+1)\ln(x+1) - \int (x+1) \cdot \frac{1}{x+1}\ dx =$$
$$= (x+1)\ln(x+1) - \int 1\ dx = (x+1)\ln(x+1) - x + C.$$

Här valde vi $\tilde{C} = 1$, om man istället, som man kanske instinktivt vill göra, väljer $\tilde{C} = 0$ behöver man utföra polynomdivision.

g)

$$\int (\ln x)^2\ dx = x(\ln x)^2 - \int x \cdot 2\frac{\ln x}{x}\ dx = x(\ln x)^2 - \int 2\ln x\ dx =$$
$$= x(\ln x)^2 - 2\left(x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\right) = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C.$$

h)

$$\int x^2 \sin x\ dx = -x^2\cos x - \int -2x\cos x\ dx = -x^2\cos x + 2x\sin x - \int 2\sin x\ dx =$$
$$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C = (2 - x^2)\cos x + 2x\sin x + C.$$

12.18

a)

Lösning finns redan.

b)

Det spelar ingen roll vilken av funktionerna vi väljer att integrera, och vilken vi väljer att derivera. Jag kommer integrera e^{2x}.

$$I = \int e^{2x}\sin 3x\ dx = \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \int \frac{1}{2}e^{2x}3\cos 3x\ dx =$$
$$= \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x - \int \frac{1}{2}e^{2x}(-3\sin 3x)\ dx\right) =$$
$$= \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{4}e^{2x}\cos 3x - \frac{9}{4}\int e^{2x}3\sin 3x\ dx = \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{4}e^{2x}\cos 3x - \frac{9}{4}I \implies$$
$$\implies \frac{13}{4}I = \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{4}e^{2x}\cos 3x \implies$$
$$\implies I = \frac{2}{13}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{13}e^{2x}\cos 3x + C = \frac{e^{2x}}{13}(2\sin 3x - 3\cos 3x) + C.$$

12.19

b)

$$\int x\sqrt{x+1}\ dx = \frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \int 1\cdot\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\ dx = \frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+1)^{5/2} + C.$$

c)

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x+5}}\ dx = x\frac{2}{2}\sqrt{2x+5} - \int 1\cdot\frac{2}{2}\sqrt{2x+5}\ dx = x(2x+5)^{1/2} - \frac{1}{3}(2x+5)^{3/2} + C.$$

12.20

$$\int e^{\sqrt{x}}\ dx = \begin{bmatrix} t=\sqrt{x} \implies x=t^2 \\ dx = 2tdt \end{bmatrix} = \int 2te^t\ dt = 2te^t - \int 2e^t\ dt = 2te^t - 2e^t + C =$$

$$= 2e^t(t-1) + C = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + C.$$

12.21

a)

$$\int x^3\sin x^2\ dx = \int \frac{1}{2}x^2\cdot 2x\sin x^2\ dx = \begin{bmatrix} t=x^2 \\ dt = 2xdx \end{bmatrix} = \int \frac{1}{2}t\sin t\ dt =$$

$$= -\frac{1}{2}t\cos t - \int -\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cos t\ dt = -\frac{1}{2}t\cos t + \frac{1}{2}\sin t + C = \frac{1}{2}(\sin x^2 - x^2\cos x^2) + C.$$

b)

$$\int e^x\ln(1+e^x)\ dx = \begin{bmatrix} t=e^x \\ dt = e^x dx \end{bmatrix} = \int \ln(1+t)\ dt = [12.17\text{ f)}] =$$

$$= (1+t)\ln(1+t) - t + C = (1+e^x)\ln(1+e^x) - e^x + C.$$

12.22

Om några av dessa uppgifter med rationella uttryck kräver polynomdivision kommer jag att skippa själva uträkningen och direkt skriva upp vad polynomdivisionen ger. Om man vill se polynomdivision kan man titta på andra kapitel.

a)

Polynomdivision ger att

$$\frac{x^2+4}{x-1} = x+1+\frac{5}{x-1},$$

och

$$\int\left(x+1+\frac{5}{x-1}\right)\ dx = \frac{x^2}{2} + x + 5\ln|x-1| + C.$$

b)

Polynomdivision ger att

$$\frac{x^3+5x^2+2x-1}{x+3} = x^2+2x-4+\frac{11}{x+3},$$

och

$$\int \left(x^2+2x-4+\frac{11}{x+3}\right)\,dx = \frac{x^3}{3}+x^2-4x+11\ln|x+3|+C.$$

12.23

a)

Faktorisering av nämnaren och partialbråksuppdelning ger att

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2} \implies$$

$$\implies 1 = A(x+2)+B(x-2) = (A+B)x+2(A-B)\cdot 1 \implies$$

$$\implies \begin{cases} \underline{1}: & 2(A-B) &= 1, \\ \underline{x}: & A+B &= 0 \end{cases} \implies A=-B=\frac{1}{4} \implies$$

$$\int \frac{1}{x^2-4}\,dx = \int \left(\frac{1/4}{x-2}-\frac{1/4}{x+2}\right)\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x-2|-\frac{1}{4}\ln|x+2|+C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C.$$

b)

Vi faktoriserar återigen nämnaren och ansätter en partialbråksuppdelning.

$$x^2-4x-5 = (x+1)(x-5) \implies \frac{x+13}{x^2-4x-5} = \frac{A}{x-5}+\frac{B}{x+1} \implies$$

$$\implies x+13 = A(x+1)+B(x-5) = (A+B)x+(A-5B)\cdot 1 \implies$$

$$\implies \begin{cases} \underline{1}: & A-5B &= 13, \\ \underline{x}: & A+B &= 1 \end{cases} \implies \begin{cases} A-5B &= 13, \\ 6B &= -12 \end{cases} \implies \begin{cases} A=3, \\ B=-2 \end{cases} \implies$$

$$\implies \int \frac{x+13}{x^2-4x-5}\,dx = \int \left(\frac{3}{x-5}-\frac{2}{x+1}\right)\,dx = 3\ln|x-5|-2\ln|x+1|+C.$$

c)

$x=1$ är en rot till polynomet i nämnaren. Polynomdivision av nämnaren med faktorn $x-1$ ger att $x^3-6x^2+11x-6 = (x-1)(x^2-5x+6) = (x-1)(x-2)(x-3)$. Täljaren har ingen av dessa tre faktorer, vilket betyder att vi nu kan ansätta en partialbråksuppdelning:

$$\frac{5x^2-7x+13}{x^3-6x^2+11x-6} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3} \implies$$

$$\implies 5x^2 - 7x + 13 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2) =$$
$$= A(x^2 - 5x + 6) + B(x^2 - 4x + 3) + C(x^2 - 3x + 2) =$$
$$= (A + B + C)x^2 - (5A + 4B + 3C)x + (6A + 3B + 2C) \cdot 1 \implies$$
$$\implies \begin{cases} \underline{1}: \ 6A + 3B + 2C & = 13, \\ \underline{x}: \ -5A - 4B - 3C & = -7, \\ \underline{x}^2: \ A + B + C & = 5 \end{cases} \implies \begin{cases} -3B - 4C & = 13 - 6 \cdot 5, \\ -B - 2C & = 7 - 5 \cdot 5, \\ A + B + C & = 5 \end{cases} \implies$$
$$\implies \begin{cases} -2C & = 17 - 3 \cdot 18, \\ B + 2C & = 18, \\ A + B + C & = 5 \end{cases} \implies \begin{cases} A = 11/2, \\ B = -19, \\ C = 37/2 \end{cases} \implies$$
$$\implies \int \frac{5x^2 - 7x + 13}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}\, dx = \int \left(\frac{11}{2(x-1)} - \frac{19}{x-2} + \frac{37}{2(x-3)} \right) dx =$$
$$= \frac{11}{2} \ln|x-1| - 19 \ln|x-2| + \frac{37}{2} \ln|x-3| + C.$$

12.24

Jag kommer att skippa själva lösningen av ekvationssystemet som uppstår vid partialbråksuppdelning, eftersom det är jobbigt att skriva upp, men jag kommer fortfarande att skriva det ekvationssystem som man får. Om det är väldigt enkelt att lösa, som i a) nedan, kommer jag nog skriva lösningen.

a)

Eftersom vi har en upprepad faktor i nämnaren ansätter vi en partialbråksuppdelning på följande form:

$$\frac{1}{x(x-3)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2} \implies$$
$$\implies 1 = A(x-3)^2 + Bx(x-3) + Cx = A(x^2 - 6x + 9) + B(x^2 - 3x) + Cx =$$
$$= (A + B)x^2 + (-6A - 3B + C)x + 9A \implies$$
$$\implies \begin{cases} \underline{1}: \ 9A = 1 \implies A = 1/9, \\ \underline{x}: \ -6A - 3B + C = 0, \\ \underline{x}^2: \ A + B = 0 \implies B = -1/9 \end{cases} \implies \begin{cases} A = 1/9, \\ B = -1/9, \\ C = 1/3 \end{cases} \implies$$
$$\implies \int \frac{1}{x(x-3)^2}\, dx = \int \left(\frac{1}{9x} - \frac{1}{9(x-3)} + \frac{1}{3(x-3)^2} \right) dx =$$
$$= \frac{1}{9} \ln|x| - \frac{1}{9} \ln|x-3| - \frac{1}{3(x-3)} + C = \frac{1}{9} \left(\ln\left|\frac{x}{x-3}\right| - \frac{3}{x-3} \right) + C.$$

b)

Återigen har vi en dubbelrot i nämnaren, så

$$\frac{3x + 11}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} \implies$$
$$\implies 3x + 11 = A(x+2) + B \implies A = 3 \implies B = 11 - 2A = 5 \implies$$
$$\implies \int \frac{3x + 11}{(x+2)^2}\, dx = \int \left(\frac{3}{x+2} + \frac{5}{(x+2)^2} \right) dx = 3 \ln|x+2| - \frac{5}{x+2} + C.$$

c)

Igen har vi upprepade rötter, alltså ansätter vi

$$\frac{1}{x^2(x-3)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{(x-1)^3} \implies$$

$$\implies 1 = Ax(x-1)^3 + B(x-3)^3 + Cx^2(x-1)^2 + Dx^2(x-1) + Ex^2 =$$

$$= A(x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x) + B(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + C(x^4 - 2x^3 + x^2) + D(x^3 - x^2) + Ex^2 =$$

$$= (A+C)x^4 + (-3A+B-2C+D)x^3 + (3A-3B+C-D+E)x^2 + (-A+3B)x - B\cdot 1 \implies$$

$$\implies \begin{cases} \underline{1}: \ -B & = 1, \\ \underline{x}: \ -A+3B & = 0, \\ \underline{x}^2: \ 3A-3B+C-D+E & = 0, \\ \underline{x}^3: \ -3A+B-2C+D & = 0, \\ \underline{x}^4: \ A+C & = 0, \end{cases} \implies \dots \implies \begin{cases} A = -3, \\ B = -1, \\ C = 3, \\ D = -2, \\ E = 1 \end{cases} \implies$$

$$\implies \int \frac{1}{x^2(x-3)^3}\, dx = \int \left(-\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} \right) dx =$$

$$= -3\ln|x| + \frac{1}{x} + 3\ln|x-1| + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} + C.$$

d)

Samma princip ytterligare en gång ger att

$$\frac{1}{x^3+2x^2+x} = \frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \implies$$

$$\implies 1 = A(x^2+2x+1) + B(x^2+x) + Cx = (A+B)x^2 + (2A+B+C)x + A\cdot 1 \implies$$

$$\implies \begin{cases} \underline{1}: \ A & = 1, \\ \underline{x}: \ 2A+B+C & = 0, \\ \underline{x}^2: \ A+B & = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = 1, \\ B = -1, \\ C = -1 \end{cases} \implies$$

$$\implies \int \frac{1}{x^3+2x^2+x}\, dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx =$$

$$= \ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C.$$

12.25

a)

Standardintgral: $\arctan x + C$.

b)

Kompensera för den inre derivatan 2, vilket ger $\frac{1}{2}\arctan 2x + C$.

c)

Kompensera för den inre derivatan 1/3, vilket ger $3\arctan\frac{x}{3}+C$.

12.26

a)

$4x^2=(2x)^2 \implies$ samma som 12.25 b).

b)

$x^2/9=(x/3)^2 \implies$ samma som 12.25 c).

c)

$$\int \frac{1}{x^2+\frac{1}{4}}\,dx=\int \frac{4}{4x^2+1}\,dx=2\arctan 2x+C.$$

d)

$$\int \frac{1}{x^2+9}\,dx=\int \frac{1/9}{x^2/9+1}\,dx=\frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3}+C.$$

12.27

Principen för när man har andragradsfaktorer som inte går att faktorisera ytterligare, är att kvadratkomplettera nämnaren och sedan bryta ut så att man får något på formen t^2+1 i nämnaren, för då vet man att en primitiv funktion är $\arctan t$.

a)

$$\int \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx=\int \frac{1}{(x-1)^2+1}\,dx=\arctan(x-1)+C.$$

b)

$$\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx=\int \frac{1}{(x+2)^2+1}\,dx=\arctan(x+2)+C.$$

c)

$$\int \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx=\int \frac{1}{(x-1)^2+4}\,dx=\int \frac{1/4}{(x-1)^2/4+1}\,dx=$$
$$=\frac{1}{4}\int \frac{1}{(\frac{x-1}{2})^2+1}\,dx=\frac{1}{4}\frac{1}{1/2}\arctan\frac{x-1}{2}+C=\frac{1}{2}\arctan\frac{x-1}{2}+C.$$

Om man tycker det är svårt att se den primitiva funktionen, med inre derivata och allting, direkt, kan man alltid göra ett variabelbyte där man sätter t till det som är inuti parentesen. I detta fall hade man då fått

$$t=\frac{x-1}{2} \implies dt=\frac{dx}{2} \implies \frac{1}{4}\int \frac{1}{(\frac{x-1}{2})^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt,$$

vilket gör det lite lättare att se. Jag kommer för det mesta inte att göra det variabelbytet, men man kan ha i åtanke att det är möjligt att göra så för att underlätta för sig själv.

d)

$$\int \frac{1}{x^2+4x+6}\,dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(\frac{x+2}{\sqrt{2}})^2+1}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+2}{\sqrt{2}} + C.$$

12.28

På dessa uppgifter kan man antingen göra som i lösningarna i boken, där man kvadratkompletterar och gör ett variabelbyte, vilket alltid fungerar - och är väldigt algoritmiskt - eller så kan man addera 0 till täljaren på ett listigt sätt och sedan dela upp den i två bråk, där den ena har en konstant i täljaren, vilket blir till någon arctan grej, och den andra har den derivatan av nämnaren i täljaren, vilket ger logaritmen. Jag kommer att göra på det senare sättet för det är roligt att addera 0 - det är ju trots allt ett av *analysens dödliga vapen.*

a)

Lösning finns redan.

b)

$$\int \frac{x+1}{x^2+4x+5}\,dx = \int \frac{x+1}{(x+2)^2+1}\,dx = \int \frac{x+2-1}{(x+2)^2+1}\,dx =$$

$$= \int \left(\frac{x+2}{(x+2)^2+1} - \frac{1}{(x+2)^2+1}\right)\,dx = \int \left(\frac{\frac{1}{2}\cdot 2(x+2)}{x^2+4x+5} - \frac{1}{(x+2)^2+1}\right)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+4x+5| - \arctan(x+2) + C = [x^2+4x+5>0] =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5) - \arctan(x+2) + C.$$

c)

Lösning finns redan.

d)

$$\int \frac{x+1}{x^2+4x+6}\,dx = \int \frac{x+1}{(x+2)^2+2}\,dx = \int \frac{x+2-1}{(x+2)^2+2}\,dx =$$

$$= \int \left(\frac{x+2}{(x+2)^2+2} - \frac{1}{(x+2)^2+2}\right)\,dx = \frac{1}{2}\ln|(x+2)^2+2| - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+2}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= [(x+2)^2+2 = x^2+3x+6>0] = \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+6) - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+2}{\sqrt{2}} + C.$$

12.29

Lösning finns redan.

12.30

När man har ett andragradspolynom som inte går att faktorisera mer i nämnaren, och man önskar vilja göra en partialbråksuppdelning, ansätter man ett linjärt polynom i täljaren (det ska ha en grad lägre än nämnaren).

a)

$$\frac{2}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} \implies$$

$$\implies 2 = (Ax+B)(x-1) + C(x^2+1) = (A+C)x^2 + (-A+B)x + (-B+C)\cdot 1 \implies$$

$$\implies \begin{cases} \underline{1}: \ -B+C = 2, \\ \underline{x}: \ -A+B = 0, \\ \underline{x}^2: \ A+C = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = -1, \\ B = -1, \\ C = 2 \end{cases} \implies$$

$$\implies \int \frac{2}{(x^2+1)(x-1)}\,dx = \int \left(-\frac{x+1}{x^2+1} + \frac{2}{x-1}\right)\,dx =$$

$$= \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\right)\,dx =$$

$$= 2\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \arctan x + C.$$

b)

$x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$, och alltså ansätter vi

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \implies$$

$$\implies 1 = A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1) =$$

$$= A(x^3+x^2+x+1) + B(x^3-x^2+x-1) + C(x^3-x) + D(x^2-1) =$$

$$= (A+B+C)x^3 + (A-B+D)x^2 + (A+B-C)x + (A-B-D)\cdot 1 \implies$$

$$\implies \begin{cases} \underline{1}: \ A-B-D = 1, \\ \underline{x}: \ A+B-C = 0, \\ \underline{x}^2: \ A-B+D = 0, \\ \underline{x}^3: \ A+B+C = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = 1/4, \\ B = -1/4, \\ C = 0, \\ D = -1/2 \end{cases} \implies$$

$$\implies \int \frac{1}{x^4-1}\,dx = \int \left(\frac{1/4}{x-1} - \frac{1/4}{x+1} - \frac{1/2}{x^2+1}\right)\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\arctan x + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\arctan x + C.$$

c)

$$\frac{5x^3+12x^2+12x+10}{(x^2+4)(x^2+2x+1)} = \frac{5x^3+12x^2+12x+10}{(x^2+4)(x+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2} \implies$$

$$\implies 5x^3+12x^2+12x+10 = (Ax+B)(x^2+2x+1) + C(x+1)(x^2+4) + D(x^2+4) =$$

$$= A(x^3+2x^2+x) + B(x^2+2x+1) + C(x^3+x^2+4x+4) + D(x^2+4) =$$

$$= (A+C)x^3 + (2A+B+C+D)x^2 + (A+2B+4C)x + (B+4C+4D)\cdot 1 \implies$$

$$\implies \begin{cases} \underline{1}: \ B+4C+4D & = 10, \\ \underline{x}: \ A+2B+4C & = 12, \\ \underline{x}^2: \ 2A+B+C+D & = 12, \\ \underline{x}^3: \ A+C & = 5 \end{cases} \implies \begin{cases} A=4, \\ B=2, \\ C=1, \\ D=1 \end{cases} \implies$$

$$\implies \int \frac{5x^3+12x^2+12x+10}{(x^2+4)(x^2+2x+1)}\,dx = \int \left(\frac{4x+2}{x^2+4} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx =$$

$$= \int \left(\frac{4x}{x^2+4} + \frac{2}{x^2+4} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx =$$

$$= \int \left(\frac{4x}{x^2+4} + \frac{1/2}{(x/2)^2+1} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx =$$

$$= 2\ln(x^2+4) + \arctan\frac{x}{2} + \ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + C.$$

12.31

a)

Polynomdivision:

$$\frac{x^5+1}{x^4+x^3+x^2} = x - 1 + \frac{x^2+1}{x^4+x^3+x^2},$$

behandlar det rationella uttrycket för sig och börjar med att ansätta

$$\frac{x^2+1}{x^4+x^3+x^2} = \frac{x^2+1}{x^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} \implies$$

$$\implies x^2+1 = A(x^3+x^2+x) + B(x^2+x+1) + Cx^3 + Dx^2 =$$

$$= (A+C)x^3 + (A+B+D)x^2 + (A+B)x + B\cdot 1 \implies$$

$$\implies \begin{cases} \underline{1}: \ B & = 1, \\ \underline{x}: \ A+B & = 0, \\ \underline{x}^2: \ A+B+D & = 1, \\ \underline{x}^3: \ A+C & = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A=-1, \\ B=1, \\ C=1, \\ D=1 \end{cases} \implies$$

$$\implies \int \frac{x^2+1}{x^4+x^3+x^2}\,dx = \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x+1}{x^2+x+1} \right) dx =$$

$$= -\ln|x| - \frac{1}{x} + \int \frac{x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}\,dx =$$

$$= -\ln|x| - \frac{1}{x} + \int \left(\frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{1/2}{x^2+x+1} \right) dx =$$

$$= -\ln|x| - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\, dx =$$

$$= -\ln|x| - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\frac{4}{3}\int \frac{1}{(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2+1}\, dx =$$

$$= -\ln|x| - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Alltså får vi att

$$\int \frac{5x^3+12x^2+12x+10}{(x^2+4)(x^2+2x+1)}\, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - x - \ln|x| - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

b)

$$\frac{x^2+8x+4}{x^2+4x+8} = \frac{x^2+4x+8+4x-4}{x^2+4x+8} = 1 + 4\frac{x-1}{x^2+4x+8},$$

här har vi en nämnare som inte går att faktorisera, men den är redan på rätt form (linjärt delat på kvadratiskt), alltså kan vi börja integrera direkt. Jag kommer integrerar det rationella uttrycket först.

$$\frac{x-1}{x^2+4x+8} = \frac{x+2-3}{x^2+4x+8} = \frac{x+2}{x^2+4x+8} - \frac{3}{x^2+4x+8} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2x+4}{x^2+4x+8} - \frac{3}{(x+2)^2+4} = \frac{1}{2}\frac{2x+4}{x^2+4x+8} - \frac{3/4}{(\frac{x+2}{2})^2+1} \implies$$

$$\implies \int \frac{x-1}{x^2+4x+8}\, dx = \int \left(\frac{1}{2}\frac{2x+4}{x^2+4x+8} - \frac{3}{4}\frac{1}{(\frac{x+2}{2})^2+1} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+4x+8| - \frac{3\cdot 2}{4}\arctan\frac{x+2}{2} + \tilde{C} \implies$$

$$\implies \int \left(1 + 4\frac{x-1}{x^2+4x+8} \right) dx =$$

$$= x + 2\ln(x^2+4x+8) - 6\arctan\frac{x+2}{2} + C.$$

c)

Polynomdivision ger att

$$\frac{x^3+4}{x^2+x} = x - 1 + \frac{x+4}{x(x+1)},$$

och vi ansätter därför

$$\frac{x+4}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \implies A(x+1) + Bx = (A+B)x + A \implies$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} A = 4, \\ A + B = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = 4, \\ B = -3 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \int \frac{x^3+4}{x^2+x}\,dx = \int \left(x - 1 + \frac{4}{x} - \frac{3}{x+1}\right)\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - x + 4\ln|x| - 3\ln|x+1| + C.$$

12.32

a)

För omskrivning av $\sin x$ (och $\cos x$), se uppgift 8.66.

$$t = \tan\frac{x}{2} \Longrightarrow \frac{x}{2} = \arctan t \Longrightarrow x = 2\arctan t. \quad \square$$

b)

Lösning finns redan.

12.33

Med $t = \tan\frac{x}{2}$ får man att $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ och $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$.

a)

$$\int \frac{1}{2+\sin x}\,dx = \int \frac{1}{2+\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{2}{2+2t^2+2}\,dt =$$

$$= \int \frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dt = \frac{4}{3}\int \frac{1}{(\frac{2t+1}{\sqrt{3}})^2+1}\,dt =$$

$$= \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

b)

$$\int \frac{1}{\sin^3 x}\,dx = \int \left(\frac{1+t^2}{2t}\right)^3 \frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{t^4+2t^2+1}{4t^3}\,dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}\right)\,dt = \frac{t^2}{8} + \frac{1}{2}\ln|t| - \frac{1}{8t^2} + C =$$

$$= \frac{(\tan\frac{x}{2})^2}{8} + \frac{1}{2}\ln|\tan\frac{x}{2}| - \frac{1}{8(\tan\frac{x}{2})^2} + C = \frac{1}{8}\left(\tan^2\frac{x}{2} - \cot^2\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln|\tan\frac{x}{2}| + C.$$

12.34

a)

Lösning finns redan.

b)

$$\int \frac{\sin 2x}{cos^3 x}\,dx = \int \frac{2\sin x\cos x}{\cos^3 x}\,dx = \int \frac{2\sin x}{\cos^2 x}\,dx =$$

$$= \begin{bmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x\,dx \end{bmatrix} = \int \frac{-2}{t^2}\,dt = \frac{2}{t} + C = \frac{2}{\cos x} + C.$$

c)

Med $t = \sin x \implies dt = \cos x\,dx$ får vi integralen

$$\int \frac{1}{t+t^2}\,dt = \left[\frac{1}{t+t^2} = \frac{1+t-t}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right] = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right)\,dt =$$

$$= \ln|t| - \ln|1+t| + C = \ln|\sin x| - \ln|1+\sin x| + C.$$

d)

Samma variabelbyte som i c) ger

$$\int t^9\,dt = \frac{1}{10}t^{10} + C = \frac{1}{10}\sin^{10} x + C.$$

e)

$$\frac{\tan^3 x + \tan x}{\tan^3 x + 3\tan^2 x + 2\tan x + 6} = \frac{\tan x(\tan^2 x + 1)}{\tan^3 x + 3\tan^2 x + 2\tan x + 6},$$

vilket betyder att med variabelbytet $t = \tan x \implies dt = (1+\tan^2 x)dx$ kommer integranden att förenklas till

$$\frac{t}{t^3 + 3t^2 + 2t + 6}.$$

$t = -3$ är en faktor till $t^3 + 3t^2 + 2t + 6$, och med polynomdivision får man att $t^3 + 3t^2 + 2t + 6 = (t+2)(t^2+3)$, vilket motiverar partialbråksuppdelningen

$$\frac{t}{t^3 + 3t^2 + 2t + 6} = \frac{At+B}{t^2+2} + \frac{C}{t+3} \implies$$

$$\implies t = (At+B)(t+3) + C(t^2+2) = (A+C)t^2 + (3A+B)t + (3B+2C)\cdot 1 \implies$$

$$\implies \begin{cases} 3B + C = 0, \\ 3A + B = 1, \\ A + C = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = 3/11, \\ B = 11/2, \\ C = -3/11 \end{cases} \implies$$

$$\implies \int \frac{t}{t^3 + 3t^2 + 2t + 6}\,dt = \int \left(\frac{3t+2}{11(t^2+2)} - \frac{3}{11(t+3)}\right)\,dt =$$

$$= \frac{1}{11}\int \left(\frac{3t}{t^2+2} + \frac{2}{t^2+2} - \frac{3}{t+3}\right)\,dt =$$

$$= \frac{1}{11}\left(\frac{3}{2}\ln(t^2+2) + \sqrt{2}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}} - 3\ln|t+3|\right) + C =$$

$$= \frac{1}{22}\left(3\ln(t^2+2) - 3\ln|t+3|^2\right) + \frac{\sqrt{2}}{11}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= \frac{3}{22}\ln\frac{\tan^2 x + 2}{(\tan x + 3)^2} + \frac{\sqrt{2}}{11}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}} + C.$$

f)

$$\int \frac{1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 2}\,dx = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\tan^2 x + 2}\,dx =$$

$$= \begin{bmatrix} t = \tan x \\ dt = dx/\cos^2 x \end{bmatrix} = \int \frac{1}{t^2+2}\,dt = \int \frac{1/2}{(t/\sqrt{2})^2 + 1}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{1/\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}} + C.$$

12.35

a)

Lösning finns redan.

b)

Lösning finns redan.

c)

Partialintegration ger att

$$I = \int \sin 5x \cos x\,dx = \sin 5x \sin x - \int 5\cos 5x \sin x\,dx =$$

$$= \sin 5x \sin x + 5\cos 5x \cos x - \int -25\sin 5x \cos x\,dx =$$

$$= \sin 5x \sin x + 5\cos 5x \cos x + 25I \implies -24I = \sin 5x \sin x + 5\cos 5x \cos x - 24C \implies$$

$$\implies I = -\frac{1}{24}\sin 5x \sin x - \frac{5}{24}\cos 5x \cos x + C.$$

d)

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \implies \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x \implies$$

$$\implies \int \cos^2 x\,dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

e)

$$\sin^4 x \cos^2 x = \sin^4 x(1 - \sin^2 x) = \sin^4 x - \sin^6 x,$$

en primitiv till $\sin^4 x$ bestämdes i b)-uppgiften, och på samma sätt kan vi skriva

$$\sin^6 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^6 =$$

$$= -\frac{1}{64}\left(e^{i6x} - 6e^{i4x} + 15e^{i2x} - 20 + 15e^{-i2x} - 6e^{-i4x} + e^{-i6x}\right) =$$

$$= -\frac{1}{32}\left(\frac{e^{i6x} + e^{-i6x}}{2} - 6\frac{e^{i4x} + e^{-i4x}}{2} + 15\frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{2}\right) + \frac{20}{64} =$$

$$= -\frac{1}{32}\cos 6x + \frac{6}{32}\cos 4x - \frac{15}{32}\cos 2x + \frac{5}{16} \implies$$

$$\implies \int \sin^6 x \; dx = \int \left(-\frac{1}{32}\cos 6x + \frac{3}{16}\cos 4x - \frac{15}{32}\cos 2x + \frac{5}{16}\right) \; dx =$$

$$= -\frac{1}{192}\sin 6x + \frac{3}{64}\sin 4x - \frac{15}{64}\sin 2x + \frac{5}{16}x + C \implies$$

$$\implies \int \sin^4 x \cos^2 x \; dx = \int \left(\sin^4 x - \sin^6 x\right) \; dx =$$

$$= \frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x - \left(-\frac{1}{192}\sin 6x + \frac{3}{64}\sin 4x - \frac{15}{64}\sin 2x + \frac{5}{16}x\right) + C =$$

$$= \frac{1}{192}\sin 6x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{64}\sin 2x + \frac{1}{16}x + C.$$

f)

Eftersom $\sin 3x = \mathrm{Im}(e^{i3x})$, så kan vi skriva om integranden:

$$\int e^{2x}\sin 3x \; dx = \mathrm{Im}\left(\int e^{(2+3i)x} \; dx\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{2+3i}e^{(2+3i)x}\right) + C =$$

$$= \mathrm{Im}\left(\frac{2-3i}{2^2+3^2}e^{(2+3i)x}\right) + C = \mathrm{Im}\left(\frac{2-3i}{13}e^{(2+3i)x}\right) + C =$$

$$= \frac{e^{2x}}{13}\mathrm{Im}\left((2-3i)(\cos 3x + i\sin 3x)\right) + C =$$

$$= \frac{e^{2x}}{13}\mathrm{Im}\left((2\cos 3x + 2i\sin 3x - 3i\cos 3x + 3\sin 3x)\right) + C =$$

$$= \frac{e^{2x}}{13}(2\sin 3x - 3\cos 3x) + C.$$

12.36

$$t = \sqrt{x+1} \implies x = t^2 - 1 \implies dx = 2tdt \implies$$

$$\implies \int \frac{1+\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}\, dx = \int \frac{1+t}{1-t} 2t\, dt = \int \frac{2t+2t^2}{1-t}\, dt = [\text{polynomdivision}] =$$

$$= \int \left(-2t - 4 + \frac{4}{1-t}\right)\, dt = -t^2 - 4t - 4\ln|1-t| + \tilde{C} =$$

$$= -x - 1 - 4\sqrt{x+1} - 4\ln|1-\sqrt{x+1}| + \tilde{C} = [-1 + \tilde{C} = C] =$$

$$= -x - 4\sqrt{x+1} - 4\ln|\sqrt{x+1} - 1| + C.$$

12.37

$$t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \implies dt = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} \frac{1\cdot(x+1) - (x-1)\cdot 1}{(x+1)^2} dx = \frac{dx}{t(x+1)^2} \implies$$

$$\implies tdt = \frac{dx}{(x+1)^2} \implies$$

$$\implies \int \frac{3}{(x+1)^2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\, dx = \int 3t\cdot t\, dt = t^3 + C = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{3/2} + C.$$

12.38

a)

Gör själv.

b)

$$t - x = \sqrt{x^2+1} \implies t^2 - 2tx + x^2 = x^2 + 1 \implies 2tx = t^2 - 1 \implies x = \frac{t^2-1}{2t}. \quad \square$$

c)

$$t = x + \sqrt{x^2+1} \implies dt = \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) dx = \left(1 + \frac{x}{t-x}\right) dx =$$

$$= \frac{t-x+x}{t-x} dx = \frac{t}{t-x} dx \implies dx = \frac{t-x}{t} dt \implies$$

$$\implies \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\, dx = \int \frac{1}{t-x}\frac{t-x}{t}\, dt = \int \frac{1}{t}\, dt = \ln|t| + C = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C,$$

parentes eftersom $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.

12.39

Lösning finns redan.

12.40

a)

$$x^2+4x+5=(x+2)^2+1 \implies t=x+2+\sqrt{(x+2)^2+1}>0 \implies$$
$$\implies dt=\left(1+\frac{x+2}{\sqrt{(x+2)^2+1}}\right)dx=\frac{t-x-2+x+2}{t-x-2}dx=\frac{t}{t-x-2}dx \implies$$
$$\implies dx=\frac{t-x-2}{t}dt$$
$$\implies \int\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+5}}\,dx=\int\frac{1}{t-x-2}\frac{t-x-2}{t}\,dt=\int\frac{1}{t}\,dt=$$
$$=\ln|t|+C=\ln(x+2+\sqrt{x^2+4x+5})+C.$$

Om man vill kan man först göra variabelbytet $t=x+2$ och sedan göra variabelbytet $s=t+\sqrt{t^2+1}$, istället för att göra båda variabelbytena samtidigt.

b)

Om man vill göra det svårt för sig, kan man använda variabelbytet i 12.38, vilket ger att

$$\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx=\int\frac{\frac{t^2-1}{2t}}{t-x}\frac{t-x}{t}\,dt=\int\frac{t^2-1}{2t^2}\,dt=\int\left(1-\frac{1}{2t^2}\right)\,dt=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2t}+C=$$
$$=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)+C,$$

och

$$\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2-(x^2+1)}=-x+\sqrt{x^2+1} \implies$$
$$\implies \frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)+C=$$
$$=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+1}-x+\sqrt{x^2+1}\right)+C=\sqrt{x^2+1}+C.$$

Om man vill göra det enklare för sig kan man använda variabelbytet $t=x^2+1$, varpå man får integralen

$$\int\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt,$$

som kräver betydligt mindre arbete.

c)

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+4x+5}}=\frac{x+2-1}{\sqrt{(x+2)^2+1}}=\frac{x+2}{\sqrt{(x+2)^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{(x+2)^2+1}} \implies$$
$$\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2+4x+5}}\,dx=\int\left(\frac{x+2}{\sqrt{(x+2)^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{(x+2)^2+1}}\right)\,dx=$$
$$=\sqrt{(x+2)^2+1}-\ln(x+2+\sqrt{(x+2)^2+1})+C=$$
$$=\sqrt{x^2+4x+5}-\ln(x+2+\sqrt{x^2+4x+5})+C.$$

Se kommentaren i slutet av b)-uppgiften och a)-uppgiften för att se hur integralerna beräknades direkt.

12.41

a)

Man kan antingen använda variabelbytet i 12.38, eller partialintegration. Partialintegration ger att

$$I = \int 1 \cdot \sqrt{x^2+1}\, dx = x\sqrt{x^2+1} - \int x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\, dx = x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}}\, dx =$$

$$= x\sqrt{x^2+1} - \int \left(\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) dx = x\sqrt{x^2+1} - I + \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\, dx \implies$$

$$\implies 2I = x\sqrt{x^2+1} + \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + 2C \implies$$

$$\implies I = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C.$$

Man kan också använda en trigonometrisk substitution, $x = \tan t$ (eftersom $\tan^2 t + 1 = \sec^2 t$), eller även en hyperbolisk substitution, $x = \sinh t$ ($\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \implies \sinh^2 t + 1 = \cosh^2 t$).

b)

$$x = \sin t \implies dx = \cos t\, dt$$

vi antar även att $\sin x,\ \cos x > 0$, vilket betyder att $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t \implies$

$$\implies \int \sqrt{1-x^2}\, dx = \int \cos t \cos t\, dt = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C,$$

$$\sin 2t = 2\sin t \cos t = 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} \implies$$

$$\implies \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C.$$

c)

$$x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 = 2\left((\frac{x+1}{\sqrt{2}})^2 + 1\right),$$

vilket betyder att, med varibelbytet $t = \frac{x+1}{\sqrt{2}} \implies dx = \sqrt{2}dt$ kommer problemet att övergå till det i a) (möjligtvis en konstant gånger det i a)).

$$\int \sqrt{x^2+2x+3}\, dx = \int \sqrt{2\left(\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1\right)}\, dx = \sqrt{2}\int \sqrt{t^2+1}\sqrt{2}\, dt =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2}t\sqrt{t^2+1} + 2 \cdot \frac{1}{2}\ln(t + \sqrt{t^2+1}) + \tilde{C} =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2}\frac{x+1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} + \ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}\right) + \tilde{C} =$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x+3} + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right)\right) + \tilde{C} =$$
$$= \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x+3} + \ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right) + \ln\frac{1}{\sqrt{2}} + \tilde{C} =$$
$$= \left[\ln\frac{1}{\sqrt{2}} + \tilde{C} = C\right] =$$
$$= \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x+3} + \ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right) + C.$$

12.42

Partialbråksuppdelning:

$$\frac{2x^2+6}{(x-1)^2(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+5} \implies$$
$$\implies 2x^2+6 = A(x-1)(x^2+2x+5) + B(x^2+2x+5) + (Cx+D)(x^2-2x+1) =$$
$$= A(x^3+x^2+3x-5) + B(x^2+2x+5) + C(x^3-2x^2+x) + D(x^2-2x+1) =$$
$$= (A+C)x^3 + (A+B-2C+D)x^2 + (3A+2B+C-2D)x + (-5A+5B+D)\cdot 1 \implies$$
$$\implies \begin{cases} -5A+5B+D &= 6, \\ 3A+2B+C-2D &= 0, \\ A+B-2C+D &= 2, \\ A+C &= 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A=0, \\ B=1, \\ C=0, \\ D=1 \end{cases} \implies$$
$$\implies f(x) = \int \frac{2x^2+6}{(x-1)^2(x^2+2x+5)}\,dx = \int\left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2+2x+5}\right)dx =$$
$$= \int\left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2+4}\right)dx = \int\left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1/4}{(\frac{x+1}{2})^2+1}\right)dx =$$
$$= -\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2} + C,$$

och

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -0 + \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} + C = 0 \implies C = -\frac{\pi}{4} \implies$$
$$\implies f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

12.43

$$\frac{\sqrt{x^2+2}-x}{\sqrt{x^2+2}+x} = \frac{(\sqrt{x^2+2}-x)^2}{(\sqrt{x^2+2}+x)(\sqrt{x^2+2}-x)} =$$
$$= \frac{x^2+2-2x\sqrt{x^2+2}+x^2}{x^2+2-x^2} = x^2+1-x\sqrt{x^2+2} \implies$$
$$\implies \int \frac{\sqrt{x^2+2}-x}{\sqrt{x^2+2}+x}\,dx = \int\left(x^2+1-x\sqrt{x^2+2}\right)dx =$$
$$= \frac{x^3}{3} + x - \frac{1}{2}\frac{2}{3}(x^2+2)^{3/2} + C = \frac{x^3}{3} + x - \frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2} + C.$$

Om man vill kan göra variabelbytet $t = x^2+2$ på rottermen för att lättare se vad den primitiva funktionen är.

12.44

$x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$, vilket ger partialbråksuppdelningen

$$\frac{2x^2-4x+34}{(x^2+2x+5)(x^2+2x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+5}\implies$$

$$\implies 2x^2-4x+34=A(x+3)(x^2+2x+5)+B(x-1)(x^2+2x+5)+(Cx+D)(x^2+2x-3)=$$
$$=A(x^3+5x^2+11x+15)+B(x^3+x^2+3x-5)+C(x^3+2x^2-3x)+D(x^2+2x-3)=$$
$$=(A+B+C)x^3+(5A+B+2C+D)x^2+(11A+3B-3C+2D)x+(15A-5B-3D)\cdot 1\implies$$

$$\implies\begin{cases}15A-5B-3D &=34,\\ 11A+3B-3C+2D &=-4,\\ 5A+B+2C+D &=2,\\ A+B+C &=0\end{cases}\implies\begin{cases}A=1,\\ B=-2,\\ C=1,\\ D=-3\end{cases}\implies$$

$$\implies\int f(x)\,dx=\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+3}+\frac{x-3}{x^2+2x+5}\right)\,dx=$$
$$=\left[\frac{x-3}{x^2+2x+5}=\frac{x+1-4}{x^2+2x+5}=\frac{x+1}{x^2+2x+5}-\frac{4}{(x+1)^2+4}=\right.$$
$$\left.=\frac{2x+2}{2(x^2+2x+5)}-\frac{1}{(\frac{x+1}{2})^2+1}\right]=$$
$$=\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+3}+\frac{2x+2}{2(x^2+2x+5)}-\frac{1}{(\frac{x+1}{2})^2+1}\right)\,dx=$$
$$=\ln|x-1|-2\ln|x+3|+\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5)-2\arctan\frac{x+1}{2}.$$

12.45

Funktionen blir rationell om faktorn $x-1$ försvinner, eftersom då kommer man inte få någon term av grad -1 vid partialbråksuppdelning. Om man inte har någon sådan term kommer den primitiva funktionen inte innehålla några logaritmer, utan bara rationella uttryck. Alltså vill vi välja a och b så att

$$ax+b=c(x-1)=cx-c\implies\begin{cases}a=c,\\ b=-c\end{cases}\implies a=-b.$$

12.46

Variabelbytet $t=\tan\frac{x}{2}\implies\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ och $dx=\frac{2}{1+t^2}$ (se uppgift 12.32), vilket ger oss integralen

$$\int\frac{3}{4+5\cos x}\,dx=\int\frac{3}{4+5\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\,dt=\int\frac{6}{4+4t^2+5-5t^2}\,dt=\int\frac{6}{9-t^2}\,dt,$$

och

$$\frac{6}{9-t^2}=\frac{A}{3-t}+\frac{B}{3+t}\implies 6=3(A+B)+(A-B)t\implies$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} A+B=2, \\ A-B=0 \end{cases} \Longrightarrow A=B=1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \int \frac{6}{9-t^2}\,dt = \int \left(\frac{1}{3-t}+\frac{1}{3+t}\right)\,dt = -\ln|3-t|+\ln|3+t|+C =$$

$$= \ln\left|\frac{3+t}{3-t}\right| + C = \ln\left|\frac{3+\tan\frac{x}{2}}{3-\tan\frac{x}{2}}\right| + C.$$

12.47

Partialintegration, där vi integrerar 1 och deriverar $\arcsin x$, ger att

$$\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{bmatrix} t=1-x^2 \\ dt=-2xdx \Longrightarrow xdx=-dt/2 \end{bmatrix} =$$

$$= x\arcsin x + \int \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = x\arcsin x + \sqrt{t} + C = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

12.48

Partialbråksuppdelning:

$$\frac{3x^2-x+2}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 3x^2-x+2 = A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1) = (A+B)x^2+(-B+C)x+(A-C)\cdot 1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} A-C=2, \\ -B+C=-1, \\ A+B=3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A=2, \\ B=1, \\ C=0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \int \frac{3x^2-x+2}{(x^2+1)(x-1)}\,dx = \int \left(\frac{2}{x-1}+\frac{x}{x^2+1}\right)\,dx = 2\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1).$$

12.49

Polynomdivision ger att

$$\frac{2x^5+x^4}{x^4-1} = 2x+1+\frac{2x+1}{x^4-1},$$

och $x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1) \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \frac{2x+1}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2x+1 = A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1) =$$

$$= A(x^3+x^2+x+1)+B(x^3-x^2+x-1)+C(x^3-x)+D(x^2-1) =$$

$$= (A+B+C)x^3+(A-B+D)x^2+(A+B-C)x+(A-B-D)\cdot 1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} A-B-D &= 1, \\ A+B-C &= 2, \\ A-B+D &= 0, \\ A+B+C &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = 3/4, \\ B = 1/4, \\ C = -1, \\ D = -1/2 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \int \frac{2x^5+x^4}{x^4-1}\,dx = \int \left(2x+1+\frac{3/4}{x-1}+\frac{1/4}{x+1}+\frac{-x-1/2}{x^2+1}\right)\,dx =$$

$$= x^2+x+\frac{3}{4}\ln|x-1|+\frac{1}{4}\ln|x+1| - \int\left(\frac{x}{x^2+1}+\frac{1/2}{x^2+1}\right)\,dx =$$

$$= x^2+x+\frac{3}{4}\ln|x-1|+\frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\arctan x.$$

12.50

a)

Samma princip som i 12.47 ger att

$$\int \arctan x\,dx = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$$

b)

Variabelbytet $x = 3\sin t \implies dx = 3\cos t\,dt$ (vi antar också att $\sin t,\ \cos t > 0$) ger att

$$\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \int \frac{3\cos t}{\sqrt{9-9\sin^2 t}}\,dt = \int \frac{\cos t}{\sqrt{\cos^2 t}}\,dt = t + C = \arcsin\frac{x}{3}+C.$$

12.51

a)

$$\int e^x \sin e^x\,dx = \begin{bmatrix} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{bmatrix} = \int \sin t\,dt = -\cos t + C = -\cos e^x + C.$$

b)

Partialintegration:

$$\int x(x+1)^9\,dx = \frac{1}{10}x(x+1)^{10} - \frac{1}{10}\int 1\cdot(x+1)^{10}\,dx = \frac{1}{10}x(x+1)^{10} - \frac{1}{110}(x+1)^{11} + C.$$

c)

Partialintegration:

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx = x\tan x - \int 1\cdot\tan x\,dx = [12.9\text{ h})] = x\tan x + \ln|\cos x| + C.$$

d)

$$\frac{1-\tan x}{1+\tan x} = \frac{1-\frac{\sin x}{\cos x}}{1+\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = \frac{(\sin x + \cos x)'}{\cos x + \sin x} \implies$$

$$\implies \int \frac{1-\tan x}{1+\tan x}\, dx = \ln|\cos x + \sin x| + C.$$

e)

$$\int \frac{1}{\sin x}\, dx = \begin{bmatrix} t = \tan\frac{x}{2} \\ dx = 2dt/(1+t^2) \\ \sin x = 2t/(1+t^2) \end{bmatrix} = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2}\, dt =$$

$$= \int \frac{1}{t}\, dt = \ln|t| + C = \ln|\tan\frac{x}{2}| + C.$$

f)

Eulersubstitutionen, $t - x = \sqrt{x^2+1}$ ger att

$$x = \frac{t^2-1}{2t} = \frac{t}{2} - \frac{1}{2t} \implies dx = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2t^2}\right) dt = \frac{t^2+1}{2t^2} dt,$$

och

$$\sqrt{x^2+1} = t - x = t - \frac{t^2-1}{2t} = \frac{2t^2 - t^2 + 1}{2t} = \frac{t^2+1}{2t} \implies$$

$$\frac{1}{1+\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{1}{1+\frac{t^2+1}{2t}} \frac{t^2+1}{2t^2} dt = \frac{t^2+1}{2t^2+t^3+t} dt = \frac{t^2+1}{t(t^2+2t+1} dt = \frac{t^2+1}{t(t+1)^2} dt.$$

Partialbråksuppdelning ger att

$$\frac{t^2+1}{t(t+1)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{(t+1)^2} \implies$$

$$\implies t^2+1 = A(t^2+2t+1) + B(t^2+t) + Ct = (A+B)t^2 + (2A+B+C)t + A\cdot 1 \implies$$

$$\implies \begin{cases} A & = 1, \\ 2A+B+C & = 0, \\ A+B & = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} A = 1, \\ B = 0, \\ C = -2 \end{cases} \implies$$

$$\implies \int \frac{1}{1+\sqrt{x^2+1}}\, dx = \int \frac{t^2+1}{t(t+1)^2}\, dt = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{(t+1)^2}\right) dt =$$

$$= \ln|t| + \frac{2}{t+1} + C = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + \frac{2}{x+1+\sqrt{x^2+1}} + C.$$

Kapitel 13

13.1

Inses lätt.

13.2

Inses lätt.

13.3

$$e^{-x^2} \leq e^{-0^2} = 1 \implies \int_0^3 (1 + e^{-x^2})\ dx \leq \int_0^3 (1+1)\ dx = 6. \quad \square$$

13.4

$(\arcsin x)^2 \geq 0$ på det angivna integrationsintervallet (och på hela sin definitionsmängd), men svaret är negativt, vilket är orimligt.

13.5

Lösning finns redan.

13.6

Intervalllängderna av partitionen är $\Delta\xi = \frac{1}{n}$, och vi ska välja den övre ändpunkten i varje delintervall som vårt ξ_k - alltså är $\xi_k = \frac{k}{n}$ - där $k = 1, 2, 3, ..., n$ (då får vi att $\xi_n = 1$ (vilket vi önskar)). Detta ger Riemannsumman

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta\xi = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \ln(1+\xi_k)\Delta\xi = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \ln(1+\frac{k}{n}) \cdot \frac{1}{n},$$

och vid en gränsövergång ($n \to \infty$) övergår summan i integralen

$$\int_0^1 f(x)\ dx = \int_0^1 x \ln(1+x)\ dx = [\text{partialintegration}] =$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 \ln(1+x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{1+x}\ dx =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\ln 2 - 0\right) - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x(1+x) - (1+x) + 1}{1+x}\ dx =$$

$$= 2\ln 2 - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{1+x}\right)\ dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2 - x + \ln|1+x|\right]_0^1 =$$
$$= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 - 0 = \frac{1}{4}.$$

13.7

Lösning finns redan.

13.8

Räta linjens ekvation ett antal gånger ger att

$$f(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \le t \le 1, \\ 3-t, & 1 \le t \le 5, \\ -2, & 5 \le t \le 6 \end{cases} \implies S(x) = \begin{cases} x^2 + C_1, & 0 \le x \le 1, \\ 3x - \frac{1}{2}x^2 + C_2, & 1 \le x \le 5, \\ -2x + C_3, & 5 \le x \le 6. \end{cases}$$

$$S(0) = 0 \implies C_1 = 0,$$
$$S(1) = 1 \implies 3 - \frac{1}{2} + C_2 = 1 \implies C_2 = -\frac{3}{2},$$
$$S(5) = 1 \implies -10 + C_3 = 1 \implies C_3 = 11.$$

Med detta har vi funktionen

$$S(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1, \\ 3x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}, & 1 \le x \le 5, \\ 11 - 2x, & 5 \le x \le 6. \end{cases}$$

13.9

Integralen räknar arean under grafen - med tecken. Alltså vill vi ha hela det positiva bidraget, och inget av det negativa. Därför väljer vi $x = 3$, där funktionen går från att vara positiv till att vara negativ.

13.10

Vi använder analysens huvudsats för att hitta derivatans nollställen.

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^x e^{-t^2}\sin t\, dt\right) = e^{-x^2}\sin x = 0 \implies x = k\pi,\ k = 0, 1, 2.$$

Man kontrollerar snabbt att $k = 1$ motsvarar ett maximum (eftersom då får man med hela intervallet där $\sin t$ är positiv). Alltså är $x = \pi$.

13.11

Lösning finns redan.

13.12

Analysens huvudsats säger att

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^{g(x)} f(t)\ dt\right) = f(g(x))g'(x).$$

a)

$$\frac{d}{dx}\left(\int_1^{\arcsin x} \frac{\sin t}{t}\ dt\right) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\arcsin x}(\arcsin x)' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}.$$

b)

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{1/2}^{\ln x} \frac{e^{2t}}{t}\ dt\right) = \frac{e^{2\ln x}}{\ln x}(\ln x)' = \frac{e^{\ln x^2}}{x\ln x} = \frac{x}{\ln x}.$$

c)

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{\cos x}^{1} \sqrt{1-t^2}\ dt\right) = \frac{d}{dx}\left(-\int_1^{\cos x} \sqrt{1-t^2}\ dt\right) = -\sqrt{1-\cos^2 x}(\cos x)' = \sin^2 x.$$

d)

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{\cos x}^{\sin x} \sqrt{1-t^2}\ dt\right) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^{\sin x} \sqrt{1-t^2}\ dt + \int_{\cos x}^{0} \sqrt{1-t^2}\ dt\right) =$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\int_0^{\sin x} \sqrt{1-t^2}\ dt - \int_0^{\cos x} \sqrt{1-t^2}\ dt\right) =$$

$$= \sqrt{1-\sin^2 x}(\sin x)' - \sqrt{1-\cos^2 x}(\cos x)' = \cos x\sqrt{\cos^2 x} + \sin x\sqrt{\sin^2 x} =$$

$$= \left[\sqrt{\cos^2 x} = |\cos x| = \cos x \text{ och } \sqrt{\sin^2 x} = |\sin x| = \sin x,\ \text{då } 0 < x < \frac{\pi}{2}\right] =$$

$$= \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

13.13

Låt

$$f(x) = 1 - x + \int_1^x \frac{\sin t}{t}\ dt \implies f'(x) = -1 + \frac{\sin x}{x} \le -1 + \frac{1}{x} < 0,$$

då $x > 1$. Alltså är funktionen strängt avtagande när $x > 1$, och $f(1) = 1-1+\int_1^1 \frac{\sin t}{t}\ dt = 0$. Ur detta följer olikheten. $\square$

13.14

Jag börjar med att bestämma en primitiv funktion. Partialbråksuppdelning av integranden:

$$\frac{x+1}{x^2+5x+6} = \frac{x+1}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} \implies$$

$$\implies x+1 = A(x+3) + B(x+2) = (A+B)x + (3A+2B)\cdot 1 \implies$$

$$\implies \begin{cases} 3A+2B = 1, \\ A+B = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} A = -1, \\ B = 2 \end{cases} \implies$$

$$\implies \int \frac{x+1}{x^2+5x+6}\,dx = \int \left(-\frac{1}{x+2} + \frac{2}{x+3}\right)\,dx = -\ln|x+2| + 2\ln|x+3| \implies$$

$$\implies \int_0^1 \frac{x+1}{x^2+5x+6}\,dx = [-\ln|x+2| + 2\ln|x+3|]_0^1 =$$

$$= (-\ln|1+2| + 2\ln|1+3|) - (-\ln|0+2| + 2\ln|0+3|) = 5\ln 2 - 3\ln 3 = \ln\frac{32}{27}.$$

13.15

a)

Lösning finns redan.

b)

Med $t = e^x \implies dt = e^x dx$ och $x:\ 0 \to 1 \implies t:\ 1 \to e$ får man att

$$\int_0^1 e^x \ln(1+e^x)\,dx = \int_1^e \ln(1+t)\,dt = [12.17\text{ f})] = [(1+x)\ln(1+x) - x]_1^e =$$

$$= (1+e)\ln(1+e) - e - 2\ln 2 + 1.$$

c)

$$\int_1^e (\ln x)^2\,dx = [12.17\text{ g})] = \left[x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x\right]_1^e =$$

$$= e\cdot 1^2 - 2e\cdot 1 + 2e - 0 + 0 - 2 = e - 2.$$

d)

$$\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx = [12.51\text{ c})] = [x\tan x + \ln|\cos x|]_0^{\pi/4} =$$

$$= \frac{\pi}{4}\cdot 1 + \ln\frac{1}{\sqrt{2}} - 0 - \ln 1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

13.16

a)

Lösning finns redan.

b)

$$\frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{2e^x}{(e^x)^2 + 1} = (2\arctan e^x)' \implies$$

$$\implies \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\cosh x} = [2\arctan e^x]_{-1}^{1} = 2\arctan e - 2\arctan e^{-1}.$$

c)

Jag börjar med att bestämma en primitiv funktion. För att göra det, gör jag först variabelbytet $t = x^{1/3} \implies x = t^3 \implies dx = 3t^2 dt$. Sedan används partialintegration för att beräkna integralen som uppstår.

$$\int \cos x^{1/3}\ dx = \int 3t^2 \cos t\ dt = 3t^2 \sin t - \int 6t \sin t\ dt =$$

$$= 3t^2 \sin t + 6t \cos t - \int 6 \cdot 1 \cdot \cos t\ dt = 3t^2 \sin t + 6t \cos t - 6 \sin t =$$

$$= (3t^2 - 6) \sin t + 6t \cos t \implies$$

$$\implies \int_0^1 \cos x^{1/3}\ dx = \Big[(3x^{2/3} - 6) \sin x^{1/3} + 6x^{1/3} \cos x^{1/3}\Big]_0^1 =$$

$$= (3 - 6) \sin 1 + 6 \cos 1 - 0 = 6 \cos 1 - 3 \sin 1.$$

d)

$$\int_0^{\pi/2} e^{\sin x} \sin 2x\ dx = 2 \int_0^{\pi/2} e^{\sin x} \sin x \cos x\ dx =$$

$$= \begin{bmatrix} t = \sin x \implies dt = \cos x\, dx \\ x:\ 0 \to \pi/2 \implies t:\ 0 \to 1 \end{bmatrix} = 2 \int_0^1 te^t\ dt = [\text{partialintegration}] =$$

$$= \big[2te^t\big]_0^1 - 2 \int_0^1 1 \cdot e^t\ dt = 2e - 0 - 2\left[e^t\right]_0^1 = 2e - 2(e - 1) = 2.$$

13.17

a)

Variabelbytet $t = \arcsin x \implies x = \sin x \implies dx = \cos t\, dt$, där $x:\ 0 \to 1/2 \implies t:\ 0 \to \pi/6$, omvandlar integralen enligt,

$$\int_0^{1/2} (\arcsin x)^2\ dx = \int_0^{\pi/6} t^2 \cos t\ dt.$$

Vi bestämmer nu en primitiv funktion till denna, med hjälp av partialintegration.

$$\int t^2 \cos t\ dt = t^2 \sin t - \int 2t \sin t\ dt = t^2 \sin t + 2t \cos t - \int 2 \cos t\ dt =$$

$$= t^2 \sin t + 2t \cos t - 2 \sin t = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t \implies$$

$$\implies \int_0^{\pi/6} t^2 \cos t\ dt = \big[(t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t\big]_0^{\pi/6} = ... = \frac{\pi^2}{72} - 1 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

b)

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-2x} + 2} = \int_0^1 \frac{e^x dx}{e^{2x} + e^{-x} + 2e^x} = \begin{bmatrix} t = e^x \implies dt = e^x dx \\ x: \ 0 \to 1 \implies t: \ 1 \to e \end{bmatrix} =$$

$$= \int_1^e \frac{dt}{t^2 + t^{-1} + 2t} = \int_1^e \frac{t}{t^3 + 2t^2 + 1} \, dt.$$

Vi bestämmer nu en primitiv funktion till denna integrand. Man kan enkelt kontrollera att $t = -1$ är en rot till nämnaren, varpå polynomdivision ger att $t^3 + 2t^2 + 1 = (t+1)(t^2+t-1) = (t+1)(t+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2})(t+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})$, detta motiverar partialbråksuppdelningen

$$\frac{t}{t^3 + 2t^2 + 1} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}} + \frac{C}{t + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}} \implies$$

$$\implies t = A(t^2 + t - 1) + B\left(t^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)t + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) +$$

$$+C\left(t^2 + \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)t + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) =$$

$$= (A + B + C)t^2 + \left(A + \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)B + \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)C\right)t +$$

$$+\left(-A + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)B + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)C\right) \cdot 1 \implies$$

$$\implies \begin{cases} -A + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)B + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)C & = 0, \\ A + \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)B + \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)C & = 1, \\ A + B + C & = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = 1, \\ B = \frac{-3\sqrt{5}-5}{10}, \\ C = \frac{3\sqrt{5}-5}{10} \end{cases} \implies$$

$$\implies \int \frac{t}{t^3 + 2t^2 + 1} \, dt = \int \left(\frac{1}{t+1} + \frac{\frac{-3\sqrt{5}-5}{10}}{t + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}} + \frac{\frac{3\sqrt{5}-5}{10}}{t + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}}\right) dt =$$

$$= \ln|t+1| - \frac{3\sqrt{5}+5}{10} \ln\left|t + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right| + \frac{3\sqrt{5}-5}{10} \ln\left|t + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right| =$$

$$= \ln|t+1| - \left(\frac{3\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2}\right) \ln\left|t + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right| + \left(\frac{3\sqrt{5}}{10} - \frac{1}{2}\right) \ln\left|t + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right| =$$

$$= \ln|t+1| + \frac{3\sqrt{5}}{10}\left(\ln\left|t + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right| - \ln\left|t + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right|\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\left(\ln\left|t + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right| + \ln\left|t + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right|\right) =$$

$$= \ln|t+1| + \frac{3\sqrt{5}}{10} \ln\left|\frac{t + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}}{t + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}\right| - \frac{1}{2} \ln\left|\left(t + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(t + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right| =$$

$$= \ln|t+1| + \frac{3}{2\sqrt{5}} \ln\left|\frac{2t+1-\sqrt{5}}{2t+1+\sqrt{5}}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|t^2+t-1\right|.$$

Alltså är

$$\int_1^e \frac{t}{t^3+2t^2+1}\,dt =$$

$$= \left[\ln|t+1| + \frac{3}{2\sqrt{5}} \ln\left|\frac{2t+1-\sqrt{5}}{2t+1+\sqrt{5}}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|t^2+t-1\right|\right]_1^e =$$

$$= \ln(e+1) + \frac{3}{2\sqrt{5}} \ln\frac{2e+1-\sqrt{5}}{2e+1+\sqrt{5}} - \frac{1}{2}\ln(e^2+e-1) - \ln 2 - \frac{3}{2\sqrt{5}}\ln\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}.$$

Kom ihåg att $\ln\frac{1}{x} = -\ln x$ (om man tycker att facit ser lite annorlunda ut).

c)

$$\frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} = \tan^3 x \frac{1}{\cos^2 x} = \tan^3 x(\tan x)'.$$

Alltså kommer integralen att förenklas betydligt med variabelbytet $t = \tan x \implies dt = dx/\cos^2 x$, där $x:\ 0 \to \pi/4 \implies t:\ 0 \to 1$.

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}\,dx = \int_0^1 t^3\,dt = \frac{1}{4}.$$

13.18

a)

Jag börjar med att bestämma en primitiv funktion. Partialintegration, där jag integrerar $x/(1+x^2)^2$ och deriverar $\ln x$, ger

$$\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx = -\frac{1}{2(1+x^2)}\cdot\ln x - \int -\frac{1}{2(1+x^2)}\cdot\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx.$$

För att beräkna den integral som återstår tillämpas partialbråksuppdelning:

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} \implies$$

$$\implies 1 = A(x^2+1) + Bx^2 + Cx = (A+B)x^2 + Cx + A\cdot 1 \implies$$

$$\implies \begin{cases} A = 1, \\ C = 0, \\ A+B = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = 1, \\ B = -1, \\ C = 0 \end{cases} \implies$$

$$\implies \int \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \implies$$

$$\implies -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int\frac{1}{x(1+x^2)}\,dx = -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{4}\ln(1+x^2),$$

vilket betyder att

$$\int_1^2 \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx = \left[-\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{4}\ln(1+x^2)\right]_1^2 =$$

$$= -\frac{1}{10}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4}\ln 5 + 0 - 0 + \frac{1}{4}\ln 2 = \frac{13}{20}\ln 2 - \frac{1}{4}\ln 5.$$

b)

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1-\tan x}{1+\tan x}\,dx = [12.51\text{ d)}] = [\ln|\sin x + \cos x|]_0^{\pi/4} =$$

$$= \ln\frac{2}{\sqrt{2}} - \ln(0+1) = \frac{1}{2}\ln 2.$$

c)

Integranden skriker efter variabelbytet $x = \sin t \implies t = \arcsin x$. Detta ger att $dx = \cos t\,dt$, och $x:\ 0 \to 1 \implies t:\ 0 \to \pi/2$, vilket betyder att $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = |\cos t| = \cos t$ på intervallet. Insättning i integralen ger

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\arcsin x\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin t\cos t\cdot t\cdot\cos t\,dt = \int_0^{\pi/2} t\sin t\cos^2 t\,dt.$$

Denna integral kan bestämmas med partialintegration, där vi noterar att en primitiv till $\sin t\cos^2 t$ är $-\frac{1}{3}\cos^3 t$. Vi får därför att

$$\int t\sin t\cos^2 t\,dt = -\frac{1}{3}t\cos^3 t - \int -\frac{1}{3}\cdot 1\cdot\cos^3 t\,dt = -\frac{1}{3}t\cos^3 t + \frac{1}{3}\int \cos t(1-\sin^2 t)\,dt =$$

$$= \begin{bmatrix} s = \sin t \\ ds = \cos t\,dt \end{bmatrix} = -\frac{1}{3}t\cos^3 t + \frac{1}{3}\int(1-s^2)\,ds = -\frac{1}{3}t\cos^3 t + \frac{1}{3}s - \frac{1}{9}s^3 =$$

$$= -\frac{1}{3}t\cos^3 t + \frac{1}{3}\sin t - \frac{1}{9}\sin^3 t.$$

Med detta får vi att

$$\int_0^{\pi/2} t\sin t\cos^2 t\,dt = \left[-\frac{1}{3}t\cos^3 t + \frac{1}{3}\sin t - \frac{1}{9}\sin^3 t\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= -0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} - 0 = \frac{2}{9}$$

13.19

a)

Lösning finns redan.

b)

$$|\sin x| = \begin{cases} \sin x, & 0 \le x \le \pi, \\ -\sin x, & \pi \le x \le 2\pi. \end{cases}$$

En primitiv till $e^{-x}\sin x$ fås med partialintegration (eller genom att skriva om på komplex form). Jag integrerar e^{-x} och deriverar $\sin x$.

$$I = \int e^{-x}\sin x\ dx = -e^{-x}\sin x - \int -e^{-x}\cos x\ dx =$$

$$= -e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\sin x\ dx = -e^{-x}(\sin x + \cos x) - I \implies$$

$$\implies I = -\frac{e^{-x}}{2}(\sin x + \cos x).$$

Med detta får vi att

$$\int_0^{2\pi} e^{-x}|\sin x|\ dx = \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\ dx - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x}|\sin x|\ dx =$$

$$= \left[-\frac{e^{-x}}{2}(\sin x + \cos x)\right]_0^{\pi} - \left[-\frac{e^{-x}}{2}(\sin x + \cos x)\right]_{\pi}^{2\pi} =$$

$$= -\frac{e^{-\pi}}{2}(0-1) - \left(-\frac{e^{0}}{2}(0+1)\right) + \frac{e^{-2\pi}}{2}(0+1) - \frac{e^{-\pi}}{2}(0-1) = \frac{1}{2}e^{-2\pi} + e^{-\pi} + \frac{1}{2}.$$

13.20

a)

Lösning finns redan.

b)

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\cos x}\ dx = \begin{bmatrix} t = \tan\frac{x}{2} \implies dt = \dfrac{2dt}{1+t^2} \\ x:\ 0 \to \dfrac{\pi}{2} \implies t:\ 0 \to 1 \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{bmatrix} = \int_0^1 \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\ dt =$$

$$= 2\int_0^1 \frac{1-t^2}{(1+t^2)(1+t^2+1-t^2)}\ dt = \int_0^1 \frac{1-t^2}{1+t^2}\ dt = \int_0^1 \frac{2-(1+t^2)}{1+t^2}\ dt =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{2}{1+t^2} - 1\right)\ dt = [2\arctan t - t]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

c)

$$t = \tan x \implies x = \arctan t \implies dx = \frac{dt}{1+t^2},\ x:\ 0 \to \pi/4 \implies t:\ 0 \to 1 \implies$$

$$\implies \int_0^{\pi/4} \left(\tan^3 x + \tan^4 x\right)\ dx = \int_0^1 \frac{t^3+t^4}{t^2+1}\ dt.$$

För att bestämma en primitiv till denna integrand utförs först polynomdivision, vilket ger att

$$\frac{t^3+t^4}{t^2+1} = t^2+t-1+\frac{-t+1}{t^2+1} = t^2+t-1-\frac{t}{t^2+1}+\frac{1}{t^2+1} \implies$$

$$\implies \int \frac{t^3+t^4}{t^2+1}\ dt = \int \left(t^2+t-1-\frac{t}{t^2+1}+\frac{1}{t^2+1}\right)\ dt =$$

$$= \frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2-t-\frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right)+\arctan t \implies$$

$$\implies \int_0^1 \frac{t^3+t^4}{t^2+1}\ dt = \left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2-t-\frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right)+\arctan t\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{6}.$$

13.21

a)

$$\frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+10}} = \frac{x+1+2}{\sqrt{x^2+2x+10}} = \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+10}}+\frac{2}{\sqrt{(x+1)^2+9}}.$$

Samma princip för som i 12.40 c) ger att en primitiv funktion till detta uttryck är

$$\sqrt{x^2+2x+10}+2\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+10}\right).$$

Integralens värde ges alltså av

$$\sqrt{3^2+2\cdot 3+10}+2\ln\left(3+1+\sqrt{3^2+2\cdot 3+10}\right)-$$

$$-\left(\sqrt{(-1)^2+2(-1)+10}+2\ln\left((-1)+1+\sqrt{(-1)^2+2(-1)+10}\right)\right) =$$

$$= \sqrt{25}+2\ln\left(4+\sqrt{25}\right)-\left(\sqrt{9}+2\ln\sqrt{9}\right) = 2+2\ln 9-2\ln 3 = 2+2\ln 3.$$

b)

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x\ dx}{\sqrt{\cos^2 x+2\cos x+3}}\ dx = [12.34\text{ a)}] =$$

$$= \left[-\ln\left(\cos x+1+\sqrt{\cos^2 x+2\cos x+3}\right)\right]_0^{\pi} =$$

$$= \ldots = \ln\left(2+\sqrt{6}\right)-\ln\sqrt{2} = \ln\frac{2+\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \ln\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right).$$

13.22

a)

Gör själv.

b)

Man ser direkt att svaret blir $\arctan X$.

c)

Gränsvärdet är $\pi/2$.

d)

Eftersom svaret i c)-uppgiften är mindre än oändligheten (ändligt), så är integralen konvergent.

13.23

Lösning finns redan.

13.24

Egentligen ska man skriva upp dessa integraler som integraler till ett visst tal, säg X eller ε, och sedan ta ett gränsvärde av det värde man får fram. Alltså på samma sätt som man gör i 13.22 och 13.25. Jag kommer dock att beräkna gränsvärdena direkt med ∞ i integralgränserna, eftersom det går mycket snabbare att skriva. Alltså ska man ha i åtanke att det egentligen är gränsvärden som beräknas och man bör vara mer rigorös om man beräknar generaliserade integraler på en tenta. Det svåra i uppgifterna är dock inte att skriva upp ett gränsvärde, vilket motiverar varför jag gör på detta vis. Man kan också tycka att om integralen är konvergent kommer man märka att ens svar är ändligt när man stoppar in gränserna, och om den är divergent kommer man också märka det, så ett gränsvärde kan tyckas vara överflödigt, men man bör förhålla sig till hur den som rättar ens tenta vill ha det.

a)

$$\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^\infty = \infty - 0 = \infty \implies \text{divergent.}$$

b)

Partialintegration

$$\int_0^\infty xe^{-x}\,dx = \left[-xe^{-x}\right]_0^\infty - \int_0^\infty -1\cdot e^{-x}\,dx = 0 + \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = -0-(-1) = 1.$$

Att den första utintegrerade biten blir 0 följer av att exponentiella funktioner växer snabbare än polynom. Denna integral är gammafunktionen utvärderad i $z = 2$.

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\ dt,$$

och för heltal $n \geq 0$ gäller det att $\Gamma(n+1) = n!$ - vi har alltså beräknat 1! på ett onödigt komplicerat sätt i denna deluppgift.

c)

Först kan vi konstatera att $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(2x-1)}{x} = 0$, eftersom polynom växer snabbare än logaritmer. För att beräkna integralen används partialintegration.

$$\int_1^\infty \frac{\ln(2x-1)}{x^2}\ dx = \left[-\frac{\ln(2x-1)}{x}\right]_1^\infty - \int_1^\infty -\frac{2}{x(2x-1)}\ dx =$$

$$= -0 - (-\ln 1) + \int_1^\infty \frac{2}{x(2x-1)}\ dx = \int_1^\infty \frac{2}{x(2x-1)}\ dx.$$

Partialbråksuppdelning

$$\frac{2}{x(2x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x-1} \implies$$

$$\implies 2 = A(2x-1) + Bx = (2A+B)x - A\cdot 1 \implies \begin{cases} A = -2, \\ B = 4 \end{cases} \implies$$

$$\int_1^\infty -\frac{2}{x(2x-1)}\ dx = \int_1^\infty \frac{2}{x(2x-1)}\ dx = \int_1^\infty \left(-\frac{2}{x} + \frac{4}{2x-1}\right)\ dx =$$

$$= [-2\ln|x| + 2\ln|2x-1|]_1^\infty = \left[2\ln\left|\frac{2x-1}{x}\right|\right]_1^\infty = 2\ln 2 - 2\ln 1 = 2\ln 2.$$

d)

Partialbråksuppdelning av integranden:

$$\frac{x}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \implies$$

$$\implies x = A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1) =$$

$$= A(x^3+x^2+x+1) + B(x^3-x^2+x-1) + C(x^3-x) + D(x^2-1) =$$

$$= (A+B+C)x^3 + (A-B+D)x^2 + (A+B-C)x + (A-B-D)\cdot 1 \implies$$

$$\implies \begin{cases} \underline{1}: \ A-B-D = 0, \\ \underline{x}: \ A+B-C = 1, \\ \underline{x}^2: \ A-B+D = 0, \\ \underline{x}^3: \ A+B+C = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = 1/4, \\ B = 1/4, \\ C = -1/2, \\ D = 0 \end{cases} \implies$$

$$\implies \int_2^\infty \frac{x}{x^4-1}\ dx = \int_2^\infty \left(\frac{1/4}{x-1} + \frac{1/4}{x+1} - \frac{x/2}{x^2+1}\right)\ dx =$$

$$= \left[\frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1)\right]_2^\infty = \left[\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|\right]_2^\infty =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln|1| - \ln\left|\frac{2^2-1}{2^2+1}\right|\right) = \frac{1}{4}\ln\frac{5}{3}.$$

13.25

a)

Gör själv.

b)

Man ser snabbt att integralen har värdet $2 - 2\sqrt{\varepsilon}$.

c)

2.

d)

Ja, eftersom svaret i c) $< \infty$.

13.26

Lösning finns redan.

13.27

a)

$$\int_0^1 \ln x \; dx = [x \ln x - x]_0^1 = \ln 1 - 1 - (0 - 0) = -1.$$

Den nedre gränsen ger ett standardgränsvärde som har värdet 0.

b)

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{x + 1 - (x - 1)}{2(x - 1)(x + 1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1}\right) \implies$$

$$\implies \int_1^2 \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}\int_1^2 \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln|x - 1| - \ln x + 1\right]_1^2 = \infty \implies \text{divergent.}$$

c)

Jag börjar först med att bestämma en primitiv funktion. Variabelbytet $t = \sqrt{x} \implies dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ ger integralen

$$\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \; dx = \int 2\arctan t \; dt = [12.50 \text{ a)}] = 2t\arctan t - \ln(1 + t^2) =$$

$$= 2\sqrt{x}\arctan\sqrt{x} - \ln(1 + x) \implies$$

$$\implies \int_0^1 \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \; dx = \left[2\sqrt{x}\arctan\sqrt{x} - \ln(1 + x)\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} - \ln 2.$$

d)

Detta är en standardintegral:

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \Big[\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\Big]_1^2 = \ln\left(2+\sqrt{3}\right).$$

13.28

Lösning finns redan.

13.29

a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

b)

Om vi tittar på 13.27 b) kan vi göra följande observation:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2-1} \geq \int_1^2 \frac{dx}{x^2-1},$$

och den mindre integralen var divergent, alltså blir även denna divergent.

c)

Om man jämför med, exempelvis, 12.50 b), ser man att en primitiv funktion är $\frac{1}{2}\arcsin 2x$, alltså blir

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \left[\frac{1}{2}\arcsin 2x\right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}.$$

d)

Notera att

$$x(1-x) = x - x^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + x - x^2 = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2,$$

vilket betyder att

$$\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}.$$

Detta motiverar variabelbytet $t = 2x-1 \implies x = \frac{t+1}{2} \implies dx = \frac{dt}{2}$, och $x:\ 0 \to 1 \implies t:\ -1 \to 1$. Med detta blir

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_{-1}^1 \frac{2}{\sqrt{1-t^2}}\,\frac{dt}{2} = \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = [\arcsin t]_{-1}^1 = \pi.$$

13.30

a)

Lösning finns redan.

b)

Lösning finns redan.

c)

Lösning finns redan.

d)

Integralen

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x}$$

divergerar. Vi tittar därför på gränsvärdet

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x+\ln x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\ln x/x}{1} = 1.$$

Eftersom gränsvärdet är ändligt divergerar integralen enligt sats. (Om vi hade haft $1/x$ i nämnaren och gränsvärdet hade blivit 0 hade vi inte kunnat uttala oss om huruvida integralen konvergerar eller inte.)

13.31

Jag kommer lite halvslarvigt prata om vilken grad nämnarna har, även om det inte handlar om polynom, men det är ett bra tankesätt för man kan då jämföra det snabbt med den harmoniska integralen/funktionen $1/x$, och snabbt säga om den konvergerar eller divergerar. När man sedan har handviftat sig fram till ett svar kan man försöka ta sig dit lite mer rigoröst.

a)

Nämnaren har typ grad 3/2, vilket får oss att tro att den konvergerar på det givna integrationsintervallet.

$$\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\,dx \le \int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx = \left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_2^\infty = 2(-0-(-1/\sqrt{2})) = \sqrt{2} < \infty,$$

vilket betyder att integralen konvergerar enligt sats.

b)

Här växer nämnaren asymptotiskt som $\sqrt{x}$, vilket är långsammare än x, och alltså avtar funktionen långsammare än $1/x$, vilket får oss att tro att integralen divergerar. Vi jämför

med en mindre integrand, $1/\sqrt{x}$, och ser vad som sker.

$$\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx \geq \int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = [2\sqrt{x}]_2^\infty = \infty.$$

Detta bekräftar våra misstankar, och vi kan säga, enligt sats, att integralen divergerar.

c)

Denna har asymptotiskt samma grad som a)-uppgiften, men minustecknet gör att vi inte kan jämföra den med samma funktion som i a) direkt. Därför tittar vi på gränsvärdet av kvoten mellan funktionerna istället.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x^3-1}}}{\frac{1}{\sqrt{x^3}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1-1/x^3}} = 1,$$

vilket betyder att integralen konvergerar enligt sats.

d)

Notera att vi har ett annat integrationsintervall, och på detta intervallet, som inkluderar 0, är det istället funktioner som har en nämnare vars term med lägst grad har en grad, som är större än 1, som kommer divergera. För denna uppgift kommer funktionen bete sig som $1/\sqrt{x}$, vilket har en grad som är mindre än 1 i nämnaren, så vi tror att den konvergerar. På intervallet mellan 0 och 1 är

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+x^5}}\,dx \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = [2\sqrt{x}]_0^1 = 2 < \infty,$$

vilket betyder att integralen konvergerar, enligt sats.

e)

Om man kommer ihåg hur man integrerar (specifikt uppgift 12.51 e)), vet man att

$$\int_0^1 \frac{1}{\sin x}\,dx = \left[\ln|\tan\frac{x}{2}|\right]_0^1 = \infty,$$

vilket gör det ganska tydligt att integralen divergerar. Dock är uppgiftens syfte att man ska använda någon jämförelsesats. På intervallet 0 till 1 är $\sin x \leq x \implies \frac{1}{\sin x} \geq \frac{1}{x}$. Alltså är integralen

$$\int_0^1 \frac{1}{\sin x}\,dx \geq \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \infty,$$

vilket, enligt sats, visar att integralen divergerar.

f)

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(e^x+1)} = \begin{bmatrix} t=\sqrt{x} \implies x=t^2 \\ dt = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}} \implies 2dt = \dfrac{dx}{\sqrt{x}} \\ x:\ 0\to\infty \implies t:\ 0\to\infty \end{bmatrix} = \int_0^\infty \frac{2dt}{e^{t^2}+1} \leq$$

$$\leq \int_0^\infty \frac{2dt}{e^{t^2}} = \sqrt{\pi} < \infty.$$

Den sista likheten kan enkelt visas med flerdimensionell analys, men om man motsätter sig sådant i endimensionell analys kan man säga att $2e^{-t^2} \leq 2e^{-t}$, och sedan beräkna den integralen. Vi har iallafall visat att integralen är konvergent.

13.32

a)

Lösning finns redan.

b)

$$\frac{x}{x^3 + \ln x} \leq \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2},$$

på det angivna integrationsintervallet ($\ln x > 0$, då $x > 0$). Detta betyder att

$$\int_1^\infty \frac{x}{x^3 + \ln x}\, dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx = 1. \quad \square$$

13.33

Funktionen $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ är positiv och avtagande då $x \geq 1$, vilket betyder att följande olikhet gäller:

$$f(n) + \int_1^n f(x)\, dx \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(x)\, dx.$$

I det aktuella problemet är $n = 400$, vilket ger att

$$\int_1^n f(x)\, dx = \int_1^{400} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = [2\sqrt{x}]_1^{400} = 2\sqrt{400} - 2\sqrt{1} = 38.$$

Vidare är $f(1) = 1$ och $f(400) = \frac{1}{20}$. Alltså har vi att

$$35 \leq \frac{1}{20} + 38 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 1 + 38 \leq 40. \quad \square$$

13.34

Lösning finns redan.

13.35

Vi tittar på när funktionen $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ är avtagande, kvotregeln ger:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}.$$

Derivatan är alltså negativ då $x > \sqrt{e}$, och $\sqrt{e} < \sqrt{4} = 2$. För att kunna använda integraluppskattningen måste funktionen vara positiv och avtagande på hela intervallet, men då $x = 1$ är funktionen växande, alltså måste vi manuellt ta ut den första termen. Det gäller att

$$\sum_{k=2}^{\infty} f(k) \leq f(2) + \int_2^{\infty} f(x)\ dx = \frac{\ln 2}{4} + \int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\ dx.$$

För att beräkna integralen börjar jag med variabelbytet: $t = \ln x \implies dt = \frac{dx}{x}$, $x = e^t$, och $x:\ 2 \to \infty \implies t:\ \ln 2 \to \infty$. Alltså är

$$\int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\ dx = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{t}{e^t}\ dt = \int_{\ln 2}^{\infty} te^{-t}\ dt = [13.24\text{ b)}] = [-(t+1)e^{-t}]_{\ln 2}^{\infty} =$$

$$= -0 - (-(\ln 2 + 1)e^{-\ln 2}) = \frac{\ln 2 + 1}{2}.$$

Sammanställt har vi nu att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2} = \frac{\ln 1}{1^2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2} \leq 0 + \frac{\ln 2}{4} + \int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\ dx = \frac{\ln 2}{4} + \frac{\ln 2 + 1}{2} = \frac{2 + 3\ln 2}{4}. \quad \square$$

13.36

Funktionen $f(x) = \frac{1}{x^2+a}$ är positiv och avtagande för $x \geq 0$, och $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, vilket betyder att följande olikheter gäller:

$$f(n) + \int_0^n f(x)\ dx \leq \sum_{k=0}^{n} f(k) \leq f(0) + \int_0^n f(x)\ dx \iff [n \to \infty] \iff$$

$$\iff 0 + \int_0^{\infty} f(x)\ dx \leq \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \leq \frac{1}{a} + \int_0^{\infty} f(x)\ dx.$$

Vi behöver nu bara beräkna integralen för att visa uppskattningen.

$$\int_0^{\infty} f(x)\ dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + a}\ dx = \frac{1}{a}\int_0^{\infty} \frac{1}{(\frac{x}{\sqrt{a}})^2 + 1}\ dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\left[\arctan\frac{x}{\sqrt{a}}\right]_0^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{a}}.$$

Insättning ger direkt att

$$\frac{\pi}{2\sqrt{a}} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2 + a} \leq \frac{1}{a} + \frac{\pi}{2\sqrt{a}}. \quad \square$$

13.37

En trevlig sats säger att om $f(x)$ är positiv och avtagande på ett intervall, exempelvis $[0, \infty)$, gäller följande ekvivalens

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(k) \text{ konvergent} \iff \int_0^{\infty} f(x)\ dx \text{ konvergent.}$$

a)

Man kan snabbt kontrollera att $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ är positiv och avtagande på $[2, \infty)$. Alltså är serien konvergent om och endast om

$$\int_2^\infty f(x)\ dx$$

är konvergent. Vi beräknar därför integralen. Låt $t = \ln x \implies dt = dx/x$ och $x:\ 2 \to \infty \implies t:\ \ln 2 \to \infty$, vilket ger

$$\int_2^\infty \frac{1}{x \ln x}\ dx = \int_{\ln 2}^\infty \frac{1}{x}\ dx = [\ln|x|]_{\ln 2}^\infty = \infty \implies$$

$$\implies \sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k \ln k} \text{ är divergent.}$$

b)

Om vi låter $f(x) = \frac{\ln x}{x^{3/2}} \implies f'(x) = \frac{2 - 3\ln x}{2x^{5/2}}$, som är växande fram tills $x = e^{2/3} \approx 1,95 < 2$. Detta betyder att om vi tar ut den första termen från serien (som ändå är lika med 0) kommer vi att kunna göra jämförelsen

$$\sum_{k=2}^\infty \frac{\ln k}{k^{3/2}} \text{ konvergent} \iff \int_2^\infty \frac{\ln x}{x^{3/2}}\ dx \text{ konvergent.}$$

Exakt samma variabelbyte som i a) ger att

$$\int_2^\infty \frac{\ln x}{x^{3/2}}\ dx = \int_{\ln 2}^\infty \frac{t}{(e^t)^{1/2}}\ dt = \int_{\ln 2}^\infty te^{-t/2}\ dt,$$

och denna integral är konvergent, vilket man enkelt ser genom att beräkna dess värde med partialintegration. Alltså är serien konvergent.

13.38

Vi börjar med partialbråksuppdelning:

$$\frac{1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} \implies$$

$$\implies 1 = A(x+2) + B(x+1) = (A+B)x + (2A+B) \cdot 1 \implies$$

$$\implies \begin{cases} 2A + B = 1, \\ A + B = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = 1, \\ B = -1 \end{cases} \implies$$

$$\implies \int_1^\infty \frac{1}{x^2 + 3x + 2}\ dx = \int_1^\infty \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right)\ dx = [\ln|x+1| - \ln|x+2|]_1^\infty =$$

$$= \left[\ln \left| \frac{x+1}{x+2} \right| \right]_1^\infty = \ln 1 - \ln \frac{2}{3} = \ln \frac{3}{2}.$$

13.39

Vi behöver visa att derivatan är större än 0 för $x > 1$. Analysens huvudsats ger att

$$f'(x) = \frac{(\ln x)^3}{e^{\ln x} - 1}(\ln x)' = \frac{(\ln x)^3}{x-1}.$$

Det gäller att $\ln x > 0$ för $x > 1$ och dessutom är $x - 1 > 0$, då $x > 1$, varpå vi är klara. $\square$

13.40

$$\frac{\sin 2x}{3 + 2\sin x - \cos^2 x} = \frac{2\sin x \cos x}{3 + 2\sin x + \sin^2 x - 1} = \frac{2\sin x \cos x}{2 + 2\sin x + \sin^2 x},$$

detta motiverar variabelbytet $t = \sin x \implies dt = \cos x\, dx$, och $x: \ 0 \to \pi/2 \implies t: 0 \to 1$, vilket ger att

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{3 + 2\sin x - \cos^2 x}\, dx = \int_0^1 \frac{2t}{t^2 + 2t + 2}\, dt = \int_0^1 \frac{2t + 2 - 2}{t^2 + 2t + 2}\, dt =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{2t+2}{t^2+2t+2} - \frac{2}{(t+1)^2 + 1} \right) dt = \left[\ln(t^2 + 2t + 2) - 2\arctan(t+1) \right]_0^1 =$$

$$= \ln 5 - 2\arctan 2 - \ln 2 + \frac{\pi}{2}.$$

13.41

Partialbråksuppdelning:

$$\frac{x^2}{x^4 - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1} \implies$$

$$\implies x^2 = A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1) =$$

$$= A(x^3 + x^2 + x + 1) + B(x^3 - x^2 + x - 1) + C(x^3 - x) + D(x^2 - 1) =$$

$$= (A + B + C)x^3 + (A - B + D)x^2 + (A + B - C)x + (A - B - D) \cdot 1 \implies$$

$$\implies \begin{cases} \underline{1}: \ A - B - D = 0, \\ \underline{x}: \ A + B - C = 0, \\ \underline{x}^2: \ A - B + D = 1, \\ \underline{x}^3: \ A + B + C = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = 1/4, \\ B = -1/4, \\ C = 0, \\ D = 1/2 \end{cases} \implies$$

$$\implies \int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 - 1}\, dx = \int_{\sqrt{3}}^{\infty} \left(\frac{1/4}{x-1} - \frac{1/4}{x+1} + \frac{1/2}{x^2+1} \right) dx =$$

$$= \left[\frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\arctan x \right]_{\sqrt{3}}^{\infty} = \left[\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{1}{2}\arctan x \right]_{\sqrt{3}}^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln 1 + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} - \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} + \frac{\pi}{12}.$$

$$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{3 + 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1} = 2 + \sqrt{3}.$$

13.42

Jag kommer visa att den är konvergent genom att beräkna dess värde, men om man vill göra det med något test, så är det lämpligt att titta på värdet av kvoten med integranden och $1/x^2$, då $x \to \infty$. Man bör då få något ändligt tal, vilket visar att integralen är konvergent, eftersom $\int_2^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ är konvergent. Partialbråksuppdelning:

$$\frac{2x-4}{(2x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \implies$$

$$\implies 2x-4 = A(x^2+1) + (Bx+C)(2x+1) =$$

$$= (A+2B)x^2 + (B+2C)x + (A+C)\cdot 1 \implies$$

$$\implies \begin{cases} A+C=-4, \\ B+2C=2, \\ A+2B=0 \end{cases} \implies \begin{cases} A=-4, \\ B=2, \\ C=0, \end{cases} \implies$$

$$\implies \int_2^\infty \frac{2x-4}{(2x+1)(x^2+1)}\,dx = \int_2^\infty \left(-\frac{4}{2x+1} + \frac{2x}{x^2+1}\right)\,dx =$$

$$= \left[-2\ln|2x+1| + \ln|x^2+1|\right]_2^\infty = \left[\ln\left|\frac{x^2+1}{4x^2+4x+1}\right|\right]_2^\infty =$$

$$= \ln\frac{1}{4} - ln\frac{5}{25} = -\ln 4 + \ln 5 = \ln\frac{5}{4}.$$

13.43

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{\sin^3 x}\,dx = \begin{bmatrix} t = \sin x \implies dt = \cos x\,dx \\ x:\ 0 \to \pi/4 \implies t:\ 0 \to 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dt}{t^3},$$

och denna vet vi är divergent enligt sats (egentligen ska den övre gränsen vara 1 i satsen, men det är 0 som ställer till besvär).

13.44

Det gäller att $\sin x \geq -1$, vilket betyder att vi göra följande jämförelse:

$$\int_1^\infty \frac{2+\sin x}{1+x^2}\,dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\arctan x]_1^\infty = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} < \infty,$$

vilket visar att den ursprungliga integralen konvergerar.

13.45

Analysens huvudsats ger att

$$F'(x) = \frac{1-x}{(1+x^2)(x+1)},$$

som är 0 då $x = 1$. För att ta reda på vilket värde som är störst behöver vi dels kontrollera derivatans nollställe, och dels randpunkterna ($x = 0$ och $x = 2$). För att göra detta beräknar vi först integralen. Partialbråksuppdelning

$$\frac{1-t}{(1+t^2)(t+1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2+1} \implies$$

$$\implies 1 - t = A(t^2+1) + (Bt+C)(t+1) =$$

$$= (A+B)t^2 + (B+C)t + (A+C)\cdot 1 \implies$$

$$\implies \begin{cases} A + C = 1, \\ B + C = -1, \\ A + B = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = 1, \\ B = -1, \\ C = 0 \end{cases} \implies$$

$$\implies F(x) = \int_0^x \frac{1-t}{(1+t^2)(t+1)}\, dt = \int_0^x \left(\frac{1}{t+1} - \frac{t}{t^2+1}\right) dt =$$

$$= \left[\ln|t+1| - \frac{1}{2}\ln|t^2+1|\right]_0^x =$$

$$= \left[\ln\left|\frac{t+1}{\sqrt{t^2+1}}\right|\right]_0^x = \ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}},$$

absolutbeloppet försvann eftersom $x \in [0, 2]$. Detta visar att

$$\begin{cases} F(0) = 0 \text{ (man kunde sett detta direkt)}, \\ F(1) = \ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln 2 \approx 7/5, \\ F(2) = \ln\frac{3}{\sqrt{5}} \approx 6/5 < \frac{1}{2}\ln 2. \end{cases}$$

Härur ser vi att det största värdet är $\frac{1}{2}\ln 2$.

13.46

Variabelbytet $t = \sin x \implies dt = \cos x\, dx$, $x:\ 0 \to \pi/2 \implies t:\ 0 \to 1$, ger integralen

$$\int_0^{\pi/2} \cos x\sqrt{1+\sin^2 x}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1+t^2}\, dt = [12.41 \text{ a)}] =$$

$$= \frac{1}{2}[x\sqrt{x^2+1} + \ln(x + \sqrt{x^2+1})]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}).$$

13.47

Eftersom $A(x) > 0$ gäller det att

$$A(x) = \int_0^x f(t)\, dt \implies A'(x) = f(x),$$

enligt analysens huvudsats, och

$$f(x) = A'(x) = (\arctan x^2)' = \frac{2x}{1+x^4}.$$

13.48

Partialintegration ger att

$$\int (x-a)\ln x\ dx = (\frac{1}{2}x^2 - ax)\ln x - \int (\frac{1}{2}x^2 - ax)\cdot\frac{1}{x}\ dx =$$

$$= (\frac{1}{2}x^2 - ax)\ln x - \frac{1}{4}x^2 + ax \implies$$

$$\implies \int_1^2 (x-a)\ln x\ dx = \left[(\frac{1}{2}x^2 - ax)\ln x - \frac{1}{4}x^2 + ax\right]_1^2 =$$

$$= (2-2a)\ln 2 - 1 + 2a + \frac{1}{4} - a = 2(1-a)\ln 2 + a - \frac{3}{4} = 0 \implies$$

$$\implies (1-2\ln 2)a = \frac{3}{4} - 2\ln 2 \implies a = \frac{\frac{3}{4} - 2\ln 2}{1-2\ln 2} = \frac{8\ln 2 - 3}{8\ln 2 - 4}.$$

13.49

a)

Variabelbytet ger att $dx = -\sin t\, dt$ och att $x:\ -1 \to 1 \implies t:\ \pi \to 0$, vilket ger att

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\ dx = -\int_{\pi}^{0} \sin t\sqrt{1-\cos^2 t}\ dt = \int_0^{\pi} \sin t|\sin t|\ dt =$$

$$= \left[\sin t \geq 0,\ t \in [0,\pi]\right] = \int_0^{\pi} \sin^2 t\ dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2t)\ dt = \frac{1}{2}\left[t - \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

b)

Om man ritar grafen till funktionen ser man att det är en övre halvcirkel, med radie 1, vilket betyder att integralen kan tolkas som arean av halva enhetscirkeln. Det ger direkt svaret.

13.50

Se facit.

13.51

Analysens huvudsats ger att $f'(x) = \frac{\sin x}{x}$, vilket i sig ger att $f''(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$.

$$f'(x) = 0 \implies x = k\pi,\ k = 2, 3.$$

$$f''(2\pi) = \frac{1}{2\pi} > 0 \implies \text{minimi},$$

$$f''(3\pi) = -\frac{1}{3\pi} > 0 \implies \text{maximi}.$$

13.52

$$\frac{\ln(1+e^x)}{e^x} = e^{-x}\ln\left(e^x(e^{-x}+1)\right) =$$

$$= e^{-x}\left(\ln e^x + \ln(e^{-x}+1)\right) = xe^{-x} + e^{-x}\ln(e^{-x}+1).$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln(1+e^x)}{e^x}\ dx = \int_0^\infty xe^{-x}\ dx + \int_0^\infty e^{-x}\ln(e^{-x}+1)\ dx.$$

Den första integralen är samma som 13.24 b), och har värdet 1. Den andra kan enkelt bestämmas genom att först sätta $t = e^{-x} \implies dt = -e^{-x}dx$, $x:\ 0 \to \infty \implies t:\ 1 \to 0$.

$$\int_0^\infty e^{-x}\ln(e^{-x}+1)\ dx = -\int_1^0 \ln(t+1)\ dt = \int_0^1 \ln(t+1)\ dt =$$

$$= [12.17\text{ f)}] = [(t+1)\ln(t+1) - t]_0^1 = 2\ln 2 - 1.$$

Alltså är

$$\int_0^\infty xe^{-x}\ dx + \int_0^\infty e^{-x}\ln(e^{-x}+1)\ dx = 1 + 2\ln 2 - 1 = 2\ln 2.$$

13.53

Funktionen $f(x) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2}$ är uppenbart positiv och avtagande för $x \geq 1$. Därför gäller följande olikhet:

$$\sum_{k=1}^\infty f(k) \leq f(1) + \int_1^\infty f(x)\ dx.$$

$f(1) = \ln 2$ och

$$\int_1^\infty f(x)\ dx = \int_1^\infty \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2}\ dx = \begin{bmatrix} t = 1/x \implies dt = -dx/x^2 \\ x:\ 1 \to \infty \implies t:\ 1 \to 0 \end{bmatrix} =$$

$$= -\int_1^0 \ln(1+t)\ dt = [\text{se förra uppgiften}] = 2\ln 2 - 1.$$

Detta betyder att $f(1) + \int_1^\infty f(x)\ dx = 3\ln 2 - 1$ och därmed är

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{k^2} \leq 3\ln 2 - 1. \quad \square$$

Kapitel 14

14.1

Lösning finns redan.

14.2

a)

Vi beräknar först var kurvorna skär varandra.

$$\frac{2}{1+x^2} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \implies 2 = \sqrt{1+x^2} \implies x = {}_{(-)}^{+}3.$$

Den övre integrationsgränsen är alltså $x = \sqrt{3}$. För att få arean tar vi den övre kurvan och subtraherar den nedre, och integrerar det.

$$\int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx = \left[2\arctan x - \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3} - \ln\left(\sqrt{3}+2\right).$$

b)

Har har vi redan fått integrationsgränserna. Vi gör också omskrivningen (med hjälp av dubbla vinkeln för cosinus) $1 - \cos^2 x = \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$. Integralen vi vill beräkna är alltså:

$$\int_0^{\pi/2} \left(\sin x - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x \right) \right) = \left[-\cos x - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x \right]_0^{\pi/2} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

14.3

Eftersom varje horisontellt plan skär ut en kvadrat kan vi få volymelementet som $dV = dA\,dx = (\sqrt{4-x^2})^2 dx = (4-x^2)dx$. Den sökte volymen i deluppgifterna fås sedan av att integrerar till den önskade höjden.

a)

Här vill vi ha hela volymen, så vi integrerar till $x = 2$.

$$V = \int_0^2 dV = \int_0^2 (4-x^2)\,dx = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}\ \mathrm{m}^3.$$

b)

Nu integrerar vi istället till $x = 1$, vilket ger volymen $\left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{11}{3}\ \mathrm{m}^3$.

14.4

Lösning finns redan.

14.5

Lösning finns redan.

14.6

Skivformeln ger att volymen från rotationskroppen är

$$V = \pi \int_0^1 y^2 \, dx = \pi \int_0^1 x^6 \, dx = \frac{\pi}{7}.$$

14.7

Om man roterar den övre halvcirkeln, med radie R, vars funktion ges av $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ kring x-axeln kommer den rotationskroppen som uppstår att vara ett klot. Medelpunkten av klotet är då i origo och att ett plan delar det i två delar, på avståndet a från medelpunkten, betyder att vi kan få den ena volymen genom att integrera från $x = -R$ till $x = a$. Den andra biten kan man antingen få genom att integrera, eller genom att subtrahera det första resultatet från klotets totala volym. Volymen av den första biten blir, med skivformeln,

$$V_1 = \pi \int_{-R}^{a} y^2 \, dx = \pi \int_{-R}^{a} (R^2 - x^2) \, dx = \pi \left[R^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-R}^{a} =$$

$$= \pi \left(aR^2 - \frac{1}{3} a^3 + R^3 - \frac{1}{3} R^3 \right) = \frac{\pi}{3} \left(2R^3 + 3aR^2 - a^3 \right),$$

vilket betyder att den andra biten har volymen

$$V_2 = \frac{4}{3} \pi R^3 - \frac{\pi}{3} \left(2R^3 + 3aR^2 - a^3 \right) = \frac{\pi}{3} \left(2R^3 - 3aR^2 + a^3 \right).$$

14.8

Skivfomeln ger direkt att volymen är

$$\pi \int_0^{\pi/2} y^2 \, dx = \pi \int_0^{\pi/2} (\sin^2 x + 4 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x) \, dx =$$

$$= \pi \int_0^{\pi/2} (1 + 2 \sin 2x + 3 \cos^2 x) \, dx = \pi \int_0^{\pi/2} \left(1 + 2 \sin 2x + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cos 2x \right) \, dx =$$

$$= \pi \int_0^{\pi/2} \left(\frac{5}{2} + 2 \sin 2x + \frac{3}{2} \cos 2x \right) \, dx = \pi \left[\frac{5}{2} x - \cos 2x + \frac{3}{4} \sin 2x \right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \pi \left(\frac{5\pi}{4} + 2 \right) = \frac{\pi(5\pi + 8)}{4}.$$

I räkningarna har dubbla vinkeln för sinus och cosinus, samt trigonometriska ettan använts.

14.9

Eftersom $x \geq 1$ är den övre integrationsgränsen ∞. Skivformeln ger

$$V = \pi \int_1^\infty y^2 \, dx = \pi \int_1^\infty \frac{1}{x(1+x^2)} \, dx =$$

$$= \left[\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{(1+x^2) - x \cdot x}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right] =$$

$$= \pi \int_1^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) \, dx = \pi \left[\ln|x| - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| \right]_1^\infty = \pi \left[\ln \left| \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right| \right]_1^\infty =$$

$$= \pi \left(\ln 1 - \ln \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{2} \ln 2.$$

14.10

Lösning finns redan.

14.11

Vi löser ut y från ekvationen till randen/ytan på torusen och använder sedan skalformeln.

$$(x-4)^2 + y^2 = 4 \implies y = \pm\sqrt{4-(x-4)^2}.$$

På grund av symmetri räcker det med att titta på den positiva roten och sedan multiplicera den volym man erhåller med 2. x kan som minst vara 2, och som mest 6, vilket är våra integrationsgränser. Skalformeln ger nu (den yttre faktorn 2 är för att kompensera för symmetriargumentet)

$$V = 2 \int_2^6 2\pi x y \, dx = 4\pi \int_2^6 x\sqrt{4-(x-4)^2} \, dx =$$

$$= \begin{bmatrix} x - 4 = 2\sin t \implies dx = 2\cos t \, dt \\ 4 - (x-4)^2 = 4 - 4\sin^2 t = 4\cos^2 t \\ x: \ 2 \to 6 \implies t: \ -\frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= 4\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (4 + 2\sin t)\sqrt{4\cos^2 t} \; 2\cos t \; dt = [|\cos t| = \cos t \text{ på intervallet}] =$$

$$= 32\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2 + \sin t)\cos^2 t \; dt = 64\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \; dt + 32\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin t \cos^2 t \; dt =$$

$$= 64\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \; dt + 0 = 128\pi \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t \right) \, dt =$$

$$= 64\pi \left[t + \frac{1}{2}\sin 2t \right]_0^{\pi/2} = 32\pi^2.$$

Att den ena integralen blev 0 beror på att integranden var udda och intervallet symmetriskt kring 0. Det användes också att integralen över ett symmetriskt intervall av en jämn funktion är 2 gånger integralen från 0 till ena ändpunkten.

14.12

Massan ges av $\int dm$, och $dm = \rho(x)dx = x^2 dx$. Alltså är

$$m = \int_1^2 x^2 \, dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{7}{3} \text{ kg.}$$

14.13

Samma princip som i förra uppgiften ger att

$$m = \int dm = \int \rho \, dx = \int_0^2 \ln(1+x) \, dx = [12.17 \text{ f)}] =$$

$$= [(1+x)\ln(1+x) - x]_0^2 = 3\ln 3 - 2 \text{ kg.}$$

14.14

Här gäller det att $dm = \rho dV = \rho \, dA \, dx$. dA är tvärsnittsytan, som har en radie som ökar linjärt med x. Den ska vara 0 då $x = 0$ och 1 då $x = 2$, vilket betyder att $r(x) = x/2 \implies dA = \pi r^2 = \pi x^2/4$. Masselementet är alltså $dm = (10 - x^2)\pi \frac{x^2}{4} dx$. Massan blir därför

$$m = \frac{\pi}{4} \int_0^2 (10 - x^2)x^2 \, dx = \frac{\pi}{4} \left[\frac{10}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^2 = \frac{76\pi}{15} \text{ kg.}$$

14.15

Beteckna avståndet till ena ändpunkten med x, då är avståndet till den andra $L - x$. Detta betyder att $\rho = kx(L - x)$ och därmed är $dm = \rho dx = kx(L - x)dx$, vilket ger massan

$$m = \int_0^L kx(L - x) \, dx = k \left[\frac{L}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^L = \frac{1}{6}kL^3.$$

14.16

Cylinderformen betyder att tvärsnittsarean är konstant: $dA = \pi 4^2 = 16\pi$, och alltså är $dm = \rho dV = \rho \, dA \, dh = 16\pi \ln(5 + H - h)dh$, där $H = 20$. Massan i en full silo blir då

$$m = \int_0^{20} 16\pi \ln(25 - h) \, dh = [\text{partialintegration}] =$$

$$= 16\pi \left[(h - 25)\ln(25 - h)\right]_0^{20} - 16\pi \int_0^{20} (h - 25)\frac{-1}{25 - h} \, dh =$$

$$= 16\pi(-5\ln 5 + 25\ln 25) - 16\pi \cdot 20 = 16\pi(45\ln 5 - 20) \text{ kg.}$$

14.17

Lösning finns redan.

14.18

Massan beräknades i 14.12 till 7/3 kg. Masselementet är fortfarande $dm = x^2dx$, alltså är

$$x_{mc} = \frac{1}{7/3}\int_1^2 x \cdot x^2 \; dx = \frac{3}{7}\left[\frac{1}{4}x^4\right]_1^2 = \frac{3}{7}\frac{15}{4} = \frac{45}{28}.$$

14.19

Om vi sneglar tillbaka på 14.14 ser vi att massan är $\frac{76\pi}{15}$ kg, och att $dm = \frac{\pi}{4}(10-x^2)x^2dx$. Masscentrum ges då av

$$x_{mc} = \frac{1}{76\pi/15}\int_0^2 x \cdot \frac{\pi}{4}(10-x^2)x^2 \; dx = \frac{15}{304}\left[\frac{10}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^6\right]_0^2 = ... = \frac{55}{38}.$$

14.20

Eftersom kroppen är homogen är densitet konstant, ρ. Masselementet blir $dm = \rho dV = \rho\, dA\, dx = \rho\pi y^2 dx = \pi\rho e^{2x}dx$. Vi börjar med att beräkna den totala massan:

$$m = \int dm = \pi\rho\int_0^{1/2} e^{2x} \; dx = \pi\rho\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{1/2} = \pi\rho\frac{(e-1)}{2}.$$

För att beräkna masscentrum behöver vi en primitiv till xe^{2x}, vilket fås med partialintegration.

$$\int xe^{2x} \; dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \int \frac{1}{2}1 \cdot e^{2x} \; dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \int \frac{1}{4}e^{2x} = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{2x}.$$

Masscentrum ges nu av

$$\frac{1}{\pi\rho(e-1)/2}\int_0^{1/2} \pi\rho x e^{2x} \; dx = \frac{2}{e-1}\left[\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{2x}\right]_0^{1/2} = \frac{1}{2(e-1)}.$$

14.21

Homogen ger konstant densitet ρ. Vi behöver masselementet för att beräkna tyngdpunkten, och massan. Ur figuren ser vi att hela vinkeln är $\pi/2$, alltså är halva $\pi/4$ och det betyder att koordinaterna för den övre punkten där den radiella linjen och cirkelbågen skär varandra ges av $R(\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}) = (\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}})$. Vi kan dela upp kurvan i två delar,

$$y = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \frac{R}{\sqrt{2}}, \\ \sqrt{R^2 - x^2}, & \frac{R}{\sqrt{2}} < x \le R. \end{cases}$$

Masselementet ges återigen av densiteten gånger volymelementet: $dm = \rho dV = \rho\pi y^2$. Detta betyder att massan ges av

$$m = \int dm = \rho\pi\left(\int_0^{R/\sqrt{2}} x^2 \; dx + \int_{R/\sqrt{2}}^{R} (R^2 - x^2) \; dx\right) =$$

$$= \rho\pi \left(\left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^{R/\sqrt{2}} + \left[\frac{1}{2}R^2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_{R/\sqrt{2}}^{R} \right) = ... = \rho\pi \frac{2R^3}{3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

För att beräkna tyngdpunkten kommer vi också att behöva beräkna två separata integraler, vilket jag tänker göra först.

$$\int_0^{R/\sqrt{2}} x^3 \, dx = \frac{R^4}{16},$$

$$\int_{R/\sqrt{2}}^{R} x(R^2 - x^2) \, dx = \left[\frac{1}{2}R^2x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right]_{R/\sqrt{2}}^{R} = \frac{R^4}{16}.$$

Masscentrum ges nu av

$$\frac{1}{m} \int x \, dm = \frac{1}{\rho\pi \frac{2R^3}{3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)} \left(\int_0^{R/\sqrt{2}} x \cdot \rho\pi x^2 \, dx + \int_{R/\sqrt{2}}^{R} x \cdot \rho\pi(R^2 - x^2) \, dx \right) =$$

$$= \frac{3}{2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \left(\frac{R^4}{16} + \frac{R^4}{16} \right) = \frac{3R}{16\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}.$$

14.22

Vi börjar med att uttrycka radien som en funktion av höjden. Vid höjden $x = 0$ är radien r och vid $x = h$ är radien 0. Alltså är $\tilde{r}(x) = r - \frac{r}{h}x$. Konen är cirkulär så tvärsnittsarean $dA = \pi\tilde{r}^2$. Konen är homogen, så densitet är konstant ρ. Masselementet blir $dm = \rho dV = \rho \, dA \, dx = \rho\pi(r - \frac{r}{h}x)^2 dx$. Vi behöver inte beräkna massan med en integral eftersom vi vet vad volymen av en cirkulär kon. Massan $m = \rho V = \frac{\rho\pi r^2 h}{3}$. Detta betyder att vi kan ge oss på masscentrumberäkningen

$$x_T = \frac{1}{m} \int x \, dm = \frac{1}{\rho\pi r^2 h/3} \int_0^h x \cdot \rho\pi(r - \frac{r}{h}x)^2 \, dx = \frac{3r^2}{r^2 h} \int_0^h \left(x - \frac{2}{h}x^2 + \frac{1}{h}x^3 \right) \, dx =$$

$$= \frac{3}{h} \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3h}x^3 + \frac{1}{4h}x^4 \right]_0^h = \frac{h}{4}.$$

14.23

Här kan vi direkt konstatera, om densiteten är konstant ρ, att massan är $m = \rho\frac{V}{2} = \frac{2\rho\pi}{3}R^3$. Vid höjden x har tvärsnittsytan formen av en cirkel med radie $\sqrt{R^2 - x^2}$. Detta ger att $dm = \rho dV = \rho \, dA \, dx = \rho\pi(\sqrt{R^2 - x^2})^2 dx = \rho\pi(R^2 - x^2)dx$. Tyngdpunkten ges nu av

$$x_T = \frac{1}{m} \int x \, dm = \frac{3}{2\rho\pi R^3} \int_0^R x \cdot \rho\pi(R^2 - x^2) \, dx =$$

$$= \frac{3}{2R^3} \left[\frac{1}{2}R^2x - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^R = \frac{3R}{8}.$$

14.24

Symmetri ger att tryckcentrums x-koordinat ligger på y-axeln. Med tipsets införda beteckningar ska vi beräkna den totala tryckkraften

$$F = \int dF = \int_0^R \rho g y \cdot 2\sqrt{R^2 - y^2}\ dy = \rho g \left[-\frac{2}{3}(R^2 - y^2)^{3/2} \right]_0^R = \frac{2\rho g}{3} R^3,$$

och tryckkraftens angreppspunkt

$$y_{tc} = \frac{1}{F}\int y\ dF = \frac{3}{2\rho g R^3}\int_0^R y \cdot \rho g y \cdot 2\sqrt{R^2 - y^2}\ dy = \frac{3}{R^3}\int_0^R y^2\sqrt{R^2 - y^2}\ dy =$$

$$= \begin{bmatrix} y = R\sin t \implies dy = R\cos t\, dt \\ y:\ 0 \to R \implies t:\ 0 \to \pi/2 \\ \sqrt{R^2 - y^2} = R\cos t \end{bmatrix} = \frac{3}{R^3}\int_0^{\pi/2} R^2 \sin^2 t \cdot R\cos t \cdot R\cos t\ dt =$$

$$= 3R\int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t\ dt = \frac{3R}{4}\int_0^{\pi/2} \sin^2 2t\ dt = \frac{3R}{8}\int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4t)\ dt =$$

$$= \frac{3R}{8}\left[t - \frac{1}{4}\sin 4t \right]_0^{\pi/2} = \frac{3\pi R}{16}.$$

14.25

Här är också tryckcentrums x-koordinat på y-axeln av symmetriskäl. Löser vi ut x ur den givna får vi att

$$y = h - \frac{x^2}{a^2}h \implies -x^2 = a^2\left(\frac{y}{h} - 1\right) \implies x = \pm a\sqrt{1 - \frac{y}{h}}$$

Analogt till föregående uppgift får vi att $dF = \rho g y\, dA = \rho g y \cdot 2a\sqrt{1 - \frac{y}{h}}$. 2 kompenserar för att vi bara integrerar den positiva roten. Tryckkraften ges alltså av

$$F = \int_0^h \rho g y \cdot 2a\sqrt{1 - \frac{y}{h}} = \begin{bmatrix} t = 1 - y/h \implies dy = -h dt \\ y:\ 0 \to h \implies t:\ 1 \to 0 \end{bmatrix} = -2\rho g h\int_1^0 (h - ht) a\sqrt{t}\ dt =$$

$$= 2\rho g a h^2 \left[\frac{2}{3}t^{3/2} - \frac{2}{5}t^{5/2} \right]_0^1 = \frac{8}{15}\rho g a h^2 \text{ N}.$$

Tryckcentrum ges av

$$y_{tc} = \frac{1}{F}\int y\ dm = \frac{1}{8\rho g a h^2/15}\int_0^h y \cdot \rho g y \cdot 2a\sqrt{1 - \frac{y}{h}}\ dy =$$

$$[= \text{samma variabelbyte som ovan}] =$$

$$= -\frac{15h}{4h^2}\int_1^0 (h - ht)^2\sqrt{t}\ dt = \frac{15h}{4}\int_0^1 (\sqrt{t} - 2t\sqrt{t} + t^2\sqrt{t})\ dt =$$

$$= \frac{15h}{4}\left[\frac{2}{3}t^{3/2} - \frac{4}{5}t^{5/2} + \frac{2}{7}t^{7/2} \right]_0^1 = \frac{4}{7}h.$$

14.26

Lösning finns redan.

14.27

Man kan antingen känna igen dessa parametriseringar som cirklar, eller så kan man använda formlen för kurvlängd:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

a)

Se b), med $r = 1$.

b)

$x'(t))^2 + (y'(t))^2 = r^2$, vilket betyder att man integrerar en konstant, så man får direkt att längden är $2\pi r$, vilket är cirkelns omkrets.

c)

Det är cirklar med radien 1 och r.

14.28

Lösning finns redan.

14.29

Vi använder formeln för längden av en funktionskurva ($y = f(x)$):

$$L = \int_0^{1/2} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx.$$

$$f'(x) = -\frac{2x}{1-x^2} \implies 1 + (f'(x))^2 = 1 + \frac{4x^2}{(1-x^2)^2} =$$
$$= \frac{1 - 2x^2 + x^4 + 4x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{1 + 2x^2 + x^4}{(1-x^2)^2} = \frac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^2},$$

alltså är

$$\int_0^{1/2} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx = \int_0^{1/2} \sqrt{\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^2}\ dx = \int_0^{1/2} \frac{2 - (1-x^2)}{1-x^2}\ dx =$$
$$= \int_0^{1/2} \left(\frac{2}{1-x^2} - 1\right)\ dx = \int_0^{1/2} \left(\frac{(1+x) + (1-x)}{(1-x)(1+x)} - 1\right)\ dx =$$
$$= \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - 1\right)\ dx = [-\ln|1-x| + \ln|1+x| - x]_0^{1/2} = \ln 3 - \frac{1}{2}.$$

14.30

Man ser snabbt att det relevanta kurvstycket ligger mellan $x = -1$ och $x = 1$, vi använder formeln för längden av en funktionskurva ($y = f(x) \implies f'(x) = 2x$).

$$L = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + 4x^2}\ dx = 2\int_{0}^{1} \sqrt{1 + 4x^2}\ dx =$$

$$= \begin{bmatrix} t = 2x \implies dt = 2dx \\ x:\ 0 \to 1 \implies t:\ 0 \to 2 \end{bmatrix} = \int_{0}^{2} \sqrt{1 + t^2}\ dt = [12.41\ \text{a)}] =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\left(t\sqrt{1+t^2} + \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)\right)\right]_0^2 = \sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln\left(2 + \sqrt{5}\right).$$

14.31

Lösning finns redan.

14.32

a)

Längden av kurvan ges av

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2}\ d\theta,$$

$$\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta, \\ y = r(\theta)\sin\theta \end{cases} \implies \begin{cases} x' = r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta, \\ y' = r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta \end{cases} \implies$$

$$\implies (x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2 = (r'\cos\theta - r\sin\theta)^2 + (r'\sin\theta + r\cos\theta)^2 =$$

$$= (r')^2\cos^2\theta - 2r'r\cos\theta\sin\theta + r^2\sin^2\theta + (r')^2\sin^2\theta + 2r'r\sin\theta\cos\theta + r^2\cos^2\theta =$$

$$= ((r')^2 + r^2)(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = (r'(\theta))^2 + r(\theta)^2 \implies$$

$$\implies \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2}\ d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r'(\theta))^2 + r(\theta)^2}\ d\theta. \quad \square$$

b)

$$r(\theta) = e^{-\theta/6} \implies r'(\theta) = -\frac{1}{6}e^{-\theta/6} \implies$$

$$\implies (r'(\theta))^2 + (r(\theta))^2 = \frac{37}{36}e^{-2\theta/6} \implies$$

$$\implies L = \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{37}{36}e^{-2\theta/6}}\ d\theta = \frac{\sqrt{37}}{6}\int_0^{\infty} e^{-\theta/6}\ d\theta =$$

$$= \sqrt{37}\left[-e^{-\theta/6}\right]_0^{\infty} = \sqrt{37}(0 - (-1)) = \sqrt{37}.$$

14.33

Lösning finns redan.

14.34

$$\begin{cases} x = 20u^3, \\ y = 20(1-(1-u^2)^{3/2}) \end{cases} \implies \begin{cases} x' = 60u^2, \\ y' = 60u(1-u^2)^{1/2}) \end{cases} \implies$$
$$\implies (x')^2 + (y')^2 = 3600(u^4 + u^2(1-u^2)) = 3600u^2.$$

Sträckan han cyklar ges nu av

$$L = \int_0^1 \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\ du = 60 \int_0^1 u\ du = 30 \text{ km}.$$

Vi kan få tiden genom att integrera över tiden (rimligen).

$$t_1 = \int dt = \int \frac{dt}{ds}\ ds = \int_0^{30} \frac{30+s}{600}\ ds = \frac{1}{600}\left[30s + \frac{1}{2}s^2\right]_0^{30} = \frac{1350}{600} = \frac{9}{4} \text{ h}.$$

14.35

Lösning finns redan.

14.36

Formeln för rotationsarea (cosh är jämn, och intervallet symmetriskt, så det räcker med att titta på positiva x och dubbla arean):

$$A = 2\int_0^1 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\ dx = [(\cosh x)' = \sinh x \text{ och } \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1] =$$
$$= 4\pi \int_0^1 \cosh x \sqrt{1+\sinh^2 x}\ dx = 4\pi \int_0^1 \cosh x \sqrt{\cosh^2 x}\ dx = 4\pi \int_0^1 \cosh^2 x\ dx =$$
$$= \left[\cosh^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cosh 2x\right] = 2\pi \int_0^1 (1+\cosh 2x)\ dx = 2\pi \left[x + \frac{1}{2}\sinh 2x\right]_0^1 =$$
$$= 2\pi(1 + \frac{e^2 - e^{-2}}{4}) = \frac{\pi}{2}(e^2 + 4 - e^{-2}).$$

14.37

$$A = \int_0^3 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\ dx = \int_0^3 2\pi \cdot 2\sqrt{x}\sqrt{1+\left(\frac{2}{2\sqrt{x}}\right)^2}\ dx =$$
$$= 4\pi \int_0^3 \sqrt{x(1+\frac{1}{x})}\ dx = 4\pi \int_0^3 \sqrt{x+1}\ dx =$$
$$= 4\pi \left[\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\right]_0^3 = 4\pi\left(\frac{2}{3}\cdot 8 - \frac{2}{3}\right) = \frac{56\pi}{3}.$$

14.38

Vi parametriserar ellipsen:

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \implies \begin{cases} \sqrt{2}\cos t, \\ y = \sin t \end{cases} \quad , 0 \le t < 2\pi.$$

Rotationsarean kring x-axeln ges nu av

$$A = \int_0^{2\pi} 2\pi |y(t)| \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\ dt = 4\pi \int_0^{\pi} \sin t \sqrt{(-\sqrt{2}\sin t)^2 + \cos^2 t}\ dt =$$

$$= 4\pi \int_0^{\pi} \sin t \sqrt{2(1-\cos^2 t) + \cos^2 t}\ dt = 4\pi \int_0^{\pi} \sin t \sqrt{2 - \cos^2 t}\ dt =$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{2}s = \cos t \implies \sqrt{2}ds = -\cos t\, dt \\ t:\ 0 \to \pi \implies s:\ 0 \to -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = -4\sqrt{2}\pi \int_0^{-1/\sqrt{2}} \sqrt{2 - 2s^2}\ ds = [12.41\text{ b)}] =$$

$$= 4\pi \left[s\sqrt{1-s^2} + \arcsin s \right]_{-1/\sqrt{2}}^{0} = 4\pi \left(0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{2}} + \frac{\pi}{4} \right) = \pi^2 + 2\pi.$$

Jag byter integrationsgräns när jag tar bort absolutbeloppet eftersom funktionerna är periodiska och sinus är positiv på det nya intervallet (och framförallt för att kunna ta bort absolutbeloppet).

14.39

Sträckan ges av att integrera hastigheten över tiden:

$$s = \int v\ dt = \int_0^{1/4} 1600(t - 4t^2)\ dt = 1600 \left[\frac{1}{2}t^2 - \frac{4}{3}t^3 \right]_0^{1/4} = \frac{50}{3}\ \text{km}.$$

14.40

Hastigheten ges av att integrera accelerationen över tiden:

$$v = \int a\ dt = \int_0^3 100 \cos t\ dt = 100[\sin t]_0^3 = 100 \sin 3\ \text{m/s}.$$

14.41

Energin som går åt ges av

$$E = \int_0^{24} \left(1 + \pi |\sin \frac{\pi t}{12}| \right)\ dt = 2 \int_0^{12} \left(1 + \pi \sin \frac{\pi t}{12} \right)\ dt = 2 \left[t - 12 \cos \frac{\pi t}{12} \right]_0^{12} =$$

$$= 24 + 24\,(-(-1) - (-1)) = 24 + 48 = 72\ \text{kWh}.$$

14.42

Arbetet ges av

$$W = \int F \; dx$$

.

a)

Kraften är konstant, så arbetet är bara kraften gånger vägen, vilket blir $2 \cdot (3 - 1) = 6$ Nm.

b)

$$W = \int_0^2 kx \; dx = \left[\frac{1}{2}kx^2\right]_0^2 = 2k = 6 \text{ Nm}.$$

c)

$$W = \int_0^L kx \; dx = \left[\frac{1}{2}kx^2\right]_0^L = \frac{1}{2}kL^2.$$

14.43

Ström representerar den laddning som passerar under en viss tid, alltså är laddningen strömmen gånger tiden (enheten för laddning är Coulomb, C = As).

$$Q = \int i(t) \; dt.$$

a)

$$Q = \int_1^3 2 \; dt = 4 \text{ C}.$$

b)

$$Q = \int_0^{0,01} 6 \sin \omega t \; dt = \left[-\frac{6}{\omega} \cos \omega t\right]_0^{0,01} =$$

$$= \frac{6}{\omega}(1 - \cos(0,01\omega)) = \frac{6}{100\pi}(1 - \cos \pi) = \frac{3}{25\pi} \text{ C}.$$

14.44

Lösning finns redan.

14.45

Vi börjar med att hitta skärningspunkterna.

$$\frac{1}{x} = \frac{3}{2+x^2} \implies 2 + x^2 = 3x \implies \begin{cases} x = 1, \\ x = 2. \end{cases}$$

Det är ganska tydligt att $\frac{3}{2+x^2}$ ligger över den andra funktionen i intervallet (om man skulle välja motsatsen kommer man bara att få minus svaret). Alltså ska vi beräkna

$$\int_1^2 \left(\frac{3}{2+x^2} - \frac{1}{x} \right) \, dx = \left[\frac{3}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} - \ln|x| \right]_1^2 =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}} \left(\arctan \sqrt{2} - \arctan \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \ln 2.$$

14.46

Den nedre begränsande linjen ges av $y = \ln e^3 = 3$, alltså ska vi beräkna

$$\int_{e^3}^{e^4} (\ln x - 3) \, dx = [x \ln x - x - 3x]_{e^3}^{e^4} = 4e^4 - 4e^4 - 3e^3 + 4e^3 = e^3.$$

14.47

a)

Skivformeln ger att

$$V = \pi \int_0^1 (e^x)^2 \, dx = \pi \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}(e^2 - 1).$$

b)

Kroppen är homogen, så dess densitet är konstant ρ, vilket betyder att massan för kroppen är $m = \rho V$, och med skivformeln igen får vi att $dm = \rho dV = \rho \pi e^{2x} \, dx$. Tyngdpunkten ges nu av

$$x_T = \frac{1}{m} \int x \, dm = \frac{2}{\rho\pi(e^2-1)} \int_0^1 x \cdot \rho\pi e^{2x} \, dx = [\text{partialintegration}] =$$

$$= \frac{2}{e^2-1} \left(\left[\frac{1}{2} x e^{2x} \right]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot \frac{1}{2} e^{2x} \, dx \right) = \frac{2}{e^2-1} \left[\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \right) e^{2x} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{2}{e^2-1} \left(\frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} \right) = \frac{e^2+1}{2(e^2-1)}.$$

14.48

Formeln från 14.42 c) ger att arbetet är

$$W = \frac{1}{2}kL^2,$$

där $k = F/x = 250/0,05 = 5000$ N/m, och $L = 0,1$ m. Insättning ger att

$$W = \frac{1}{2} \cdot 5000 \cdot 0,1^2 = 25 \text{ Nm}.$$

14.49

Arbetet ges av

$$W = \int F(x)\ dx = \int_R^\infty \frac{mgR^2}{x^2}\ dx = mgR^2 \left[-\frac{1}{x}\right]_R^\infty = mgR^2 \left(-0 - \frac{-1}{R}\right) = mgR.$$

Kinetisk energi ges av

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2,$$

och alltså måste vi ha en hastighet som fordrar en kinetisk energi som är lika stor som mgR.

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgR \implies v = \sqrt{2gR}.$$

14.50

Skivformeln ger att volymen är

$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x\ dx = \pi \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)\ dx = \frac{\pi}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

Om $f(x) = \sin x$ är arean

$$A = 2\pi \int_0^\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx = 2\pi \int_0^\pi \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x}\ dx =$$

$$= \begin{bmatrix} t = -\cos x \implies dt = \sin x\, dx \\ x:\ 0 \to \pi \implies t:\ -1 \to 1 \end{bmatrix} = 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1 + t^2}\ dx = [12.41 \text{ a)}] =$$

$$= \pi \left[t\sqrt{1 + t^2} + \ln\left(t + \sqrt{1 + t^2}\right)\right]_{-1}^1 = ... = \pi(2\sqrt{2} + 2\ln\left(\sqrt{2} + 1\right)).$$

14.51

$$pV^{1,4} = k \implies p = \frac{k}{V^{1,4}} \text{ och } k = 2000 \cdot 10^{1,4}.$$

Arbetet ges av

$$W = \int p\ dV = \int_5^{10} \frac{k}{V^{1,4}}\ dV = \left[-\frac{5k}{2}\frac{1}{V^{2/5}}\right]_5^{10} =$$

$$= \left[5000 \cdot 10^{7/5} V^{-2/5}\right]_{10}^5 \approx 15980 \text{ Ndm} = 1598 \text{ Nm}.$$

14.52

Laddningen kommer att röra sig från avståndet a till avståndet 0, alltså ska vi beräkna

$$F = \int_a^{a+l} k\frac{Qq}{r^2}\ dr = kQq\left[\frac{-1}{r}\right]_a^{a+l} = kQq\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+l}\right) = kQq\frac{a+l-a}{a(a+l)} = k\frac{Qql}{a(a+l)}$$

14.53

$$\begin{cases} x = b\cos 3t + 3\cos t, \\ y = b\sin 3t + 3\sin t \end{cases} \implies \begin{cases} x' = -3b\sin 3t - 3\sin t, \\ y' = 3b\cos 3t + 3\cos t \end{cases} \implies (x')^2 + (y')^2 =$$

$$= (-3b\sin 3t - 3\sin t)^2 + (3b\cos 3t + 3\cos t)^2 =$$

$$= 9\left(b^2\sin^2 3t + 2b\sin 3t\sin t + \sin^2 t + b^2\cos^2 3t + 2b\cos 3t\cos t + \cos^2 t\right) =$$

$$= 9\left(b^2(\sin^2 3t + \cos^2 3t) + 2b(\cos 3t\cos t + \sin 3t\sin t) + \sin^2 t + \cos^2 t\right) =$$

$$= 9\left(b^2 + 2b\cos(3t - t) + 1\right) = [b = 1] = 9(2 + 2\cos 2t) = 18(1 + 2\cos^2 t - 1) = 36\cos^2 t.$$

Kurvlängden ges av

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\ dt = 6\int_0^{2\pi} |\cos t|\ dt = 24\int_0^{\pi/2} \cos t\ dt = 24[\sin t]_0^{\pi/2} = 24.$$

14.54

Sätt origo i mitten av kabeln. Den hänger som en parabel, vilket betyder att den har formen $f(x) = ax^2 + bx + c$, eftersom origo är i mitten är både $b = 0$ och $c = 0$. Vidare ska $f(25) = 10 \implies 625a = 10 \implies a = \frac{2}{125}$. Av symmetriskäl är längden från $x = -25$ till $x = 25$ samma som två gånger längden från $x = 0$ till $x = 25$. Vidare är $f'(x) = \frac{4}{125}x$, vilket betyder att längden är

$$L = 2\int_0^{25} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx = 2\int_0^{25} \sqrt{1 + \left(\frac{4}{125}x\right)^2}\ dx =$$

$$= \begin{bmatrix} t = \frac{4}{125}x \implies dx = \frac{125}{4}dt \\ x:\ 0 \to 25 \implies t:\ 0 \to \frac{4}{5} \end{bmatrix} = \frac{125}{2}\int_0^{4/5} \sqrt{1 + t^2}\ dt = [12.41\text{ a)}] =$$

$$= \frac{125}{4}\left[t\sqrt{1 + t^2} + \ln\left(t + \sqrt{1 + t^2}\right)\right]_0^{4/5} = \frac{125}{4}\left(\frac{4}{5}\sqrt{\frac{41}{25}} + \ln\left(\frac{4}{5} + \sqrt{\frac{41}{25}}\right)\right) =$$

$$= 5\sqrt{41} + \frac{125}{4}\ln\frac{4 + \sqrt{41}}{5}\ \text{m}.$$

14.55

Av symmetriskäl är $y_T = z_t = 0$.

$$(x^2+y^2)^2 = 4(x^2-y^2) \implies x^4+2x^2y^2+y^4 = 4x^2-4y^2 \implies$$
$$\implies y^4+(2x^2+4)y^2+x^4-4x^2 = 0 \implies [pq\text{-formeln}] \implies$$
$$\implies y^2 = -x^2-2 \underset{(-)}{+} \sqrt{(-x^2-2)^2-x^4+4x^2} =$$
$$= \sqrt{x^4+4x^2+4-x^4+4x^2}-x^2-2 = \sqrt{8x^2+4}-x^2-2.$$

Eftersom kroppen ska rotera kring x-axeln är det y^2 som är av intresse, då $dm = \rho dV = \rho\, dA\, dx = \rho\pi y^2 dx = \rho\pi(\sqrt{8x^2+4}-x^2-2)dx$. Vi ser också att i första kvadranten kan x variera mellan 0 och 2, vilket blir våra integrationsgränser. Massan ges av

$$m = \int dm = \rho\pi \int_0^2 \left(\sqrt{8x^2+4}-x^2-2\right)\, dx,$$

$$2\int_0^2 \sqrt{2x^2+1}\, dx = \begin{bmatrix} t=\sqrt{2}x \implies dx = dt/\sqrt{2} \\ x:\ 0\to 2 \implies t:\ 0\to 2\sqrt{2} \end{bmatrix} = \sqrt{2}\int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{t^2+1}\, dt =$$

$$= [12.41\text{ a)}] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[t\sqrt{t^2+1}+\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\right]_0^{2\sqrt{2}} = ... = 6+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(3+2\sqrt{2}),$$

$$\rho\pi\int_0^2 \left(\sqrt{8x^2+4}-x^2-2\right)\, dx = \rho\pi\left(6+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(3+2\sqrt{2}) - \left[\frac{1}{3}x^3+2x\right]_0^2\right) =$$
$$= \rho\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(3+2\sqrt{2})-\frac{2}{3}\right).$$

För att beräkna tyngdpunkten börjar jag med att beräkna

$$\int x\, dm = \rho\pi\int_0^2 \left(x\sqrt{8x^2+4}-x^3-2x\right)\, dx =$$

$$= \rho\pi\left[\frac{1}{16}\frac{2}{3}(8x^2+4)^{3/2}-\frac{1}{4}x^4-x^2\right]_0^2 = \rho\pi\left(\frac{1}{24}(36^{3/2}-4^{3/2})-4-4\right) = \frac{2}{3}\rho\pi.$$

Tyngdpunkten ges nu av

$$x_T = \frac{1}{m}\int x\, dm = \frac{\frac{2}{3}\rho\pi}{\rho\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(3+2\sqrt{2})-\frac{2}{3}\right)} = \frac{2\sqrt{2}}{3\ln(3+2\sqrt{2})-2\sqrt{2}}.$$

Det gäller också att $3+2\sqrt{2} = (\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}+1 = (\sqrt{2}+1)^2 \implies \ln(3+2\sqrt{2}) = 2\ln(\sqrt{2}+1)$, vilket betyder att

$$\frac{2\sqrt{2}}{3\ln(3+2\sqrt{2})-2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3\ln(\sqrt{2}+1)-\sqrt{2}} = \frac{2}{3\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)-2}.$$

Detta ger slutligen tyngdpunkten

$$(x_T, y_T, z_T) = \left(\frac{2}{3\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)-2}, 0, 0\right).$$

14.56

Energin som krävs ges av integralen

$$W = \int \left(h + \frac{d}{2} + x\right) g\ dm = [\text{se nedan}] = \int \left(\frac{3}{5} + x\right) g\ dm,$$

där

$$dm = \rho dV = \rho\, dA\, dx = \rho \cdot 2r \cdot l\, dx =$$

$$= \left[r = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - x^2},\ \rho = 1000,\ d = 1,\ h = 0,1,\ \text{och } l = 3\right] = 6000\sqrt{\frac{1}{4} - x^2}dx.$$

Arean är som den är eftersom det är en cylinderformad tank. Radiens ekvation känns igen från cirklar. Att h inkluderas i energiintegralen är för att man behöver pumpa upp den sista biten på tanken också, (om man utelämnar h:et kommer man att få fel svar (det bör bli $375\pi/2 + 250g$, vilket inte är det som står i facit), men uppgiften är lite flummigt formulerad). Nu återstår det bara att beräkna integralen

$$W = \int_0^{1/2} \left(\frac{3}{5} + x\right) \cdot 6000\sqrt{\frac{1}{4} - x^2} g\ dx = 1200g \int_0^{1/2} (3 + 5x)\sqrt{\frac{1}{4} - x^2}\ dx =$$

$$= \begin{bmatrix} x = t/2 \implies dx = dt/2 \\ x:\ 0 \to 1/2 \implies t:\ 0 \to 1 \end{bmatrix} = 600g \int_0^1 \left(3 + \frac{5t}{2}\right) \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{t^2}{4}}\ dt =$$

$$= 150g \int_0^1 (6 + 5t)\sqrt{1 - t^2}\ dt = [12.41\ \text{b})] =$$

$$= 150g \left[3\left(t\sqrt{1 - t^2} + \arcsin t\right) - \frac{5}{2}\frac{2}{3}(1 - t^2)^{3/2}\right]_0^1 = 225g\pi + 250g = 25g(9\pi + 10)\ \text{J}.$$

14.57

Volymen per tidsenhet fås av $V = \int dV$, där $dV = v\, dA = k(R^2 - r^2)2\pi r\, dr = 2\pi k(R^2 r - r^3)dr$. Det vi söker är alltså

$$V = 2\pi k \int_0^R (R^2 r - r^3)\ dr = 2\pi k \left[\frac{1}{2}R^2 r^2 - \frac{1}{4}r^4\right]_0^R = \frac{k\pi R^4}{2}.$$

14.58

Om hastigheten är omvänt proportionell mot snölagrets tjocklek kommer plogen, teoretiskt, ha oändlig hastighet när det inte finns någon snö (alltså precis innan det börjar snöa). Detta betyder att snöplogens hastighet kan skrivas som

$$v(t) = \frac{k}{t - t_0},$$

om t_0 är tiden då snön börjar falla. Låt vidare $t_0 = 0$, och t har enheten h. Sträckan som snöplogen kör under första timmen kan då skrivas

$$\int_t^{t+1} v(\tilde{t})\ d\tilde{t},$$

och under andra timmen

$$\int_{t+1}^{t+2} v(\tilde{t})\ d\tilde{t},$$

där t då är tiden från klockslaget när det började snöa, tills klockan är 12.00. Den andra sträckan ska vara hälften så lång som den första, alltså är

$$\int_{t}^{t+1} \frac{k}{\tilde{t}-t_0}\ d\tilde{t} = 2\int_{t+1}^{t+2} \frac{k}{\tilde{t}-t_0}\ d\tilde{t} \implies \left[\ln|\tilde{t}|\right]_t^{t+1} = \left[\ln|\tilde{t}|\right]_{t+1}^{t+2} \implies$$

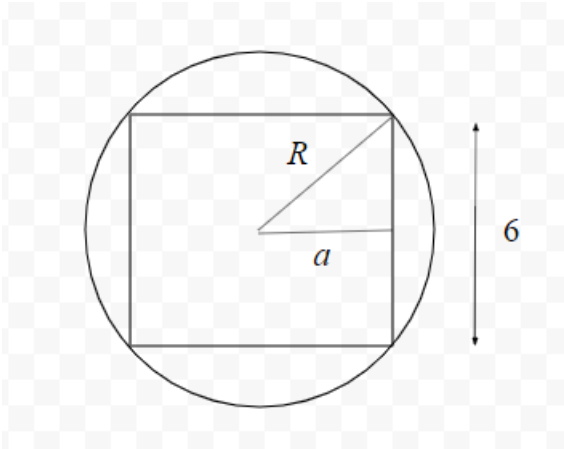
$$\implies [t>0] \implies \ln(t+1) - \ln t = 2(\ln(t+2) - \ln(t+1)) \implies$$

$$\implies \frac{t+1}{t} = \left(\frac{t+2}{t+1}\right)^2 \implies (t+1)^3 = t(t+2)^2 \implies$$

$$\implies t^3+3t^2+3t+1 = t^3+4t^2+4t \implies t^2+t-1=0 \implies t = -\frac{1}{2} \underset{(-)}{+} \frac{\sqrt{5}}{2},$$

där den negativa roten utesluts eftersom $t>0$. Vidare är $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2} \approx 0,618$ h ≈ 37 min. Alltså började det snöa 37 minuter innan klockan 12.00, vilket motsvarar klockan 11.23.

14.59



Pythagoras sats ger att $a^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2 = R^2 \implies a = \sqrt{R^2-9}$. Den övre delen av klotet fås av att rotera kurvan $f(x) = \sqrt{R^2-x^2}$ kring y-axeln. Av symmetriskäl kan vi få hela volymen genom att dubblera volymen för den övre delen av servettringen. Den volymen fås av skalformeln, och vi integrerar från a till R.

$$V = 2\cdot 2\pi \int_a^R x f(x)\ dx = 4\pi \int_a^R x\sqrt{R^2-x^2}\ dx = 4\pi \left[-\frac{1}{3}(R^2-x^2)^{3/2}\right]_{\sqrt{R^2-9}}^{R} =$$

$$= \frac{4\pi}{3}((R^2-(R^2-9))^{3/2} - (R^2-R^2)^{3/2}) = \frac{4\pi}{3}(9^{3/2}-0) = 36\pi \text{ cm}^3.$$

Notera att svaret inte beror på radien. Allmänt gäller det, om man skär bort en cylinder med höjden h ur ett klot med radien R, så kommer servettringens volym att vara $\frac{\pi h^3}{6}$. Sök på "napkin ring problem" om du vill veta mer.

14.60

Låt $f(x) = y = 1 - \frac{x^2}{2} \implies f'(x) = -x$.

a)

Längden ges av

$$L = \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + x^2}\, dx = [12.41 \text{ a)}] =$$

$$= \left[\frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right]_0^{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right).$$

b)

Skalformeln ger att volymen är

$$V = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} x f(x)\, dx = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \left(x - \frac{x^3}{2}\right)\, dx = 2\pi \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4\right]_0^{\sqrt{2}} = \pi.$$

14.61

Ur uppgiftsbeskrvningen har vi att densiteten $\rho = kx$ (x är det vinkelräta avståndet till y-axeln), och $\rho = 1$ när $x = 1 \implies k = 1$. Masselementet blir då $dm = \rho dx = x\, dx$. Om vi nu kombinerar detta med kurvlängdsformeln får vi massan

$$m = \int_1^4 \sqrt{1 + (y')^2}\, dm = \int_1^4 x\sqrt{1 + 4x^2}\, dx =$$

$$= \left[\frac{1}{8}\frac{2}{3}(1 + 4x^2)^{3/2}\right]_1^4 = \frac{1}{12}(65^{3/2} - 5^{3/2}) \text{ kg}.$$

14.62

a)

$f(x) = y = \sqrt{x} \implies f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$, varpå arean ges av

$$A = 2\pi \int_0^1 f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x + \frac{1}{4}}\, dx =$$

$$= 2\pi \left[\frac{2}{3}(x + \frac{1}{4})^{3/2}\right]_0^1 = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{5^{3/2}}{4^{3/2}} - \frac{1}{4^{3/2}}\right) = \frac{\pi(5\sqrt{5} - 1)}{6}.$$

b)

Vi är intresserade av skalets tyngdpunkt, alltså behöver vi dess massa, men eftersom det är homogent är densiteten konstant ρ (godtycklig ytdensitet), och massan är då $m = \rho A$.

För att beräkna $\int x\ dm$, slänger vi bara in ett ρ och ett x i formeln för rotationsarea som vi använde ovan.

$$\int x\ dm = 2\rho\pi \int_0^1 x\sqrt{x+\frac{1}{4}}\ dx = 2\rho\pi \int_0^1 \left(x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)\sqrt{x+\frac{1}{4}}\ dx =$$

$$= 2\rho\pi \left[\frac{2}{5}\left(x+\frac{1}{4}\right)^{5/2} - \frac{1}{4}\frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{4}\right)^{3/2}\right]_0^1 = ... = \frac{5\sqrt{5}\rho\pi}{12} + \frac{\rho\pi}{60}.$$

Tyngdpunkten blir då

$$x_T = \frac{\frac{5\sqrt{5}\rho\pi}{12} + \frac{\rho\pi}{60}}{\frac{\rho\pi(5\sqrt{5}-1)}{6}} = \frac{25\sqrt{5}+1}{10(5\sqrt{5}-1)}.$$

14.63

Skivformeln ger att volymen är

$$V = \pi \int_1^\infty \left(\frac{e^{1/x}}{x}\right)^2\ dx = \pi \int_1^\infty \frac{e^{2/x}}{x^2}\ dx = \begin{bmatrix} t = 1/x \implies dt = -dx/x^2 \\ x:\ 1 \to \infty \implies t:\ 1 \to 0 \end{bmatrix} =$$

$$= -\pi \int_1^0 e^{2t}\ dt = \pi \int_0^1 e^{2t}\ dt = \pi \left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}(e^2-1).$$

Kapitel 15

15.1

Lösning finns redan.

15.2

$$xy' = \ln x \implies y(x) = \int \frac{\ln x}{x}\, dx = [12.11 \text{ b)}] = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C,$$

och $y(1) = 2 \implies C = 2$. Alltså är $y(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + 2$.

15.3

Lösning finns redan.

15.4

Alla dessa differentialekvationer är linjära och av första ordningen, vilket betyder att de kan lösas med integrerande faktor.

$$y' + f(x)y = g(x) \implies \text{ integrerande faktor } \mu(x) = e^{\int f(x)\, dx} \implies$$
$$\implies y'\mu(x) + f(x)\mu(x)y = g(x)\mu(x) \implies (y\mu(x))' = g(x)\mu(x).$$

a)

Se c), med $k = -2$.

b)

Se c), med $k = 3$.

c)

Integrerande faktor: $\mu(x) = e^{\int -k\, dx} = e^{-kx}$, notera att minustecknet följer med till integralen i den primitiva funktionen. Multiplikation med den integrerande faktorn omvandlar vänsterledet till en derivata av en produkt:

$$(ye^{-kx})' = 0 \cdot e^{-kx} = 0 \implies ye^{-kx} = C \implies y(x) = Ce^{kx}.$$

d)

Integrerande faktor: $\mu(x) = e^{\int x\, dx} = e^{\frac{1}{2}x^2}$, vilket ger ekvationen

$$(ye^{x^2/2})' = 0 \implies y(x) = Ce^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

15.5

Återigen kan dessa lösas med integrerande faktor.

a)

Samma som 15.4 a), vilket betyder att vi multiplicerar med funktionen $\mu(x) = e^{2x}$, vilket ger

$$(ye^{2x})' = 1 \cdot e^{2x} \implies ye^{2x} = \frac{1}{2}e^{2x} + C \implies y(x) = \frac{1}{2} + Ce^{-2x}.$$

b)

Den integrerande faktorn $\mu(x) = e^{-3x}$ ger

$$(ye^{-3x})' = 1 \cdot e^{-3x} \implies ye^{-3x} = -\frac{1}{3}e^{-3x} + C \implies y(x) = -\frac{1}{3} + Ce^{3x}.$$

c)

Integrerande faktor $e^{\int \cos x \, dx} = e^{\sin x}$, vilket, efter multiplikation, betyder att vi får differentialekvationen

$$(ye^{\sin x})' = 4\cos x e^{\sin x} \implies ye^{\sin x} = 4e^{\sin x} + C \implies y(x) = 4 + Ce^{-\sin x}.$$

d)

Samma som 15.4 d), vilket betyder att $\mu(x) = e^{x^2/2}$, och vi får då DE:n

$$(ye^{x^2/2})' = x \cdot e^{x^2/2} \implies ye^{x^2/2} = e^{x^2/2} + C \implies y(x) = 1 + Ce^{-x^2/2}.$$

15.6

Lösning finns redan.

15.7

Fortfarande är dessa linjära första ordningens differentialekvationer, vilket betyder att de kan lösas med integrerande faktor. Man måste dock kontrollera att de är skrivna på standardform först (en 1:a framför y').

a)

Integrerande faktor: $\mu(x) = e^{\int 2x \, dx} = e^{x^2}$, vilket omvandlar ekvationen till följande:

$$(ye^{x^2})' = 0 \cdot e^{x^2} = 0 \implies ye^{x^2} = C \implies y(x) = Ce^{-x^2}.$$

b)

$$xy' + 10y = \ln x \implies y' + \frac{10}{x}y = \frac{\ln x}{x} \implies \mu(x) = e^{\int \frac{10}{x} \, dx} = e^{10 \ln x} = e^{\ln x^{10}} =$$

$$= x^{10} \implies x^{10}y' + 10x^9 y = x^9 \ln x \implies (x^{10}y)' = x^9 \ln x \implies x^{10}y = \int x^9 \ln x \, dx =$$

$$= [\text{partialintegration}] = \frac{1}{10}x^{10} \ln x - \int \frac{1}{10}x^{10} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{1}{10}x^{10} \ln x - \frac{1}{100}x^{10} + C \implies$$

$$\implies y(x) = \frac{1}{10} \ln x - \frac{1}{100} + Cx^{-10}.$$

c)

$$y' + \cot x y = \tan^2 x \implies \mu(x) = e^{\int \cot x \ dx} = e^{\int \frac{\cos x}{\sin x} \ dx} = e^{\ln \sin x} = \sin x \implies$$

$$\implies \sin x y' + \sin x \frac{\cos x}{\sin x} y = \sin x \tan^2 x = \sin x (\frac{1}{\cos^2 x} - 1) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \sin x \implies$$

$$\implies (y \sin x)' = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \sin x \implies y \sin x = \int \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \sin x \right) \ dx =$$

$$= \frac{1}{\cos x} + \cos x + C \implies y(x) = \frac{1}{\sin x \cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{C}{\sin x} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2} \sin 2x} + \cot x + \frac{C}{\sin x} = \frac{2}{\sin 2x} + \cot x + \frac{C}{\sin x}.$$

15.8

Vi fortsätter på spåret med integrerande faktor.

a)

$$y' + x^2 y = x^2 \implies \mu(x) = e^{\int x^2 \ dx} = e^{\frac{1}{3} x^3} \implies$$

$$\implies (e^{\frac{1}{3} x^3} y)' = x^2 e^{\frac{1}{3} x^3} \implies e^{\frac{1}{3} x^3} y = e^{\frac{1}{3} x^3} + C \implies y(x) = 1 + C e^{-\frac{1}{3} x^3},$$

begynnelsevillkoret $y(0) = 2$ ger att $C = 1$, alltså får vi

$$y(x) = 1 + e^{-x^3/3}$$

b)

$$(1 - x^2) y' + x y = x \implies y' + \frac{x}{1 - x^2} y = \frac{x}{1 - x^2} \implies \mu(x) = e^{\int \frac{x}{1 - x^2} \ dx} =$$

$$= e^{-\frac{1}{2} \ln (1 - x^2)} = e^{\ln \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \implies$$

$$\implies \frac{y'}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{x y}{(1 - x^2)^{3/2}} = \frac{x}{(1 - x^2)^{3/2}},$$

ur konstruktionen av den integrerande faktorn vet vi att $\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$ är derivatan av $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, vilket betyder att vi inte behöver anstränga oss för att integrera högerledet.

$$\left(\frac{y}{\sqrt{1 - x^2}} \right)' = \frac{x}{(1 - x^2)^{3/2}} \implies \frac{y}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + C \implies y(x) = 1 + C \sqrt{1 - x^2},$$

begynnelsevillkoret $y(0) = 3$ ger att $C = 2$, och alltså är

$$y(x) = 1 + 2 \sqrt{1 - x^2}$$

c)

$$(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)\arctan x \implies y' - \frac{2x}{1+x^2} = \arctan x \implies$$

$$\implies \mu(x) = e^{\int -\frac{2x}{1+x^2}\,dx} = e^{-\ln(1+x^2)} = e^{\ln\frac{1}{1+x^2}} = \frac{1}{1+x^2} \implies$$

$$\implies \frac{y'}{1+x^2} - \frac{2xy}{(1+x^2)^2} = \frac{\arctan x}{1+x^2} \implies \left(\frac{y}{1+x^2}\right)' = \frac{\arctan x}{1+x^2},$$

för att integrera högerledet ser vi att $1/(1+x^2)$ är derivatan av $\arctan x$, vilket betyder att vi enkelt kan göra variabelbytet i huvudet och se att

$$\frac{y}{1+x^2} = \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + C \implies y(x) = \frac{1+x^2}{2}(\arctan x)^2 + C(1+x^2),$$

och att $y(1) = 2$ ger att $2 = \frac{\pi^2}{16} + 2C \implies C = 1 - \frac{\pi^2}{32}$, vilket ger oss

$$y(x) = \frac{1}{2}(1+x^2)(\arctan x)^2 + \left(1 - \frac{\pi^2}{32}\right)(1+x^2) =$$

$$= (1+x^2)\left(\frac{1}{2}(\arctan x)^2 + 1 - \frac{\pi^2}{32}\right).$$

d)

$$(x+1)(x+2)y' - y = 1 \implies y' - \frac{1}{(x+1)(x+2)}y = \frac{1}{(x+1)(x+2)} \implies$$

$$\implies \mu(x) = e^{\int -\frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx} = [\text{partialbråksuppdelning}] = e^{\int -\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)\,dx} =$$

$$= e^{-\ln(x+1) + \ln(x+2)} = e^{\ln\frac{x+2}{x+1}} = \frac{x+2}{x+1} \implies$$

$$\implies \frac{x+2}{x+1}y' - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} \implies \left(\frac{x+2}{x+1}y\right)' = \frac{1}{(x+1)^2} \implies$$

$$\implies \frac{x+2}{x+1}y = -\frac{1}{x+1} + C \implies y(x) = C\frac{x+1}{x+2} - \frac{1}{x+2},$$

varpå $y(0) = 2 \implies C = 5$. Alltså är

$$y(x) = 5\frac{x+1}{x+2} - \frac{1}{x+2} = \frac{5x+4}{x+2}.$$

15.9

Vi bestämmer den integrerande faktorn för differentialekvationen.

$$\sqrt{1+x^2}y' + y = \sqrt{1+x^2} \implies y' + \frac{y}{\sqrt{1+x^2}} = 1 \implies$$

$$\implies \mu(x) = e^{\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}} = e^{\ln(x+\sqrt{1+x^2})} = x + \sqrt{1+x^2} \implies$$

$$\implies (x+\sqrt{1+x^2})y' + \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = x + \sqrt{1+x^2} \implies$$

$$\implies \left((x+\sqrt{1+x^2})y\right)' = x+\sqrt{1+x^2} \implies (x+\sqrt{1+x^2})y = \int \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\,dx =$$

$$= [12.41\text{ a)}] = \frac{1}{2}\left(x^2 + x\sqrt{1+x^2} + \ln(x+\sqrt{1+x^2})\right) + C \implies$$

$$\implies \left[\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{x-\sqrt{1+x^2}}{(x+\sqrt{1+x^2})(x-\sqrt{1+x^2})} = \frac{x-\sqrt{1+x^2}}{x^2-(1+x^2)} = \sqrt{1+x^2}-x\right] \implies$$

$$\implies y(x) = \frac{x(x+\sqrt{1+x^2}) + \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C}{2(x+\sqrt{1+x^2})} =$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2}(\sqrt{1+x^2}-x)(\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C),$$

och $y(0) = 7 \implies C = 14$, vilket betyder att

$$y(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}(\sqrt{1+x^2}-x)(\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + 14).$$

15.10

Att tillväxten är proportionell mot populationen betyder att derivatan kan skrivas som en konstant gånger funktionen.

a)

Se facit.

b)

$$y(t) = 2000 \implies 1000e^{0,1t} \implies 0,1t = \ln 2 \implies t = 10\ln 2.$$

15.11

a)

Se facit.

b)

$$m(t) = m_0 e^{-\lambda t} = \frac{m_0}{2} \implies -\lambda t = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 \implies t = \frac{\ln 2}{\lambda} = 5\ln 2.$$

15.12

Denna differentialekvation är av första ordningen och linjär, vilket betyder att den kan lösas med integrerande faktor, men den går också att lösa som en separabel differentialekvation. Jag tycker det är roligare att lösa separabla differentialekvationer eftersom man får behandla derivatan som ett bråk och göra lite halvolagliga grejer, och därför kommer jag att lösa den som en separabel differentialekvation.

$$m\frac{dv}{dt} = -kv \implies m\frac{dv}{v} = -k\,dt \implies m\int\frac{dv}{v} = -k\int dt \implies$$

$$\implies m\ln|v| = -kt + C_1 \implies \ln|v| = -\frac{k}{m}t + C_2 \implies |v| = e^{-kt/m+C_2} \implies$$
$$\implies v(t) = \pm e^{-kt/m}e^{C_2} = Ce^{-kt/m}$$

Att jag byter index på konstanten är bara att jag ersätter den gamla konstanten med en ny konstant - det spelar ju ingen roll exakt vilken konstant det är förrän vi sätter in värden. $v(0) = v_0 \implies C = v_0$, vilket betyder att vi har funktionen

$$v(t) = v_0 e^{-kt/m}.$$

15.13

Om vi tittar på 15.12 och sätter $v(t) = u(t)$, $m = C$, $k = 1/R$, och $v_0 = E$ får vi direkt funktionen

$$u(t) = Ee^{-t/(RC)}.$$

För att hitta när spänningen har halverats löser vi ut t från

$$Ee^{-t/(RC)} = E/2 \implies -\frac{t}{RC} = \ln\frac{1}{2} \implies t = RC\ln 2.$$

15.14

$$E = Ri + L\frac{di}{dt} \implies \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L},$$

härur finner vi den integrerande faktorn

$$\mu(t) = e^{\int \frac{R}{L}\,dt} = e^{Rt/L} \implies \left(e^{Rt/L}i\right)' = \frac{E}{L}e^{Rt/L} \implies$$
$$\implies e^{Rt/L}i = \frac{E}{R}e^{Rt/L} + C \implies i(t) = \frac{E}{R} + Ce^{-Rt/L},$$

och $i(0) = 0 \implies C = -E/R$, vilket ger strömmen som

$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{Rt/L}\right).$$

15.15

Låt föroreningens volym betecknas med $y(t)$, då ges koncentrationen av $y/3000$. Vi kan nu skriva

$$y' = V_{in} - V_{ut},$$

och eftersom inget förorenat vatten tas in är $V_{in} = 0$. Vidare är mängden förorenat vatten som lämnar bassängen koncentrationen förorenat vatten gånger utflödet, alltså $V_{ut} = \frac{y}{3000} \cdot 50 = \frac{y}{60}$. Vi får nu differentialekvationen (lösningen ser man direkt (man kan använda integrerande faktor om man vill))

$$y' = -\frac{1}{60}y \implies y(t) = Ce^{-t/60},$$

vid tiden $t = 0$ är $y(0)/3000 = 0,05 \implies y(0) = 150$, vilket ger oss att föroreningens volym beskrivs av

$$y(t) = 150e^{-t/60},$$

villkoret att koncentrationen understiger 1% är ekvivalent med att volymen understiger 30 liter. Alltså ska

$$150e^{-t/60} = 30 \implies -\frac{t}{60} = \ln\frac{1}{5} \implies t = 60\ln 5 \text{ min} = \ln 5 \text{ h}.$$

15.16

Om $y(t)$ beskriver antalet ton förorening vid tiden t år, så gäller det att

$$y' = 3 - 0,05y,$$

eftersom det ökar med 3 ton varje år, samtidigt som 5% försvinner. Denna DE kan vi lösa med en integrerande faktor $\mu(t) = e^{\int 0,05\ dt} = e^{0,05t}$, vilket ger oss följande

$$(e^{0,05t}y)' = 3e^{0,05t} \implies e^{0,05t}y = 60e^{0,05t} + C \implies y(t) = 60 + Ce^{-0,05t}.$$

Inga föroreningar då $t = 0$ ger att $C = 60$ och vi skall bestämma $y(40)$.

$$y(t) = 60(1 - e^{-0,05t}) \implies y(40) = 60(1 - e^{-2}) \text{ ton}.$$

15.17

Beteckna antalet mjuka julklappar vid tiden t med $y(t)$. Eftersom det alltid finns M julklappar, så kan vi enkelt uttrycka antalet hårda klappar som $M - y(t)$. Detta och informationen om proportionalitet ger oss att

$$y' = \text{(mjuka klappar in) - (mjuka klappar ut)} = K(M - y) - 2Ky = KM - 3Ky \implies$$

$$\implies \text{integrerande faktor } \mu(t) = e^{\int 3K\ dt} = e^{3Kt} \implies$$

$$\implies \left(e^{3Kt}y\right)' = KMe^{3Kt} \implies e^{3Kt}y = \frac{M}{3}e^{3Kt} + C \implies y(t) = \frac{M}{3} + Ce^{-3Kt},$$

och vi vet att hälften är mjuka från början, så

$$y(0) = \frac{M}{2} \implies C = \frac{1}{6} \implies y(t) = M\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)e^{-3Kt}.$$

15.18

Låt kulans hastighet betecknas med $v(x)$, där x beskriver hur långt in i väggen som kulan har kommit (alltså är $v(0) = v_0$). Retardation är negativ acceleration, vilket betyder att

$$\frac{dv}{dt} = -kv \implies [15.12,\ m = 1] \implies v(x) = v_0e^{-kt}.$$

Vi vill att kulan precis ska ta sig igenom en vägg med tjocklek b, och därför vill vi att gränsvärdet av sträckan som kulan har färdats då $t \to \infty$ ska vara lika med b. Vi börjar med att integrera för att få sträckan som en funktion av tiden.

$$s(t) = \int_0^t v_0e^{-k\tilde{t}}\ d\tilde{t} = \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right) \to \frac{v_0}{k}, \text{ då } t \to \infty.$$

Alltså skall det gälla att

$$b = \frac{v_0}{k}.$$

15.19

a)

Lösning finns redan.

b)

$$3y^2\frac{dy}{dx} = 2x \implies 3y^2\ dy = 2x\ dx \implies \int 3y^2\ dy = \int 2x\ dx \implies$$
$$\implies y^3 = x^2 + C \implies y(x) = \sqrt[3]{x^2 + C},$$
$$y(1) = 2 \implies C = 7 \implies y(x) = \sqrt[3]{x^2 + 7}.$$

c)

$$y\frac{dy}{dx} = 3x^2 \implies y\ dy = 3x^2\ dx \implies \int y\ dy = \int 3x^2\ dx \implies$$
$$\implies \frac{1}{2}y^2 = x^3 + C_1 \implies y(x) = {}_{(-)}^{+}\sqrt{2x^2 + C},$$

där den negativa roten utesluts eftersom $y(1) = 2 > 0$, och samma villkor ger att $C = 2$. Alltså är

$$y(x) = \sqrt{2x^2 + 2}.$$

d)

$$y^2\frac{dy}{dx} = 2x \implies y^2\ dy = 2x\ dx \implies \int y^2\ dy = \int 2x\ dx \implies$$
$$\implies \frac{1}{3}y^3 = x^2 + C_1 \implies y(x) = \sqrt[3]{3x^2 + C},$$
$$y(1) = 2 \implies C = 5 \implies y(x) = \sqrt[3]{3x^2 + 5}.$$

15.20

Lösning finns redan.

15.21

a)

$$y\frac{dy}{dx} = -x \implies y\ dy = -x\ dx \implies \int y\ dy = \int -x\ dx \implies$$
$$\implies \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C_1 \implies x^2 + y^2 = C \text{ (en cirkel!)}$$

b)

$$\frac{dy}{dx} = e^{x+y} = e^x e^y \implies e^{-y}\ dy = e^x\ dx \implies \int e^{-y}\ dy = \int e^x\ dx \implies$$
$$\implies -e^{-y} = e^x + C_1 \implies -y = \ln(-e^x + C) \implies y(x) = -\ln(C - e^x).$$

c)

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \implies \frac{dy}{y^2} = dx \implies \int \frac{dy}{y^2} = \int dx \implies$$
$$\implies -\frac{1}{y} = x + C.$$

Det är enklare att bestämma konstanten när vi har denna form, och $y(1) = 1 \implies -1 = 1 + C \implies C = -2$, vilket ger oss att

$$-\frac{1}{y} = x - 2 \implies y(x) = \frac{1}{2-x}.$$

d)

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \implies \text{[se ovan]} \implies -\frac{1}{y} = x + C,$$

men här ser vi att villkoret $y(1) = 0$ gör så att vi delar med 0, alltså är måste lösningen vara den triviala nollfunktionen: $y(x) = 0$.

e)

$$x^2 y\frac{dy}{dx} = 1 + x^2 \implies y\ dy = \left(\frac{1}{x^2} + 1\right)\ dx \implies \int y\ dy = \int \left(\frac{1}{x^2} + 1\right)\ dx \implies$$
$$\implies \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{x} + x + C_1 \implies y(x) = {}_{(-)}^{+}\sqrt{2x - \frac{2}{x} + C},$$

återigen ignoreras den negativa roten eftersom $y(2) = 2 > 0$. Villkoret ger också att

$$4 = 4 - 1 + C \implies C = 1 \implies y(x) = \sqrt{2x - \frac{2}{x} + 1}.$$

15.22

a)

Först noterar vi att

$$\frac{1}{y^2-1} = \frac{(y+1)-(y-1)}{2(y-1)(y+1)} = \frac{1}{2(y-1)} - \frac{1}{2(y+1)}.$$

$$\frac{dy}{dx} = (y^2-1)x \implies \frac{dy}{y^2-1} = x\ dx \implies \int \left(\frac{1}{2(y-1)} - \frac{1}{2(y+1)}\right)\ dy = \int x\ dx \implies$$
$$\implies \frac{1}{2}\ln|y-1| - \frac{1}{2}\ln|y+1| = \frac{1}{2}x^2 \implies \ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = x^2 + C_1 \implies$$

$$\implies \frac{y-1}{y+1} = \pm e^{x^2} + C_1 = \pm e^{C_1} e^{x^2} = Ce^{x^2},$$

här ger $y(0) = 0$ direkt att $C = -1$, vilket betyder att vi bara behöver lösa ut y nu.

$$\frac{y-1}{y+1} = -e^{x^2} \implies y - 1 = -(y+1)e^{x^2} \implies (1+e^{x^2})y = 1 - e^{x^2} \implies y(x) = \frac{1-e^{x^2}}{1+e^{x^2}}.$$

b)

$$x\frac{dy}{dx} = y^2 - 2y \implies \frac{dy}{y^2-2y} = \frac{dx}{x} \implies$$

$$\implies \left[\frac{1}{y^2-2y)} = \frac{y-(y-2)}{2y(y-2)} = \frac{1}{2(y-2)} - \frac{1}{2y}\right] \implies$$

$$\implies \int \left(\frac{1}{2(y-2)} - \frac{1}{2y}\right) dy = \int \frac{dx}{x} \implies \frac{1}{2}\ln|y-2| - \frac{1}{2}\ln|y| = \ln|x| + C_1 \implies$$

$$\implies \ln\left|\frac{y-2}{y}\right| = 2\ln|x| + C_2 = \ln x^2 + C_2 \implies \frac{y-2}{y} = \pm e^{\ln x^2 + C_2} = Cx^2 \implies$$

$$\implies 1 - \frac{2}{y} = Cx^2 \implies \frac{2}{y} = 1 - Cx^2 \implies y(x) = \frac{2}{1-Cx^2}.$$

Om man tittar på $\frac{2}{y} = 1 - Cx^2$, och sätter in att $y(1) = 1$ får man snabbt att $C = -1$, vilket betyder att

$$y(x) = \frac{2}{1+x^2}.$$

15.23

Differentialekvationer är linjära om alla y och y' (och högre ordningsderivator om det finns) bara förekommer för sig. Alltså att man har något på formen:

$$f(x)y' + g(x)y = h(x),$$

här är koefficienterna inte beroende av y:n eller sådant, vilket gör DE:n linjär. Om ekvationen har formen $f(y)y' = g(x)$, så är den separabel (allting med y är på en sida, och allt med x är på den andra sidan), men den är endast linjär om $f(y) = C$, för någon konstant C. Med denna information bör man kunna lösa dessa uppgifter.

a)

Linjär.

b)

Ej linjär, men den är uppenbart separabel.

c)

Linjär, koefficienten får bero på x.

d)

Ej linjär (y^2 gör den icke-linjär), men den är separabel eftersom högerledet inte beror på x:

$$y' + y^2 = 3 \implies y' = 1 \cdot (3 - y^2) \implies \frac{y'}{3 - y^2} = 1.$$

e)

Ej linjär, och inte separabel, eftersom vi har $x^2 + y^2$ i högerledet.

f)

Ej linjär (både yy' och e^y), men den är separabel:

$$xyy' = e^y \sin x \implies ye^{-y}y' = \frac{\sin x}{x}.$$

15.24

Kraftekvationen:

$$m\frac{dv}{dt} = -5v^2 \implies [m = 2] \implies \int \frac{-2}{v^2}\, dv = \int 5\, dt \implies \frac{2}{v} = 5t + C \implies$$

$$\implies v(t) = \frac{2}{C + 5t} = [v(0) = 3 \implies C = 2/3] = \frac{2}{2/3 + 5t} = \frac{6}{2 + 15t}.$$

15.25

a)

Igen blir kraftekvationen

$$m\frac{dv}{dt} = -kv^\alpha \implies \int mv^{-\alpha}\, dv = \int -k\, dt \implies [\alpha \neq 1] \implies \frac{m}{1-\alpha}v^{1-\alpha} =$$

$$= -kt + C_1 \implies v^{1-\alpha} = k(\alpha - 1)t/m + C \implies [v(0) = v_0 \implies C = v_0^{1-\alpha}] \implies$$

$$\implies v(t) = \left(\frac{k(\alpha - 1)}{m}t + v_0^{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

b)

$$v(t)^{1-\alpha} = k(\alpha - 1)t/m + v_0^{1-\alpha} \implies k = \frac{mv(t)^{1-\alpha} - mv_0^{1-\alpha}}{(\alpha - 1)t} = ... = \frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{10}}.$$

c)

Kroppen stannar när/om $v(t) = 0$, för $t \geq 0$.

$$\left(\frac{k(\alpha - 1)}{m}t + v_0^{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = 0 \implies [\alpha \neq 1] \implies \frac{k(\alpha - 1)}{m}t + v_0^{1-\alpha} = 0 \implies$$

$$\implies t = -\frac{m}{k(\alpha-1)}v_0^{1-\alpha} = -\frac{mv_0^{1-\alpha}}{k(\alpha-1)}.$$

Här ser vi att $t < 0$ om $\alpha > 1$, vilket betyder att lösning saknas (kroppen stannar ej). Om $\alpha < 1$ stannar kroppen vid

$$t = -\frac{mv_0^{1-\alpha}}{k(\alpha-1)} = \frac{mv_0^{1-\alpha}}{k(1-\alpha)}.$$

15.26

a)

Kraftekvationen, igen, (hastigheten är positiv i samma riktning som tyngdkraften verkar)

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2.$$

b)

Sätt $t^* = \frac{t}{T} \implies t = Tt^*$, och $v^*(t^*) = \frac{v(t)}{V} \implies v = Vv^*$. Vidare är

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d(Vv^*)}{d(Tt^*)} = \frac{V}{T}\frac{dv^*}{dt^*}.$$

Insättning i kraftekvationen:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2 = m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2$$

$$m\frac{V}{T}\frac{dv^*}{dt^*} = mg - kV^2(v^*)^2 \implies \frac{V}{gT}\frac{dv^*}{dt^*} = 1 - \frac{kV^2}{mg}(v^*)^2 \implies$$

$$\implies \begin{cases} V/(gT) = 1, \\ kV^2/(mg) = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} V = gT, \\ kV^2 = mg \end{cases} \implies \begin{cases} T = V/g = \sqrt{m/(gk)}, \\ V = \sqrt{mg/k} \end{cases}$$

c)

Jag kommer att skriva $v^* = v$ och $t^* = t$, eftersom det går snabbare. Om vi antar att hastigheten närmar sig ett fixt värde vet vi att $\frac{dv}{dt} \to 0$, då $t \to \infty$, vilket betyder att vi direkt kan lösa ut gränsvärdet till $v \to {}_{(-)}^{+}1$, då $t \to \infty$ (oavsett vad begynnelsehastigheten är). Eftersom man faller nedåt utesluts den negativa (och för att $v > 1$). Men eftersom vi ska fortfarande lösa ekvationen, dock noterar vi först att

$$\frac{1}{1-v^2} = \frac{(1-v)+(1+v)}{2(1-v)(1+v)} = \frac{1}{2(v+1)} + \frac{1}{2(v-1)}.$$

(Anledningen till att jag gör dessa omskrivningar är för att jag inte orkar ställa upp en formell partialbrpksuppdelning.)

$$\frac{dv}{dt} = 1 - v^2 \implies \frac{dv}{1-v^2} = dt \implies \int\left(\frac{1}{2(v+1)} + \frac{1}{2(v-1)}\right) = \int dt \implies$$

$$\implies \frac{1}{2}\ln|1+v| - \frac{1}{2}\ln|1-v| = t + C_1 \implies \ln\left|\frac{1+v}{1-v}\right| = 2t + C_2 \implies$$

$$\implies \frac{1+v}{1-v} = \pm e^{2t+C_2} = Ce^{2t},$$

och $v(0) = 3 \implies C = -2$, vilket ger oss att

$$\frac{1+v}{1-v} = -2e^{2t} \implies 1 + v = 2(v-1)e^{2t} \implies$$

$$\implies (1 - 2e^{2t})v = -2e^{2t} - 1 \implies v(t) = \frac{2e^{2t}+1}{2e^{2t}-1},$$

med $v(0) = 0$ får man istället $C = 1$, och lösningen

$$\frac{1+v}{1-v} = e^{2t} \implies 1 + v = (1-v)e^{2t} \implies$$

$$\implies (1 + e^{2t})v = e^{2t} - 1 \implies v(t) = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1} = \frac{1-e^{-2t}}{1+e^{-2t}}.$$

Här ser vi, i enlighet med resonemanget ovan, att båda dessa funktioner går mot 1 då $t \to \infty$.

15.27

Om vi betecknar vattendjupet efter t minuter med $y(t)$ får vi DE:n

$$\frac{dy}{dt} = -k\sqrt{y} \implies \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int -k\ dt \implies 2\sqrt{y} = -kt + C \implies y(t) = \frac{1}{4}\left(C - kt\right)^2.$$

Vi har villkoren $y(0) = 7$ dm och $y(4) = 0$ dm. Det första ger direkt att $7 = \frac{C^2}{4} \implies [C > 0] \implies \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$, och det andra ger då att

$$\frac{1}{4}(2\sqrt{7} - 4k)^2 = 0 \implies k = \frac{\sqrt{7}}{2}\sqrt{\mathrm{dm}}/\mathrm{min}.$$

15.28

Vi antar att klotet har radien 1, och man kan uttrycka radien som en funktion av höjden: $r = \sqrt{1-(h-1)^2} = \sqrt{2h-h^2}$. Detta tillsammans med skivformeln gör att volymen av en klotkalott, med höjden h, kan skrivas som

$$V(h) = \pi\int_0^h (\sqrt{2\tilde{h} - \tilde{h}^2})^2\ d\tilde{h} = \pi\left[\tilde{h}^2 - \frac{1}{3}\tilde{h}^3\right]_0^h = \pi\left(h^2 - \frac{1}{3}h^3\right).$$

Vi använder nu Torricellis lag:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt} = \pi\left(2h - h^2\right)\frac{dh}{dt} = -k_1\sqrt{h} \implies (2h^{1/2} - h^{3/2})\frac{dh}{dt} = -k \implies$$

$$\implies \int (2h^{1/2} - h^{3/2})\ dh = \int -k\ dt \implies \frac{4}{3}h^{3/2} - \frac{2}{5}h^{5/2} = C - kt.$$

Vi kan bestämma konstanterna med villkoren $h(0) = 2$ och $h(1) = 1$, eftersom vi vet att tanken är full från början och halvfull efter en timme. Om man sätter in dessa villkor finner man att $C = \frac{16\sqrt{2}}{15}$ och att $k = \frac{16\sqrt{2}-14}{15}$. Vi vill nu veta när

$$h(t) = 0 \implies 0 = C - kt \implies t = \frac{C}{k} = \frac{\frac{16\sqrt{2}}{15}}{\frac{16\sqrt{2}-14}{15}} = \frac{8\sqrt{2}}{8\sqrt{2}-7} =$$

$$= \frac{8\sqrt{2}(8\sqrt{2}+7)}{(8\sqrt{2}-7)(8\sqrt{2}+7)} = \frac{128+56\sqrt{2}}{128-49} = \frac{128+56\sqrt{2}}{79} \text{ h.}$$

15.29

Vi får direkt DE:n

$$\frac{dc}{dt} = -kc^2 \implies \int -\frac{dc}{c^2} = \int k\ dt \implies \frac{1}{c} = kt + A \implies$$

$$\implies \left[c(0) = c_0 \implies A = \frac{1}{c_0}\right] \implies \frac{1}{c} - \frac{1}{c_0} = kt.$$

15.30

Beteckna den mängden av kemikalie som har löst sig efter t h med $y(t)$. Då ges koncentrationen av löst kemikalie av $y/100$, om den totala volymen är 100 ml, och vi vet att $50/100$ är koncentrationen i en mättad lösning. Den oupplösta mängden kommer ges av $30 - y$ (eftersom vi har totalt 30 g kemikalie). Vi har då DE:n

$$\frac{dy}{dt} = k(30-y)(\frac{50}{100} - \frac{y}{100}) \implies \frac{1}{(30-y)(50-y)}\frac{dy}{dt} = \frac{k}{100} \implies$$

$$\implies \int \frac{dy}{(y-30)(y-50)} = \frac{k}{100}\ dt \implies \left[\frac{1}{(y-30)(y-50)} = \frac{(y-30)-(y-50)}{20(y-30)(y-50)} =\right.$$

$$\left.= \frac{1}{20(y-50)} - \frac{1}{20(y-30)}\right] \implies \int \left(\frac{1}{20(y-50)} - \frac{1}{20(y-30)}\right) dy = \int \frac{k}{100}\ dt \implies$$

$$\implies \frac{1}{20}\ln|y-50| - \frac{1}{20}\ln|y-30| = \frac{kt}{100} + C_1 \implies \ln\left|\frac{y-50}{y-30}\right| = \frac{kt}{5} + C_2 \implies$$

$$\implies \frac{y-50}{y-30} = \pm e^{\frac{kt}{5}+C_2} = Ce^{kt/5} \implies [y(0) = 0 \implies C = 5/3] \implies$$

$$\implies y - 50 = \frac{5}{3}(y-30)e^{kt/5} \implies (3 - 5e^{kt/5})y = 150 - 150e^{kt/5} \implies$$

$$\implies y(t) = \frac{150 - 150e^{kt/5}}{3 - 5e^{kt/5}}.$$

Vi vet att $y(2) = 10$, vilket efter en del algebra ger att $k = \frac{5}{2}\ln\frac{6}{5} = \ln\left(\frac{6^{5/2}}{5^{5/2}}\right)$. Vi vill nu beräkna $y(5)$,

$$y(5) = \frac{150 - 150e^{\ln\left(\frac{6^{5/2}}{5^{5/2}}\right)}}{3 - 5e^{\ln\left(\frac{6^{5/2}}{5^{5/2}}\right)}} = \frac{150 - 150 \cdot \frac{6^{5/2}}{5^{5/2}}}{3 - 5 \cdot \frac{6^{5/2}}{5^{5/2}}} = \frac{150(6^{5/2} - 5^{5/2})}{5 \cdot 6^{5/2} - 3 \cdot 5^{5/2}}.$$

15.31

Vi kan direkt ta reda på K genom att utnyttja det faktum att populationen närmar sig ett fixt värde efter lång tid. Det måste då gälla att $dy/dt = 0$, och därmed är

$$0 = r \cdot 10^5(K - 10^5) \implies [r \neq 0] \implies K = 10^5.$$

Vi behöver dock lösa differentialekvationen lite för att bestämma r.

$$\frac{dy}{dt} = ry(K - y) \implies \int \frac{dy}{y(K-y)} = \int r\ dt.$$

Partialbråksuppdelning:

$$\frac{1}{y(K-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{K-y} \implies 1 = A(K-y) + By \implies A = B = \frac{1}{K},$$

vilket ger oss att

$$\frac{1}{K}\int\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{K-y}\right) = \int r\ dt \implies \ln|y| - \ln|K-y| = rKt + C_1 \implies$$

$$\implies \ln\left|\frac{y}{K-y}\right| = rKt + C_1 \implies \frac{y}{K-y} = \pm e^{rKt+C_1} = Ce^{rKt} \implies$$

$$\implies \left[y(0) = 10^4 \implies C = \frac{10^4}{10^5 - 10^4} = \frac{1}{9}\right] \implies e^{rKt} = \frac{9y}{K-y} \implies$$

$$\implies r = \frac{1}{Kt}\ln\frac{9y}{K-y} = [y(1) = 2 \cdot 10^4] = 10^{-5}\ln\frac{9}{4}.$$

15.32

Lösning finns redan.

15.33

Vi börjar med att hämta begynnelsevillkoret $y(0) = 1$, och sedan använder vi analysens huvudsats:

$$y' = y \implies y(x) = Ce^x = [y(0) = 0] = e^x.$$

15.34

Vi börjar med att sätta in $x = 1$, vilket ger att $f(1) = 1$ (integralen från 1 till 1 är 0). Analysens huvudsats ger nu att

$$(xf(x))' = 1 + \frac{x}{1+x}f(x) \implies xf' + f = 1 + \frac{x}{1+x}f \implies f' + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)f = \frac{1}{x},$$

härur finner vi den integrerande faktorn

$$\mu(x) = e^{\int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\ dx} = e^{\ln x - \ln\frac{1}{x+1}} = e^{\ln\frac{x}{x+1}} = \frac{x}{x+1} \implies$$

$$\implies \left(\frac{x}{x+1}f\right)' = \frac{1}{x}\frac{x}{x+1} = \frac{1}{x+1} \implies \frac{x}{x+1}f = \ln|x+1| + C = [x \geq 1] =$$
$$= \ln(x+1) + C \implies [f(1) = 1 \implies C = \frac{1}{2} - \ln 2] \implies$$
$$\implies f(x) = \frac{x+1}{x}\left(\ln(x+1) + \frac{1}{2} - \ln 2\right).$$

15.35

Vi konstaterar att $y(0) = 2$, sedan ger analysens huvudsats att

$$y'(x) - 0 - e^{y(x)-x} = 0 \implies \frac{dy}{dx} = e^y e^{-x} \implies \int e^{-y}\,dy = \int e^{-x}\,dx \implies$$
$$\implies -e^{-y} = -e^{-x} + C \implies [y(0) = 2 \implies C = 1 - e^{-2}] \implies e^{-y} = e^{-x} + e^{-2} - 1 \implies$$
$$\implies y(x) = -\ln(e^{-x} + e^{-2} - 1).$$

Definitionsmängden ges av alla x som uppfyller att

$$e^{-x} + e^{-2} - 1 > 0 \iff -x > \ln(1 - e^{-2}) \iff x < -\ln(1 - e^{-2}).$$

15.36

$$y'' = 4e^{2x} + x^2 \implies y' = \int y''\,dx = 2e^{2x} + \frac{1}{3}x^3 + A \implies y(x) = \int y'\,dx =$$
$$= e^{2x} + \frac{1}{12}x^4 + Ax + B,$$
$$\begin{cases} y(0) = 2, \\ y'(0) = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} 1 + B = 2, \\ 2 + A = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} A = -1, \\ B = 1 \end{cases} \implies$$
$$\implies y(x) = e^{2x} + \frac{1}{12}x^4 - x + 1.$$

15.37

För alla dessa uppgifter ska man bara ställa upp den karakteristiska ekvationen/polynomet och sedan bestämma dess rötter, därefter vet man direkt vilken form lösningen har.

a)

Lösning finns redan.

b)

Lösning finns redan.

c)

Lösning finns redan.

d)

Karakteristiska ekvationen (KE):

$$r^2 - r - 2 = 0 \implies \begin{cases} r = -1, \\ r = 2 \end{cases} \implies \text{[olika reella rötter]} \implies y(x) = Ae^{-x} + Be^{2x}.$$

e)

$$y'' - 10y' + 61y = 0 \implies \text{KE: } r^2 - 10r + 61 = 0 \implies$$
$$\implies r = 5 \pm 6i \implies \text{[komplexa rötter]} \implies y(x) = Ce^{(5+6i)x} + De^{(5-6i)x} =$$
$$= e^{5x}(Ce^{6ix} + De^{-6ix}) = e^{5x}(A\cos 6x + B\sin 6x).$$

f)

$$y'' - 2y' + 5y = 0 \implies \text{KE: } r^2 - 2r + 5 = 0 \implies$$
$$\implies r = 1 \pm 2i \implies \text{[komplexa rötter]} \implies y(x) = e^x(A\cos 2x + B\sin 2x).$$

g)

$$y'' + 6y' + 9y = 0 \implies \text{KE: } r^2 + 6r + 9 = 0 \implies$$
$$\implies r = -3 \implies \text{[dubbelrot]} \implies y(x) = (Ax + B)e^{-3x}.$$

15.38

a)

$$y'' - 4y = 0 \implies \text{KE: } r^2 - 4 = 0 \implies r = \pm 2 \implies$$
$$\implies y(x) = Ae^{-2x} + Be^{2x} \implies y'(x) = -2Ae^{-2x} + 2Be^{2x},$$
$$\begin{cases} y(0) = 0, \\ y'(0) = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} A + B = 0, \\ -2A + 2B = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} A = -\frac{1}{4}, \\ B = \frac{1}{4} \end{cases} \implies y(x) = \frac{1}{4}(e^{2x} - e^{-2x}).$$

b)

15.37 g) ger att $y(x) = (Ax + B)e^{-3x} \implies y'(x) = Ae^{-3x} - 3(Ax + B)e^{-3x} = (A - 3B - 3Ax)e^{-3x}$.

$$\begin{cases} y(0) = -1, \\ y'(0) = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} B = -1, \\ A - 3B = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} A = -2, \\ B = -1 \end{cases} \implies y(x) = -(2x + 1)e^{-3x}.$$

15.39

För båda deluppgifterna får vi den karakteristiska ekvationen $r^2 + 4 = 0 \implies r = \pm 2i$, vilket betyder att $y(x) = A\cos 2x + B\sin 2x \implies y'(x) = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$, sedan gäller det bara att sätta in randvillkoren.

a)

$$\begin{cases} y(0) = 0, \\ y(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = 0, \\ A\cos\pi + B\sin\pi = 0 + 0 = 0, \end{cases}$$

alltså är randvillkoren uppfyllda oavsett värdet på B. Vi har då att $y(x) = B\sin 2x$.

b)

$$\begin{cases} y'(0) = 0, \\ y'(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 2B = 0, \\ -2A\sin\pi + 2B\cos\pi = 0 + 0 = 0, \end{cases}$$

alltså är randvillkoren uppfyllda oavsett värdet på A. Vi har då att $y(x) = A\cos 2x$.

15.40

Lösning finns redan.

15.41

Vi har tre fall som ger olika sorters lösningar och som behöver undersökas. Dessa är $\lambda < 0$, $\lambda = 0$, och $\lambda > 0$.

$\underline{\lambda < 0}$: Vi kan för tydlighetens skull sätta $\lambda = -\omega^2$, där $\omega > 0$. Den karakteristiska ekvationen har nu två reella lösningar: $r = \pm\omega$, vilket betyder att funktionen har formen $y(x) = Ce^{-\omega x} + De^{\omega x} = A\cosh\omega x + B\sinh\omega x \implies y'(x) = \omega A\sinh\omega x + \omega B\cosh\omega x$. Det som är bra med att skriva det med hyperboliska funktioner är att $\cosh 0 = 1$ och $\sinh 0 = 0$. Randvillkoren ger nu att

$$\begin{cases} y'(0) = 0, \\ y'(l) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \omega B = 0 \implies B = 0, \\ \omega A\sinh\omega l = 0 \implies [\omega > 0,\ \sinh\omega l \neq 0] \implies A = 0. \end{cases}$$

Vi har alltså bara den triviala lösningen $y(x) = 0$

$\underline{\lambda = 0}$: Nu får vi ekvationen $y'' = 0 \implies y'(x) = A \implies y(x) = Ax + B$. Randvillkoren är här uppfyllda om $A = 0$, men B kan bara skilt från 0, vilket betyder att vi har en icke-trivial lösning $y(x) = B$.

$\underline{\lambda > 0}$: Sätt $\lambda = \omega^2$, där $\omega > 0$, vilket nu kommer att ge de komplexa lösningarna $r = \pm\omega i$ till den karakteristiska ekvationen, vilket betyder att vår funktion har formen

$$y(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x \implies y'(x) = -\omega A\sin\omega x + \omega B\cos\omega x,$$

vilket med randvillkoren ger följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} y'(0) = 0, \\ y'(l) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \omega B = 0 \implies B = 0, \\ -\omega A\sin\omega l = 0 \end{cases} \implies [A \neq 0,\ \omega > 0] \implies \sin\omega l = 0,$$

alltså ska $\omega l = k\pi$, där k är ett positivt heltal (positivt eftersom vi tittar på $\lambda > 0$).

$$\omega l = k\pi \implies \omega = \sqrt{\lambda} = \frac{k\pi}{l} \implies \lambda = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2.$$

Om vi sammanställer allt detta får vi den lösningen

$$y(x) = A\cos\frac{k\pi x}{l},\ \ k = 0, 1, 2, ...$$

Om $k = 0$ blir cosinus 1, vilket ger oss konstanten.

Om man har läst kursen Kontinuerliga System (vilket kanske är konstigt om man har gjort innan man har läst Endimensionell Analys), så kan man känna igen uppgift 15.40 och 15.41 som att hitta egenvärden samt motsvarande egenfunktioner till differentialoperatorn $T = -\frac{d^2}{dx^2}$, med homogena Dirichletvillkor (15.40) eller homogena Neumannvillkor (15.41). Med ytterligare lite teori från den kursen vet man att minus andraderivatan är en Sturm-Liouville-operator och randvillkoren har korrekt form, vilket betyder att man direkt kan säga att operator är positivt semidefinit, vilket betyder att $\lambda \geq 0$, vilket vi ser i båda uppgifterna (inga icke-triviala lösningar erhålls för $\lambda < 0$).

15.42

Karakteristiska ekvationen:

$$r^2 + \frac{g}{L} = 0 \implies r = \pm\sqrt{\frac{g}{L}}i = \pm\omega i \implies \alpha(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

och $\alpha'(t) = -\omega A\sin\omega t + \omega B\cos\omega t$. Att det inte är någon starthastighet motsvarar att $\alpha'(0) = 0 \implies B = 0$, och $3° = \frac{\pi}{60}$ radianer. Alltså ska $\alpha(0) = \frac{\pi}{60} \implies A = \frac{\pi}{60}$. Vidare är $L = 0,2 \implies \omega\sqrt{5g}$, vilket ger oss lösningen

$$\alpha(t) = \frac{\pi}{60}\cos\left(\sqrt{5g}t\right) \implies \alpha(1) = \frac{\pi}{60}\cos\sqrt{5g}.$$

15.43

Karakteristiska ekvationen är

$$r^2 + \frac{c}{m}r + \frac{k}{m} = 0 \implies r = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} \implies$$

$$\implies \frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m} = 0 \implies \frac{c}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

detta ger att $r = -\frac{c}{2m}$, och vi får du funktionen

$$y(t) = (At + B)e^{-ct/2m} \implies y'(t) = \left(A - \frac{Act}{2m} - \frac{Bc}{2m}\right)e^{-ct/2m}.$$

Extremvärden ges då $y'(t) = 0$, alltså när

$$\left(A - \frac{Act}{2m} - \frac{Bc}{2m}\right)e^{-ct/2m} = 0 \implies A - \frac{Act}{2m} - \frac{Bc}{2m} = 0,$$

vilket är en linjär ekvation i t (om $A \neq 0$), vilket betyder att det finns precis ett extremvärde (om $A \neq 0$).

15.44

Vi använder tipset, vilket ger oss ekvationen

$$i'' + \frac{R}{L}i' + \frac{1}{LC}i = 0 \implies \text{KE: } r^2 + \frac{R}{L}r + \frac{1}{LC} = 0 \implies r = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \implies$$

$$\implies \frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} = 0 \implies R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2\sqrt{\frac{0,2}{0,8 \cdot 10^{-6}}} = 1 \text{ k}\Omega.$$

15.45

Lösning finns redan.

15.46

Lösning finns redan.

15.47

För dessa ekvationer delar man upp problemet i två delproblem: den homogena lösningen, som är när högerledet är 0, och partikulärlösningen som bara ämnar att uppfylla högerledet.

a)

Homogen lösning:

$$y_h'' - 3y_h' + 2y_h = 0 \implies ... \implies y_h(x) = Ae^x + Be^{2x}.$$

Partikulärlösning: Vi har en konstant i högerledet och vår homogena lösning innehåller inte någon konstant, därför ansätter vi partikulärlösningen $y_p = C \implies y_p' = y_p'' = 0 \implies y_p'' - 3y_p' + 2y_p = 2C = 6 \implies C = 3$.

Detta ger den allmänna lösningen $y = y_h + y_p = Ae^x + Be^{2x} + 3$.

b)

Samma homogena lösning som a).

Partikulärlösning: Nu har vi ett andragradspolynom som högerled, varför vi ansätter $y_p = Cx^2 + Dx + E \implies y_p' = 2Cx + D \implies y_p'' = 2C$. Alltså ska

$$y_p'' - 3y_p' + 2y_p = 2C - 6Cx - 3D + 2Cx^2 + 2Dx + 2E = x^2 \implies$$

$$\implies 2Cx^2 + (-6C + 2D)x + (2C - 3D + 2E) \cdot 1 = 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 \cdot 1 \implies$$

$$\implies \begin{cases} 2C & = 1, \\ -6C + 2D & = 0, \\ 2C - 3D + 2E & = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} C = 1/2, \\ D = 3/2, \\ E = 7/4. \end{cases}$$

Den allmänna lösningen blir nu

$$y = y_h + y_p = Ae^x + Be^{2x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}.$$

c)

Den homogena lösningen fås snabbt till $y_h = Ae^{-x} + Be^{-2x}$. För partikulärlösningen tittar vi på högerledet, ser att det är ett tredjegradsplynom, och ansätter därför $y_p = Cx^3 + Dx^2 + Ex + F \implies y_p' = 3Cx^2 + 2Dx + E \implies y_p'' = 6Cx + 2D$. Insättning ger att

$$y_p'' + 3y_p' + 2y_p = 6Cx + 2D + 9Cx^2 + 6Dx + 3E + 2Cx^3 + 2Dx^2 + 2Ex + 2F =$$

$$= x^3 + x + 1 \implies 2Cx^3 + (9C + 2D)x^2 + (6C + 6D + 2E)x + (2D + 3E + 2F) =$$

$$= x^3 + 0 \cdot x^2 + x + 1 \implies$$

$$\implies \begin{cases} 2C & = 1, \\ 9C + 2D & = 0, \\ 6C + 6D + 2E & = 1, \\ 2D + 3E + 2F & = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} C = 1/2, \\ D = -9/4, \\ E = 23/4, \\ F = -47/8 \end{cases} \implies$$

$$\implies y = y_h + y_p = Ae^{-x} + Be^{-2x} + \frac{1}{8}(4x^3 - 18x^2 + 46x - 47).$$

d)

Om man löser den karakteristiska ekvationen $r^2 + 2r = 0$, får man den homogena lösningen $y_h = Ae^{-2x} + Be^0 = Ae^{-2x} + B$. Eftersom den homogena lösningen nu innehåller en konstant, och högerledet också gör det, kan vi inte bara ansätta ett polynom av samma grad, utan vi måste skapa ett linjärt oberoende för att få en ny lösning, vilket vi gör genom att multiplicera det polynom vi hade tänkt ansätta med x. Alltså om vi inte hade haft en konstant i den homogena lösningen hade vi ansatt $y_p = Cx^2 + Dx + E$, men nu ansätter vi istället $y_p = Cx^3 + Dx^2 + Ex \implies y_p' = 3Cx^2 + 2Dx + E \implies y_p'' = 6Cx + 2D$. Insättning:

$$y_p'' + 2y_p' = 6Cx + 2D + 6Cx^2 + 4Dx + 2E = x^2 + 1 \implies$$

$$\implies 6Cx^2 + (6C + 4D)x + (2D + 2E) = x^2 + 0 \cdot x + 1 \implies$$

$$\implies \begin{cases} 6C & = 1, \\ 6C + 4D & = 0, \\ 2D + 2E & = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} C = 1/6, \\ D = -1/4, \\ E = 3/4 \end{cases} \implies$$

$$\implies y = y_h + y_p = Ae^{-2x} + B + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x.$$

15.48

Lösning finns redan.

15.49

Jag kommer att direkt säga vad den homogena lösningen är i dessa uppgifter, eftersom det är väldigt enkelt att ta reda på, och dessutom inte det som uppgifterna går ut på.

a)

Homogen lösning: $y_h = Ae^x + Be^{2x}$. Eftersom högerledet har e^{5x} ansätter vi en partikulärlösning på formen $y_p = Ce^{5x}$. Insättning ger att

$$y_p'' - 3y_p' + 2y_p = 25Ce^{5x} - 15Ce^{5x} + 2Ce^{5x} = e^{5x} \implies 12C = 1 \implies C = \frac{1}{12} \implies$$

$$\implies y = y_h + y_p = Ae^x + Be^{2x} + \frac{1}{12}e^{5x}.$$

b)

Homogen lösning: $y_h = Ae^x + Be^{2x}$. Som vi ser här har högerledet en term som är linjärt beroende med den homogena lösningen, därför behöver vi skapa ett linjärt oberoende, vilket vi igen gör genom att ansätta x gånger partikulärlösningen. Vi ansätter alltså $y_p = Cxe^{2x} \implies y_p' = (2Cx + C)e^{2x} \implies y_p'' = (4Cx + 4C)e^{2x}$ (om man hade ansatt Ce^{2x} hade man fått att vänsterledet blir 0 när man sätter in, eftersom det är en del av den homogena lösningen (som per definition gör att vänsterledet blir 0)). Insättning ger att

$$y_p'' - 3y_p' + 2y_p = (4Cx + 4C)e^{2x} - (6Cx + 3C)e^{2x} + 2Cxe^{2x} = e^{2x} \implies C = 1.$$

Notera att alla termer med x tog ut varandra. Vi får lösningen

$$y = y_h + y_p = Ae^x + Be^{2x} + xe^{2x}.$$

c)

Homogen lösning: $y_h = (Ax + B)e^{-3x}$. För partikulärlösningen ansätter vi $y_p = Ce^{-x}$, vilket vid insättning ger att

$$y_p'' + 6y_p' + 9y_p = Ce^{-x} - 6Ce^{-x} + 9Ce^{-x} = 4e^{-x} \implies 4C = 4 \implies C = 1 \implies$$

$$\implies y = y_h + y_p = (Ax + B)e^{-3x} + e^{-x} \implies y' = (A - 3Ax - 3B)e^{-3x} - e^{-x}.$$

Begynnelsevillkoren ger att

$$\begin{cases} y(0) = 2, \\ y'(0) = -2 \end{cases} \implies \begin{cases} B + 1 = 2, \\ A - 3B - 1 = -2 \end{cases} \implies \begin{cases} A = 2, \\ B = 1 \end{cases} \implies$$

$$\implies y = (2x + 1)e^{-3x} + e^{-x}.$$

d)

Homogen lösning: $y_h = (Ax + B)e^{-x}$. I detta fall kan man tycka att det är lite jobbigt att se vad partikulärlösningen ska ha för form direkt, så därför kan man ansätta $y_p = z(x)e^{-x}$ (eftersom vi vet att det måste vara något polynom gånger e^{-x}), vilket efter derivering och insättning (se lösningen till 15.50 i boken) ger att $z'' = x \implies z = \frac{1}{6}x^3$, vi ignorerar integrationskonstanterna eftersom de kommer ha samma form som den homogena lösningen, alltså är $y_p = \frac{1}{6}x^3e^{-x}$, vilket betyder att

$$y = y_h + y_p = (\frac{1}{6}x^3 + Ax + B)e^{-x} \implies y' = (-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - Ax + A - B)e^{-x} \implies$$

$$\implies \begin{cases} y(0) = 1, \\ y'(0) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} B = 1, \\ A - B = 0 \end{cases} \implies A = B = 1 \implies$$

$$\implies y = (\frac{1}{6}x^3 + x + 1)e^{-x}.$$

15.50

Lösning finns redan.

15.51

Den homogena lösningen har formen: $y_h = Ae^{-x} + Be^{4x}$. Här har vi två delar till partikulärlösningen, så vi tittar på dem separat. För högerledet x ansätter vi ett förstagradspolynom $y_{p1} = ax + b \implies y'_{p1} = a \implies y''_{p1} = 0$, och vi får

$$y''_{p1} - 3y'_{p1} - 4y_{p1} = -3a - 4ax - 4b = 4x \implies \begin{cases} -4a = 4, \\ -3a - 4b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -1, \\ b = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

För den andra delen av partikulärlösningen har vi ännu en gång att den har samma form som en term i den homogena lösningen - alltså kan man antingen ansätta $y_{p2} = z(x)e^{-x}$, eller direkt $y_{p2} = cxe^{-x} \implies y'_{p2} = (-cx + c)e^{-x} \implies y''_{p2} = (cx - 2c)e^{-x}$.

$$y''_{p2} - 3y'_{p2} - 4y_{p2} = (cx - 2c)e^{-x} + (3cx - 3c)e^{-x} - 4cxe^{-x} = 5e^{-x} \implies$$

$$\implies -5c = 5 \implies c = -1 \implies$$

$$\implies y = y_h + y_{p1} + y_{p2} = Ae^{-x} + Be^{4x} - x + \frac{3}{4} - xe^{-x} \implies$$

$$\implies y' = -Ae^{-x} + 4Be^{4x} - 1 + xe^{-x} - e^{-x} \implies$$

$$\implies \begin{cases} y(0) = 1, \\ y'(0) = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} A + B + \frac{3}{4} = 1, \\ -A + 4B - 1 - 1 = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} A = 0, \\ B = \frac{1}{4} \end{cases} \implies$$

$$\implies y = \frac{1}{4}e^{4x} - x + \frac{3}{4} - xe^{-x} = \frac{1}{4}(3 + e^{4x}) - x(1 + e^{-x}).$$

15.52

Homogen lösning: $y_h = (Ax + B)e^{-x}$. Om vi för den första delen av partikulärlösningen tittar på ekvationen $y''_{p1} + 2y'_{p1} + y_{p1} = xe^{-x}$, så ser vi att det är samma som 15.49 d), vilket betyder att $y_{p1} = \frac{1}{6}x^3e^{-x}$. Den andra delen är en konstant, så vi ansätter att $y_{p2} = c \implies y'_{p2} = y''_{p2} = 0$. Insättning ger direkt att $y_{p2} = 1$.

$$y = y_h + y_{p1} + y_{p2} = (Ax + B)e^{-x} + \frac{1}{6}x^3 + 1 \implies y' = (A - Ax - B)e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 \implies$$

$$\implies y(0) = y'(0) = 0 \implies \begin{cases} B + 1 = 0, \\ A - B = 0 \end{cases} \implies A = B = -1 \implies$$

$$\implies y = (\frac{1}{6}x^3 - x - 1)e^{-x} + 1.$$

15.53

Lösning finns redan.

15.54

a)

Den homogena lösningen blir $y_h = Ae^{(1-\sqrt{2})x} + Be^{(1+\sqrt{2})x}$. För partikulärlösningen ser vi att högerledet är trigonometrisk funktion, så vi ansätter en allmän sådan med samma vinkelfrekvens, nämligen $y_p = a\cos 3x + b\sin 3x \implies y'_p = -3a\sin x + 3b\cos 3x \implies y''_p = -9a\cos 3x - 9b\sin 3x$. Insättning:

$$y''_p - 2y'_p - y_p = -9a\cos 3x - 9b\sin 3x + 6a\sin x - 6b\cos 3x - a\cos 3x - b\sin 3x = \sin 3x \implies$$

$$\implies (-9a - 6b - a)\cos 3x + (-9b + 6a - b)\sin 3x = 0 \cdot \cos 3x + 1 \cdot \sin 3x \implies$$

$$\implies \begin{cases} -10a - 6b = 0, \\ 6a - 10b = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 3/68, \\ b = -5/68 \end{cases} \implies$$

$$\implies y = y_h + y_p = Ae^{(1-\sqrt{2})x} + Be^{(1+\sqrt{2})x} + \frac{1}{68}(3\cos 3x - 5\sin 3x).$$

b)

Den homogena lösningen blir $y_h = A\cos 2x + B\sin 2x$, och högereledet innehåller trigonometriska funktioner, men med annan vinkelfrekvens, så vi kan ansätta $y_p = a\cos x + b\sin x$. Derivering och insättning:

$$y''_p + 4y_p = -a\cos x - b\sin x + 4a\cos x + 4b\sin x = 3a\cos x + 3b\sin x = 2\sin x - \cos x.$$

Utifrån detta ser vi enkelt att $a = -1/3$ och $b = 2/3$. Alltså är

$$y = y_h + y_p = A\cos 2x + B\sin 2x - \frac{1}{3}\cos x + \frac{2}{3}\sin x.$$

c)

Homogen lösning: $y_h = Ae^x + Be^{2x}$. Högerledet har inte samma form som den homogena lösning, vilket tillåter oss att ansätta partikulärlösningen $y_p = a\cos 2x + b\cos 2x$. Derivering och insättning ger denna gång att

$$y_p'' - 3y_p' + 2y_p = -4a\cos 2x - 4b\sin 2x + 6a\sin 2x - 6b\cos 2x + 2a\cos 2x + 2b\sin 2x =$$

$$= (-4a - 6b + 2a)\cos 2x + (-4b + 6a + 2b)\sin 2x = \cos 2x + \sin 2x \implies$$

$$\begin{cases} -2a - 6b = 1, \\ 6a - 2b = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1/10, \\ b = -1/5 \end{cases} \implies$$

$$\implies y = y_h + y_p = Ae^x + Be^{2x} + \frac{1}{10}(\cos 2x - 2\sin 2x).$$

d)

Homogen lösning: $y_h = e^x(A\cos 2x + B\sin 2x)$. Partikulärlösningen består av delar, en konstant; en trigonometrisk funktion. För konstanten ansätter vi $y_{p1} = c$, vilket direkt ger att $c = 1/5$. För den andra delen ansätter vi $y_{p2} = a\cos x + b\sin x$, vilket vid derivering och insättning fordrar ekvationen

$$y_{p2}'' - 2y_{p2}' + 5y_{p2} = -a\cos x - b\sin x + 2a\sin x - 2b\cos x + 5a\cos x + 5b\sin x = \sin x \implies$$

$$\implies \begin{cases} -a - 2b + 5a = 0, \\ -b + 2a + 5b = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1/10, \\ b = 5 \end{cases} \implies$$

$$\implies y = y_h + y_{p1} + y_{p2} = e^x(A\cos 2x + B\sin 2x) + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}(\cos x + 2\sin x).$$

e)

Den homogena lösningen blir samma som i b): $y_h = A\cos 2x + B\sin 2x$. Den partikulära lösningen har två delar igen. För den konstanta termen kan vi enkelt ansätta $y_{p1} = c$ och direkt få att $c = \frac{1}{4}$. Den andra delen är lite besvärligare eftersom det är en del av den homogena lösningen. Man kan antingen göra som i lösningen till 15.53, eller genom att multiplicera en summa av två godtyckliga trigonometriska funktioner med x. Jag väljer att konstatera att $\cos 2x = \mathrm{Re}(e^{i2x})$, och genom att sedan ansätta $y_{p2} = z(x)e^{i2x}$. Eftersom det är samma vinkelfrekvens i högerledet som i 15.53 kommer man att få exakt samma ekvation (se bokens lösning) - alltså att $y_{p2} = \frac{1}{4}x\sin 2x + i\left(-\frac{1}{4}x\cos 2x\right)$. Nu är vi dock intresserade av realdelen av denna, alltså $\frac{1}{4}x\sin 2x$, vilket slutligen ger oss lösningen

$$y = y_h + y_{p1} + y_{p2} = A\cos 2x + B\sin 2x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x\sin 2x.$$

15.55

Man får snabbt att den homogena lösningen är $Ae^x + Be^{2x}$. Eftersom jag tycker att hjälpfunktioner är bökiga, så kommer jag istället att göra ansatsen $y_p = e^{3x}(a\cos x +$

$b\sin x) \implies y_p' = e^{3x}((3a+b)\cos x + (-a+3b)\sin x) \implies y_p'' = e^{3x}((8a+6b)\cos x + (-6a+8b)\sin x)$, insättning ger att

$$y_p'' - 3y_p' + 2y_p = ... = (a+3b)\cos x + (-3a+b)\sin x = \cos x \implies$$

$$\implies \begin{cases} a+3b=1, \\ -3a+b=0 \end{cases} \implies \begin{cases} a=1/10, \\ b=3/10 \end{cases} \implies$$

$$\implies y = y_h + y_p = Ae^x + Be^{2x} + \frac{1}{10}(\cos x + 3\sin x).$$

För just denna typ av uppgift går hjälpfunktions/ekvationsmetoden ganska snabbt.

15.56

a)

Den homogena lösningen blir $y_h = e^{3x}(A\cos x + B\sin x)$. Sedan blir vi deprimerade eftersom högerledet har samma form och vi behöver modifiera vår partikulärlösning. Man kan antingen skriva om som en realdel av något komplext och införa en hjälpfunktion, men jag tänker istället göra ett mellanting, och ansätta $y_p = cxe^{(3+i)x}$. Jag gör detta eftersom jag vet att lösningen kommer att vara ett linjärt polynom gånger högerledet, och realdelen av $e^{(3+i)x}$ är precis mitt högerled. $y_p' = c((3+i)x+1)e^{(3+i)x}$ och $y_p'' = c((8+6i)x+6+2i)e^{(3+i)x}$. Vid insättning kommer alla termer som innehåller x att ta ut varandra, vilket lämnar

$$y_p'' - 6y_p + 10y_p = ... = 2ice^{(3+i)x} = e^{(3+i)x} \implies c = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}.$$

Den partikulärlösning vi söker är alltså

$$y_p = \mathrm{Re}\left(-\frac{i}{2}xe^{(3+i)x}\right) = \mathrm{Re}\left(-\frac{i}{2}xe^{3x}(\cos x + i\sin x\right) = \frac{1}{2}xe^{3x}\sin x.$$

Detta ger oss lösningen

$$y = y_h + y_p = e^{3x}(A\cos x + B\sin x) + \frac{1}{2}xe^{3x}\sin x.$$

b)

Man får snabbt den homogena lösningen $y_h = Ae^{-4x} + Be^{-2x}$. För partikulärlösningen kan vi antingen ansätta $y_p = ce^{(-2+i)x}$ och titta på imaginärdelen, eller $y_p = e^{-2x}(a\cos x + b\sin x)$. $y_p = ce^{(-2+i)x} \implies y_p'(-2+i)ce^{(-2+i)x} \implies y_p'' = (-2+i)^2ce^{(-2+i)x} = (3-4i)ce^{(-2+i)x}$. Insättning ger att

$$y_p'' + 6y_p' + 8y_p = ... = (-1+2i)ce^{(-2+i)x} = e^{(-2+i)x} \implies c = \frac{1}{-1+2i} = \frac{-1-2i}{5}.$$

Vår partikulärlösning ges alltså av

$$y_p = \mathrm{Im}\left(\frac{-1-2i}{5}e^{(-2+i)x}\right) = -\frac{e^{-2x}}{5}\mathrm{Im}\left((1+2i)(\cos x + i\sin x)\right) =$$

$$= -\frac{1}{5}e^{-2x}(2\cos x + \sin x) \implies$$

$$\implies y = y_h + y_p = Ae^{-4x} + Be^{-2x} - \frac{1}{5}e^{-2x}(2\cos x + \sin x).$$

15.57

Den homogena lösningen ges av $y_h = A\cos\frac{x}{2} + B\sin\frac{x}{2}$. Vi har bara en andraderivata och funktionen själv i vänsterledet, och högerledet innehåller bara en sinusterm. Detta betyder att ansatsen $y_p = b\sin x$ räcker för partikulärlösningen, eftersom vi inte kommer att få några cosinustermer med. (Om man ansätter $y_p = a\cos x + b\sin x$ kommer man få att $a = 0$). Insättning ger att

$$y_p'' + \frac{1}{4}y_p = -\sin x \implies -b\sin x + \frac{1}{4}b\sin x = -\sin x \implies b = \frac{4}{3}.$$

Vi har den allmänna lösningen $y = y_h + y_p = A\cos\frac{x}{2} + B\sin\frac{x}{2} + \frac{4}{3}\sin x$. Randvillkoren ger nu

$$\begin{cases} y(0) = 0, \\ y(\pi) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A + 0 + 0 = 0, \\ 0 + B + 0 = 0 \end{cases} \implies y = \frac{4}{3}\sin x.$$

15.58

Den karakteristiska ekvationen ger direkt rötterna $r = \pm 3i$ och alltså är den homogena lösningen $y_h = A\cos 3x + B\sin 3x$. Ur detta ser vi att om $\alpha = 3$ så är högerledet en lösning till den homogena ekvationen. På grund av detta val av α måste vi justera vår partikulärlösning. Eftersom $\sin 3x = \mathrm{Im}(e^{3ix})$, så kan vi ansätta $y_p = cxe^{3ix}$ och sedan betrakta imaginärdelen av det vi får fram. $y_p' = (3ix + 1)ce^{3ix}$ och $y_p'' = (-9x + 6i)ce^{3ix}$, varpå insättning ger att

$$y_p'' + 9y_p = (-9x + 6i)ce^{3ix} + 9xce^{3ix} = 6ice^{3ix} = e^{3ix} \implies c = -\frac{i}{6}.$$

Alltså finner vi att

$$y_p = \mathrm{Im}\left(-\frac{i}{6}xe^{3ix}\right) = -\frac{x}{6}\mathrm{Im}\left(i(\cos 3x + i\sin 3x)\right) = -\frac{1}{6}x\cos x \implies$$

$$\implies y = y_h + y_p = A\cos 3x + B\sin 3x - \frac{1}{6}x\cos 3x.$$

15.59

Newtons andra lag ger oss att

$$m\frac{dy^2}{dt^2} = -ky(t) + F(t) \implies [m = 2,\ k = 32,\ F(t) = 12\sin\omega t] \implies y'' + 16y = 6\sin\omega t.$$

Att fjädern är stilla och i jämvikt kan beskrivas som att $y(0) = 0$ och att $y'(0) = 0$. Den homogena ekvationen $y_h'' + 16y_h = 0$ har den allmänna lösningen $y_h = A\cos 4t + B\sin 4t$. Detta indikerar att för alla $\omega \neq 4$ kan vi ansätta en partikulärlösning på formen $y_p = a\cos\omega t + b\sin\omega t \implies y_p'' = -\omega^2 a\cos\omega t - \omega^2 b\sin\omega t$. Insättning ger att

$$y_p'' + 16y_p = -\omega^2 a\cos\omega t - \omega^2 b\sin\omega t + 16a\cos\omega t + 16b\sin\omega t =$$

$$= (16 - \omega^2)a\cos\omega t + (16 - \omega^2)b\sin\omega t = 6\sin\omega t + 0\cdot\cos\omega t \implies$$

$$\implies \begin{cases}(16-\omega^2)a=0,\\(16-\omega^2)b=6\end{cases} \implies \begin{cases}a=0,\\b=\frac{6}{16-\omega^2}.\end{cases}$$

Som vi ser här blir $a=0$ i enlighet med resonemanget i 15.57, och dessutom ser vi att vi hade delat med 0 om $\omega=4$. Detta ger

$$y=y_h+y_p=A\cos 4t+B\sin 4t+\frac{6}{16-\omega^2}\sin\omega t \implies$$

$$\implies y'=-4A\sin 4t+4B\cos 4t+\frac{6\omega}{16-\omega^2}\cos\omega t,$$

$y(0)=0$ ger direkt att $A=0$, och

$$y'(0)=4B+\frac{6\omega}{16-\omega^2}=0 \implies B=-\frac{6}{16-\omega^2}\frac{\omega}{4} \implies$$

$$\implies y(t)=\frac{6}{16-\omega^2}\left(\sin\omega t-\frac{\omega}{4}\sin 4t\right),\ \omega\neq 4.$$

För $\omega=4$ har vi samma homogena lösning, men för partikulärlösningen behöver vi göra en förändring. På samma sätt som i 15.58 kan vi ansätta $y_p=cte^{4it}$, och sedan betrakta imaginärdelen av lösningen. Vi får att $y_p''=(-16t+8i)ce^{4it}$, vilket vid insättning ger

$$y_p''+16y_p=8ice^{4it}=6e^{4it} \implies c=-\frac{3}{4}i \implies$$

$$\implies y_p=\operatorname{Im}\left(-\frac{3}{4}ite^{4it}\right)=-\frac{3}{4}t\cdot\operatorname{Im}\left(i(\cos 4t+i\sin 4t)\right)=-\frac{3}{4}t\cos 4t \implies$$

$$\implies y=y_h+y_p=A\cos 4t+B\sin 4t-\frac{3}{4}t\cos 4t \implies$$

$$\implies y'=-4A\sin 4t+4B\cos 4t+3t\sin 4t-\frac{3}{4}\cos 4t \implies$$

$$\implies \begin{cases}y(0)=0,\\y'(0)=0\end{cases} \implies \begin{cases}A+0-0=0,\\-0+4B-\frac{3}{4}=0\end{cases} \implies \begin{cases}A=0,\\B=\frac{3}{16}\end{cases} \implies$$

$$\implies y(t)=\frac{3}{16}\sin 4t-\frac{3}{4}t\cos 4t,\ \omega=4.$$

15.60

Lösning finns redan.

15.61

För dessa uppgifter ställer man bara upp den karakteristiska ekvationen som vanligt - ersätt $y^{(n)}$ med r^n.

a)

Karakteristiska ekvationen:

$$r^3 + 6r^2 + 11r + 6 = 0.$$

En gissning visar att $r = -1$ är en rot, polynomdivision ger sedan att

$$r^3 + 6r^2 + 11r + 6 = (r+1)(r^2 + 3r + 2) \implies \begin{cases} r = -3, \\ r = -2, \\ r = -1 \end{cases} \implies$$

$$\implies y = Ae^{-3x} + Be^{-2x} + Ce^{-x}.$$

b)

För den homogena delen av lösningen får vi den karakteristiska ekvationen

$$r^4 - 2r^3 + 2r - 1 = 0.$$

Gissning ger att $r = 1$ är en rot, varpå polynomdivision ger att $r^4 - 2r^3 + 2r - 1 = (r-1)(r^3 - r^2 - r + 1)$, där den andra faktorn också har $r = 1$ som en rot. Polynomdivision igen ger att $(r-1)(r^3 - r^2 - r + 1) = (r-1)^2(r^2 - 1) = (r-1)^3(r+1)$, vilket visar att $r = 1$ är en trippelrot, och $r = -1$ är en rot. Om man använder sina kunskaper från inhomogena DE, och hur man agerar när man har en dubbelrot, så kommer man fram till att det är rimligt att lösningen då ges av ett andragradspolynom gånger e^x, samt den andra roten. Alltså är den homogena lösningen

$$y_h = Ae^{-x} + (Bx^2 + Cx + D)e^x.$$

Såklart är högerledet e^x, vilket är en del av homogena lösningen, därför måste vi ansätta $y_p = ax^3e^x$, vilket efter en extremt dryg derivering och insättning (som jag definitivt inte pallar skriva) kommer man fram till ekvationen $12ae^x = e^x \implies a = 1/12$. Alltså är $y_p = \frac{1}{12}x^3e^x$ och

$$y = y_h + y_p = Ae^{-x} + (Bx^2 + Cx + D)e^x + \frac{1}{12}x^3e^x.$$

c)

För den homogena ekvationen har vi den karakteristiska ekvationen $r^3 + 9r = 0$, vilket betyder att $r = 0$ och $r = \pm 3i$. Vi får då den homogena lösningen $y_h = A\cos 3x + B\sin 3x + C$. Den homogena lösningen har en konstant i sig, så för partikulärlösningen behöver vi ansätta $y_p = ax^3 + bx^2 + cx \implies y_p' = 3ax^2 + 2bx + c \implies y_p''' = 6a$. Insättning:

$$y_p''' + 9y_p = 6a + 27ax^2 + 18bx + 9c = 27ax^2 + 18bx + 6a + 9c = x^2 + 0 \cdot x + 5 \implies$$

$$\implies \begin{cases} 27a = 1, \\ 18b = 0, \\ 6a + 9c = 5 \end{cases} \implies \begin{cases} a = \frac{1}{27}, \\ b = 0, \\ c = \frac{43}{81} \end{cases} \implies$$

$$\implies y_p = \frac{1}{27}x^3 + \frac{43}{81}x \implies$$

$$\implies y = y_h + y_p = A\cos 3x + B\sin 3x + C + \frac{1}{27}x^3 + \frac{43}{81}x.$$

d)

För den homogena ekvationen får vi den karakteristiska ekvationen: $r^3 - (a+2)r^2 + (2a+1)r - a = 0$. En gissning visar att $r = a$ är en rot, varpå polynomdivision ger att $r^3 - (a+2)r^2 + (2a+1)r - a = (r-a)(r^2 - 2r + 1) = (r-a)(r-1)^2$. Alltså är $r = 1$ en dubbelrot. Vi kommer nu att få lite olika lösningar beroende på a:s värde.

Om a är skilt från 0 och 1, kommer vi inte att stöta på några problem, då blir den homogena lösningen $y_h = (Ax+B)e^x + Ce^{ax}$, och partikulärlösningen kommer vara en konstant: $y_p = c \implies c = -1/a$.

För $a = 0$ kommer vi att få en konstant i den homogena lösningen, $y_h = (Ax+B)e^x + C$, vilket betyder att partikulärlösningen kommer att ta formen $y_p = cx$, vilket vid insättning ger att $(2a+1)\cdot c - acx = [a = 0] = c = 1$, vilket ger $y_p = x$.

Slutligen, om $a = 1$ får vi en trippelrot i den karakteristiska ekvationen, vilket betyder att den homogena lösningen tar formen $y_h = (Ax^2 + Bx + C)e^x$, men partikulärlösningen påverkas inte och är samma som i det första fallet, $y_p = -1/a = -1$.

Sammanställt har vi den allmänna lösningen

$$y = \begin{cases} (Ax+B)e^x + Ce^{ax} - \frac{1}{a}, & a \neq 0,\ a \neq 1, \\ (Ax+B)e^x + C + x, & a = 0, \\ (Ax^2+Bx+C)e^x - 1, & a = 1. \end{cases}$$

15.62

Eftersom $\lambda > 0$ kan vi skriva $\lambda = \lambda e^{2\pi k}$, $k \in \mathbb{Z}$. Vi får den karakteristiska ekvationen

$$z^4 - \lambda = 0 \implies [z = re^{i\theta}] \implies r^4 e^{4i\theta} = \lambda e^{2\pi k} \implies \begin{cases} r = \lambda^{1/4}, \\ \theta = \frac{\pi k}{2},\ k = 0,1,2,3. \end{cases}$$

Insättning av dessa värden på θ och r ger rötterna

$$\begin{cases} z_1 = \lambda^{1/4}, \\ z_2 = i\lambda^{1/4}, \\ z_3 = -\lambda^{1/4}, \\ z_4 = -i\lambda^{1/4}, \end{cases}$$

och den allmänna lösningen

$$y = Ae^{\lambda^{1/4}x} + C_1 e^{i\lambda^{1/4}x} + Be^{-\lambda^{1/4}x} + C_2 e^{-i\lambda^{1/4}x} =$$

$$= Ae^{\lambda^{1/4}x} + Be^{-\lambda^{1/4}x} + C\cos(\lambda^{1/4}x) + D\sin(\lambda^{1/4}x) \implies$$

$$\implies y'' = \lambda^{1/2}Ae^{\lambda^{1/4}x} + \lambda^{1/2}Be^{-\lambda^{1/4}x} - \lambda^{1/2}C\cos(\lambda^{1/4}x) - \lambda^{1/2}D\sin(\lambda^{1/4}x).$$

Randvillkoren ger nu följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} y(0) & = 0, \\ y''(0) & = 0, \\ y(\pi) & = 0, \\ y''(\pi) & = 0 \end{cases} \implies$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} A+B+C+0 & = 0, \\ \lambda^{1/2}A+\lambda^{1/2}B-\lambda^{1/2}C-0 & = 0, \\ Ae^{\lambda^{1/4}\pi}+Be^{-\lambda^{1/4}\pi}+C\cos(\lambda^{1/4}\pi)+D\sin(\lambda^{1/4}\pi) & = 0, \\ \lambda^{1/2}Ae^{\lambda^{1/4}\pi}+\lambda^{1/2}Be^{-\lambda^{1/4}\pi}-\lambda^{1/2}C\cos(\lambda^{1/4}\pi)-\lambda^{1/2}D\sin(\lambda^{1/4}\pi) & = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} A+B+C & = 0, \\ A+B-C & = 0, \\ Ae^{\lambda^{1/4}\pi}+Be^{-\lambda^{1/4}\pi}+C\cos(\lambda^{1/4}\pi)+D\sin(\lambda^{1/4}\pi) & = 0, \\ Ae^{\lambda^{1/4}\pi}+Be^{-\lambda^{1/4}\pi}-C\cos(\lambda^{1/4}\pi)-D\sin(\lambda^{1/4}\pi) & = 0. \end{cases}$$

Om man adderar de två sista ekvationerna får man ett ekvationssystem med 3 obekanta och 3 ekvationer, nämligen

$$\begin{cases} A+B+C & = 0, \\ A+B-C & = 0, \\ 2Ae^{\lambda^{1/4}\pi}+2Be^{-\lambda^{1/4}\pi} & = 0. \end{cases}$$

Detta ekvationssystem har endast den triviala lösningen $A = B = C = 0$ (eftersom vi har tre linjärt oberoende ekvationer och tre obekanta måste den enda lösningen vara den triviala). Med denna information kollapsar vårt massiva ekvationssytem ner till villkoret att

$$D\sin(\lambda^{1/4}\pi) = 0.$$

Eftersom vi söker icke-triviala lösningar måste $D \neq 0$, vilket betyder att

$$\lambda^{1/4}\pi = k\pi \implies \lambda = k^4,$$

där $k = 1, 2, 3, ...$ (eftersom $\lambda > 0$ måste $k > 0$). Vi har nu slutligen lösningen

$$y(x) = D\sin kx, \text{ där } \lambda = k^4,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

15.63

Om vi betecknar innertemperaturen efter t h med $T(t)$, gäller det att $T(0) = 20$, samt att $T(2) = 15$, och

$$\frac{dT}{dt} = k(T-(-10)) \implies \int \frac{dT}{T+10} = \int k\ dt \implies \ln|T+10| = kt + C_1 \implies$$

$$\implies T+10 = \pm e^{kt+C_1} = \pm e^{kt}e^{C_1} = Ce^{kt} \implies T(t) = Ce^{kt} - 10 \implies$$

$$\implies \left[T(0) = 20 \implies C = 30 \text{ och } T(2) = 15 \implies k = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{6}\right] \implies$$

$$\implies T(t) = 30e^{\frac{1}{2}\ln\frac{5}{6}t} - 10 \implies T(24) = 30e^{12\ln\frac{5}{6}} - 10 = (30\cdot(5/6)^{12} - 10)\ ^\circ\text{C}.$$

15.64

Detta är en separabel differentialekvation

$$\frac{dy}{dx} = x(4+y^2) \implies \int \frac{dy}{4+y^2} = \int x\ dx \implies \int \frac{1/4}{1+(y/2)^2}\ dy = \int x\ dx \implies$$

$$\implies \frac{1}{2}\arctan\frac{y}{2} = \frac{1}{2}x^2 + C_1 \implies \arctan\frac{y}{2} = x^2 + C,$$

här ger begynnelsevillkoret $y(0) = 2$ att $C = \pi/4$, vilket betyder att

$$y(x) = 2\tan\left(x^2 + \frac{\pi}{4}\right).$$

Eftersom vi hade arctan och tog tangens på båda sidor måste vi tänka på att vår definitionsmängd är begränsad. arctan:s värdemängd är mellan $-\pi/2$ och $\pi/2$, vilket betyder att

$$-\frac{\pi}{2} < x^2 + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \iff |x| < \sqrt{\frac{\pi}{4}}.$$

15.65

Detta är en linjär, första ordningens differentialekvation som kan lösas med integrerande faktor. Vi tittar på det som står framför y, vilket ger oss den integrerande faktorn

$$\mu(x) = e^{\int \frac{-1}{x+1}\ dx} = e^{-\ln(x+1)} = e^{\ln\frac{1}{x+1}} = \frac{1}{x+1} \implies$$

$$\implies \mu y' - \frac{\mu}{x+1}y = \mu\frac{x+3}{x-1} \implies \left(\frac{y}{x+1}\right)' = \frac{x+3}{(x-1)(x+1)}.$$

Partialbråksuppdelning av högerledet:

$$\frac{x+3}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \implies$$

$$\implies x+3 = A(x+1) + B(x-1) = (A+B)x + (A-B) \implies$$

$$\begin{cases} A+B=1, \\ A-B=3 \end{cases} \implies \begin{cases} A=2, \\ B=-1 \end{cases} \implies$$

$$\implies \frac{y}{x+1} = \int \frac{x+3}{(x-1)(x+1)}\ dx = \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{B}{x+1}\right)\ dx =$$

$$= 2\ln|x-1| - \ln|x+1| + C = [x>1] = \ln\frac{(x-1)^2}{x+1} + C \implies$$

$$\implies y(x) = (x+1)\ln\frac{(x-1)^2}{x+1} + C(x+1).$$

Nu ger $y(2) = 0$ att $3\ln\frac{1}{3} + 3C = 0 \implies C = \ln 3$.

$$y(x) = (x+1)\ln\frac{(x-1)^2}{x+1} + (x+1)\ln 3 = (x+1)\ln\frac{3(x-1)^2}{x+1}.$$

15.66

$$y'' + 4y = 2\sin^2 x = 1 - \cos 2x.$$

Den homogena lösningen fås snabbt till $y_h = A\cos 2x + B\sin 2x$, och partikulärlösningen består av två delar, eftersom högerledet har två delar. För konstanten ansätter vi $y_{p1} = a \implies a = \frac{1}{4}$. För den andra delen behöver vi återigen ta hänsyn till att det är en del av den homogena lösningen. Vi väljer därför att ansätta $y_{p2} = bxe^{2ix} \implies y''_{p2} = (-4x + 4i)be^{2ix}$ och sedan betrakta realdelen av det vi får fram. Insättning ger att

$$y''_{p2} + 4y_{p2} = 4ibe^{2ix} = -e^{2ix} \implies b = \frac{i}{4} \implies$$

$$\implies y_{p2} = \mathrm{Re}\left(\frac{i}{4}xe^{2ix}\right) = \frac{x}{4}\mathrm{Re}\left(i(\cos 2x + i\sin 2x)\right) = -\frac{1}{4}x\sin 2x \implies$$

$$\implies y = y_h + y_{p1} + y_{p2} = A\cos 2x + B\sin 2x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x\sin 2x \implies$$

$$\implies y' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{2}x\cos 2x \implies$$

$$\implies \begin{cases} y(0) = 0, \\ y'(0) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A + \frac{1}{4} = 0, \\ 2B = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = -\frac{1}{4}, \\ B = 0 \end{cases} \implies$$

$$\implies y = -\frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x\sin 2x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right) - \frac{1}{4}x\sin 2x =$$

$$= \frac{1}{2}\sin^2 x - \frac{1}{4}x\sin 2x.$$

15.67

Låt $y(t)$ beteckna antalet gram förorening efter t min. Ändringen av y kan då skrivas

$$y' = (\text{förorening in}) - (\text{förorening ut}) = 3 \cdot 8 - \frac{y}{400} \cdot 8 = 24 - \frac{y}{50} \implies y' + \frac{1}{50}y = 24.$$

Föroreningen in ges av hur mycket volym som kommer in per tidsenhet gånger förorenings koncentration i det vatten som kommer in, och föroreningen som lämnar är blandningens koncentration av förorening gånger den volym som flödar ut. Differentialekvationen vi landade i kan enkelt lösas med en integrerande faktor, $\mu(t) = e^{\int \frac{1}{50}\,dt} = e^{t/50}$, vilket ger oss att

$$(e^{t/50}y)' = 24e^{t/50} \implies \int_0^t (e^{\tilde{t}/50}y)'\,d\tilde{t} = \int_0^t 24e^{t/50} \implies$$

$$\implies e^{t/50}y(t) - e^0 y(0) = 1200(e^{t/50} - e^0) \implies [y(0) = 0] \implies y(t) = 1200(1 - e^{-t/50}).$$

Vi får funktionen för koncentration efter t min genom att dela y på den totala volymen:

$$c(t) = y/400 = 3(1 - e^{-t/50}),$$

och vi vill veta när $c(t) = 2$.

$$3(1 - e^{-t/50}) = 2 \implies 1 = 3e^{-t/50} \implies \frac{-t}{50} = \ln\frac{1}{3} \implies t = 50\ln 3 \text{ min.}$$

15.68

Vi har tidigare gjort partialbråksuppdelningen

$$\frac{1}{1-y^2} = \frac{1}{2(1+y)} + \frac{1}{2(1-y)},$$

och med denna information kan vi lösa denna separabla differentialekvation.

$$x\frac{dy}{dx} = 1-y^2 \implies \frac{dy}{1-y^2} = \frac{dx}{x} \implies \int\left(\frac{1}{2(1+y)} + \frac{1}{2(1-y)}\right)\,dy = \int\frac{dx}{x} \implies$$

$$\implies \frac{1}{2}\ln|1+y| - \frac{1}{2}\ln|1-y| = \ln|x| = C_1 \implies \ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = 2\ln|x| + C_2 =$$

$$= \ln|x^2| + C_2 = \ln x^2 + C_2 \implies \frac{1+y}{1-y} = \pm e^{\ln x^2 + C_2} = Cx^2 \implies$$

$$\implies 1+y = C(1-y)x^2 \implies (1+Cx^2)y = Cx^2 - 1 \implies y = \frac{Cx^2-1}{Cx^2+1}.$$

Villkoret $y(1) = 1/2 \implies \frac{1}{2} = \frac{C-1}{C+1} \implies C = 3$, vilket ger funktionen

$$y(x) = \frac{3x^2-1}{3x^2+1}.$$

Den lösningsform som vi har här kan inte uppfylla att $y(1) = 1$, och alltså bör man titta om vi har delat på 0 någonstans och eventuellt

tagit bort en lösning. Vi ser att $1-y$ finns i en nämnare, vilket är 0 om $y = 1$, och det visar sig att den konstanta funktionen $y = 1$ uppfyller det som önskas.

15.69

$$y'' + y = t^2\sin t$$

har uppenbart den homogena lösningen $y_h = A\cos t + B\sin t$. Högerledet har samma form som den homogena lösningen, och eftersom vi hade velat ansätta ett andragradspolynom gånger en summa av sinus och cosinus, ansätter vi istället ett tredjegradspolynom. Alltså $y_p = (at^3+bt^2+ct)(e\sin t + f\cos t)$, men vi kan göra det lite lättare för oss. Eftersom $t^2\sin t = \mathrm{Im}(t^2e^{it})$ kan vi ansätta $y_p = (at^3+bt^2+ct)e^{it}$ och sedan titta på imaginärdelen (men det är fortfarande ganska drygt). Derivering ger att

$$y_p'' = (at^3+bt^2+ct)''e^{it} + 2(at^3+bt^2+ct)'(e^{it})' + (at^3+bt^2+ct)(e^{it})'' =$$

$$= (6at+2b)e^{it} + 2i(3at^2+2bt+c)e^{it} - (at^3+bt^2+ct)e^{it} =$$

$$= (-at^3 + (6ia-b)t^2 + (6a+4bi-c)t + (2b+2ic))e^{it} \implies$$

$$\implies y_p'' + y_p = (-at^3 + (6ia-b)t^2 + (6a+4ib-c)t + (2b+2ic))e^{it} + (at^3+bt^2+ct)e^{it} =$$

$$= (6iat^2 + (6a+4ib)t + (2b+2ic))e^{it} = t^2e^{it} \implies$$

$$\implies 6iat^2 + (6a+4ib)t + (2b+2ic)\cdot 1 = 1\cdot t^2 + 0\cdot t + 0\cdot 1 \implies$$

$$\implies \begin{cases} 6ia & = 1, \\ 6a + 4ib & = 0, \\ 2b + 2ic & = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -\frac{i}{6}, \\ b = \frac{1}{4}, \\ c = \frac{i}{4} \end{cases} \implies$$

$$\implies y_p = \operatorname{Im}\left(\left(-\frac{i}{6}t^3 + \frac{1}{4}t^2 + \frac{i}{4}t\right)e^{it}\right) =$$

$$= \operatorname{Im}\left(\left(-\frac{i}{6}t^3 + \frac{1}{4}t^2 + \frac{i}{4}t\right)(\cos t + i\sin t)\right) =$$

$$= -\frac{1}{6}t^3\cos t + \frac{1}{4}t^2\sin t + \frac{1}{4}t\cos t \implies$$

$$\implies y = y_h + y_p = A\cos t + B\sin t + \left(t - \frac{t^3}{6}\right)\cos t + \frac{t^2}{4}\sin t.$$

15.70

Exakt samma som 15.47 d), men med ett första gradspolynom i högerledet istället för ett andragradspolynom. Detta betyder att $y_h = Ae^{-2x} + B$ och vi ansätter $y_p = ax^2 + bx \implies y_p' = 2ax + b \implies y_p'' = 2a$. Insättning ger att

$$y_p'' + 2y_p' = 2a + 4ax + 2b = x - 1 \implies a = 1/4 \implies b = -3/4 \implies$$

$$\implies y = y_h + y_p = Ae^{-2x} + B + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x \implies y' = -2Ae^{-2x} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \implies$$

$$\implies \begin{cases} y(0) = 0, \\ y'(0) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A + B = 0, \\ -2A - \frac{3}{4} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = -\frac{3}{8}, \\ B = \frac{3}{8} \end{cases} \implies$$

$$\implies y = \frac{3}{8}(1 - e^{-2x}) + \frac{1}{4}(x^2 - 3x).$$

15.71

Låt antalet människor efter t år betecknas med $y(t)$, detta ger oss den matematiska modellen

$$y' = 0,001y - 500 = \frac{1}{1000} - 500,$$

eftersom ökningen är 0,1% av befolkningen och den minskar med 500 per år. Denna kan lösas med den integrerande faktorn $\mu(t) = e^{-t/1000}$, vilket ger att

$$(e^{-t/1000}y)' = -500e^{-t/1000} \implies e^{-t/1000}y = 500000e^{-t/1000} + C \implies$$

$$\implies y = 500000 + Ce^{t/1000},$$

och $y(0) = 100000 \implies C = -400000$, vilket ger oss funktionen

$$y(t) = 500000 - 400000e^{t/1000}.$$

Vi vill veta när $y(t) = 90000$.

$$500000 - 400000e^{t/1000} = 90000 \implies e^{t/1000} = \frac{410000}{400000} = \frac{41}{40} \implies t = 1000\ln\frac{41}{40} \text{ år.}$$

15.72

a)

Newtons andra lag ger att

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv.$$

b)

Separabel differentialekvation:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv \implies \int m\frac{dv}{mg - kv} = \int dt \implies -\frac{m}{k}\ln|mg - kv| = t + C_1 \implies$$

$$\implies mg - kv = \pm e^{-kt/m + C_2} = Ce^{-kt/m} \implies [v(0) = v_0 \implies C = mg - kv_0] \implies$$

$$\implies v(t) = \frac{mg - (mg - kv_0)e^{-kt/m}}{k} = \frac{mg}{k} + \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right)e^{-kt/m}.$$

c)

Ja, om parentesen framför exponentialtermen är 0 kommer hastigheten vara konstant. Detta sker då $v_0 = \frac{mg}{k}$.

15.73

Insättning av $x = 0$ ger direkt, eftersom $f(0) = 0$, att $f'(0) = 0$.

$$f'(x) = x + 2f(x) - \int_0^x f(t)dt \implies [\text{analysens huvudsats}] \implies$$

$$\implies f'' = 1 + 2f' - f \implies f'' - 2f' + f = 1.$$

Detta är en andra ordningens, inhomogen, differentialekvation med konstanta koefficienter. Alltså kommer lösningen ges av en homogen del, f_h, och en partikulärlösning, f_p. Den homogena lösningen fås snabbt med den karakteristiska ekvationen, vilket ger $f_h = (Ax + B)e^x$. För partikulärlösningen observerar vi att högerledet bara innehåller en konstant, varför vi ansätter $f_p = c \implies c = 1$. Detta ger den allmänna lösningen

$$f(x) = (Ax + B)e^x + 1,$$

men den måste uppfylla våra begynnelsevillkor. $f(0) = 0 \implies B + 1 = 0 \implies B = -1$. Alltså är

$$f(x) = (Ax - 1)e^x + 1 \implies f'(x) = (A + Ax - 1)e^x \implies f'(0) = A - 1 = 0 \implies A = 1,$$

vilket ger oss lösningen

$$f(x) = (x - 1)e^x + 1.$$

15.74

Beteckna mängden kolmonoxid i luften efter t min med $y(t)$. Mängden kolmonoxid som tillförs rummet blir då $0,1 \cdot 0,04 = 4/1000$, eftersom 4% av dem 0,1 m^3 som andas ut är kolmonoxid. Mängden kolmonoxid som lämnar rummet kommer då att vara den totala andelen kolmonoxid per kubikmeter gånger den luft som dras ut, alltså $y/1000 \cdot 0,1 = y/10000$. Sammanställt får man att förändringen av mängden kolmonoxid är den tillförde minus det som försvinner, alltså

$$y' = \frac{4}{1000} - \frac{y}{10000} \implies y' + \frac{1}{10000}y = \frac{4}{1000}.$$

Denna kan lösas med en integrerande faktor: $\mu(t) = e^{t/10000}$, vilket ger oss

$$(e^{t/10000}y)' = \frac{4}{1000}e^{t/10000} \implies e^{t/10000}y = 40e^{t/10000} + C \implies y(t) = 40 + Ce^{-t/10000}.$$

Villkoret $y(0) = 0 \implies C = -40$, och $0,01\% = 0,0001$, vilket betyder att gränsvärdet överstigs när $y/1000 = 0,0001 \implies y = \frac{1}{10}$.

$$40 - 40e^{-T/10000} = \frac{1}{10} \implies e^{-T/10000 = \frac{399}{400}} \implies$$

$$\implies T = -10000 \ln \frac{399}{400} = -10000 \ln (0,9975) \text{ min.}$$

15.75

Tangentens ekvation i en punkt $x = a$ ges av

$$y = f'(a)(x - a) + f(a),$$

och vi vet enligt uppgiften att $y = 0$, då $x = 1/a$.

$$0 = f'(a)(\frac{1}{a} - a) + f(a),$$

för bekvämlighetens skull döper jag om x till a (a är ju en godtycklig punkt, så det spelar ingen roll vad vi kallar den). Detta är en separabel ekvation.

$$\frac{df}{dx}(\frac{1}{x} - x) + f = 0 \implies \frac{df}{dx}(x - \frac{1}{x}) = f \implies \frac{df}{f} = \frac{1}{x - \frac{1}{x}}\, dx \implies$$

$$\implies \int \frac{df}{f} = \int \frac{1}{\frac{x^2-1}{x}}\, dx = \int \frac{x}{x^2 - 1}\, dx \implies \ln|f| = \frac{1}{2}\ln|1 - x^2| + C_1 \implies$$

$$\implies [0 < x < 1] \implies f(x) = \pm e^{\frac{1}{2}\ln(1-x^2) + C_1} = \pm e^{\ln\sqrt{1-x^2}}e^{C_1} = C\sqrt{1 - x^2},$$

där $C \neq 0$ av uppenbara skäl (man delar med 0 annars).