5. Om $b_k \neq 0$ implicit, annars explicit

$k=3 \quad b_k = \frac{9}{24} \Rightarrow$ implicit

6. $y_{n+2} = y_n + h\left(\frac{1}{3} f_{n+2} + \frac{4}{3} f_{n+1} + \frac{1}{3} f_n\right)$

$h=0$

$y(t)=1 \quad y'(t)=0 \Rightarrow 1 = 1 + h(0)$ ok

$y(t)=t \quad y'(t)=1 \Rightarrow 2h = 0 + h\left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\right)$ ok

$y(t)=t^2 \quad y'(t)=2t \Rightarrow 4h^2 = 0 + h\left(\frac{1}{3}\cdot 4h + \frac{4}{3} 2h\right)$ ok

$y(t)=t^3 \quad y'(t)=3t^2 \Rightarrow 8h^3 = 0 + h\left(\frac{1}{3}\cdot 3\cdot 4h^2 + \frac{4}{3}\cdot 3h^2\right)$ ok

$y(t)=t^4 \quad y'(t)=4t^3 \Rightarrow 16h^4 = 0 + h\left(\frac{1}{3}\cdot 4\cdot 8h^3 + \frac{4}{3}\cdot 4h^3\right)$ ok

$y(t)=t^5 \quad y'(t)=5t^4 \Rightarrow 32h^5 = 0 + h\left(\frac{1}{3}\cdot 5\cdot 16h^4 + \frac{4}{3}\cdot 5\cdot h^4\right)$ ej ok

Order 4. Stämmer med att max är $k+2$ för jämna k och vi har $k=2$.

7. BDF3: $y_{n+3} - \frac{18}{11} y_{n+2} + \frac{9}{11} y_{n+1} - \frac{2}{11} y_n = \frac{6}{11} h f(t_{n+3}, y_{n+3})$ – från wiki :)

BDF av ordning $1 \leq k \leq 6$ är konvergent med $p=k$.
Alltså konvergent av ordning 3.

$\sum_{j=1}^{k} \frac{\nabla^j}{j} y_{n+k}$

$\nabla^j = \nabla^{j-1} y_{n+k} - \nabla^{j-1} y_{n+k-1}$

$P(\omega) = \omega^3 - \frac{18}{11}\omega^2 + \frac{9}{11}\omega - \frac{2}{11}$

Rötter: $x_1 = 1 \quad x_2 = \frac{1}{22}(7 - i\sqrt{39}) \quad x_3 = \frac{1}{22}(7 + i\sqrt{39})$

Innanför enhetscirkeln och en enkel på. $\Rightarrow$ zero-stable.

Går att lösa med gissning + polynomdivision men annars funkar wolfram :).

8.
- Sant. $1 \leq k \leq 6$ är konvergent och för det måste den vara zero-stable.
- Falskt. Högsta ordning är $p=2$.
- Sant. De är designade för det.

9. $y' = \lambda y, \quad y(0)=1, \quad t \geq 0 \quad \lambda \in \mathbb{C}$

$y(t) = e^{\lambda t}, \quad Re(\lambda) \leq 0$ för stabilitet (matematisk)

10. If $R(z)$ maps all of $\mathbb{C}^-$ into the unit circle, then the method is A-stable.

(For RK all poles have positive real parts and $|R(i\omega)| \leq 1$)

(Multistep: $\mathrm{Re}\, z \leq 0$ $|\omega_j(z)| \leq 1$)

Numeriskt stabil oavsett storlek på steg.

11. Multistep använder flera äldre punkter och derivator, Runge-Kutta tar något mellansteg men använder inte tidigare information.

12. Sant. Consistent RK är alltid konvergenta.

13. $\dot{y} = Ay$ $\quad y = Tz \quad A = T\Lambda T^{-1}$

Explicit euler: $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$ — diskretisering först

$$y_{n+1} = y_n + hAy_n$$

$$y_{n+1} = (1 + hA)y_n$$

$$Tz_{n+1} = (T + hT\Lambda T^{-1})z_n$$

$$z_{n+1} = (T^{-1}T + hT^{-1}T\Lambda)z_n = (1 + h\Lambda)z_n$$

$$\dot{y} = Ay \Rightarrow T\dot{z} = T\Lambda T^{-1}Tz \Rightarrow \dot{z} = \Lambda z$$ — diagonalisering först

$$z_{n+1} = z_n + h\dot{z}_n = (1 + h\Lambda)z$$

Samma! kommuterar.

14.

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ \hline & 1/4 & 0 & 3/4 \end{array}$$

15. $hY_1' = hf(t_n, y_n)$

$hY_2' = hf(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hY_1')$

$hY_3' = hf(t_n + h/2, y_n + hY_2'/2)$

$hY_4' = hf(t_n + h, y_n + hY_3')$

$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(hY_1' + 2hY_2' + 2hY_3' + hY_4')$

Explicit (lower triangular)

16. $\dot{y} = f(t,y) = \lambda y$

$hY_1' = h\lambda y_n$

$hY_2' = h\lambda(y_n + \frac{1}{2}h\lambda y_n) = (h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2)y_n$

$hY_3' = h\lambda(y_n + \frac{1}{2}(h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2)y_n) = (h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2 + \frac{1}{4}(h\lambda)^3)y_n$

$hY_4' = h\lambda(y_n + (h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2 + \frac{1}{4}(h\lambda)^3)y_n) = (h\lambda + (h\lambda)^2 + \frac{1}{2}(h\lambda)^3 + \frac{1}{4}(h\lambda)^4)y_n$

$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}h\lambda y_n + \frac{1}{3}(h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2)y_n + \frac{1}{3}(h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2 + \frac{1}{4}(h\lambda)^3)y_n + \frac{1}{6}(h\lambda + (h\lambda)^2 + \frac{1}{2}(h\lambda)^3 + \frac{1}{4}(h\lambda)^4$

$= \left(1 + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)h\lambda + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right)(h\lambda)^2 + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{12}\right)(h\lambda) + \frac{1}{20}(h\lambda)^4\right)y_n$

$= 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} + \frac{(h\lambda)^3}{3!} + \frac{(h\lambda)^4}{4!} = R(h\lambda) \approx e^{h\lambda}$

Lösning till $\dot{y} = \lambda y$ är $y = e^{\lambda t}y(0)$

17.

$$\begin{array}{c|cc} 1/3 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 1/3 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

$$R(z) = 1 + z b^T (1 - zA)^{-1} 1$$

$$= 1 + z\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - 1/3 z & 0 \\ -1/3 z & 1 - 1/3 z \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 1 + \frac{z\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}}{(1 - 1/3 z)^2 + 1/3 z} \begin{pmatrix} 1 - \frac{z}{3} & 0 \\ \frac{z}{3} & 1 - \frac{z}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 + \frac{z}{\frac{z^2}{9} - \frac{z}{3} + 1} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \frac{z}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 1 + \frac{z}{\frac{z^2}{9} - \frac{z}{3} + 1}\left(1 - \frac{z}{6}\right) = \frac{z - \frac{z^2}{6}}{\frac{z^2}{9} - \frac{z}{3} + 1} + 1 = \frac{9z - \frac{9z^2}{6}}{z^2 - 3z + 9} + 1$$

$$= \frac{-\frac{9z^2}{6} + 9z + z^2 - 3z + 9}{z^2 - 3z + 9} = \overbrace{\frac{-\frac{1}{2}z^2 + 6z + 9}{z^2 - 3z + 9}}^{R(z)}$$

Poler: $z^2 - 3z + 9 = 0 \Rightarrow z = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{36}{4}} \Rightarrow z = \frac{3}{2} \pm \frac{i\sqrt{27}}{2}$

- Poler har positiv realdel
- $|R(i\omega)| \leq 1$ för alla ω.

$$|R(i\omega)|^2 = \frac{1}{2}\left|\frac{(i\omega)^2 - 12i\omega - 18}{(i\omega)^2 - 3i\omega + 9}\right|^2 = \frac{1}{2}\left|\frac{-\omega^2 - 12i\omega - 18}{-\omega^2 - 3i\omega + 9}\right| = \frac{1}{2}\frac{(-\omega^2 - 18)^2 - 144\omega^2}{(-\omega^2 + 9)^2 - 9\omega^2}$$

$\omega = 0 \Rightarrow |R(i\omega)|^2 = 2 > 1 \Rightarrow$ ej A-stabil.

18. En RK-method som använder två RK-metoder av olika ordning på samma gång. Skillnaden kan användas som feluppskattning.

19. Finns inga A-stable explicit RK metoder. Pga $R(h\lambda)$ är polynom och $\to \infty$ då $h\lambda \to \infty$.
Finns inga A-stable av ordning > 2.

20.

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} hf(t_n, y_n) + \frac{1}{2} hf(t_{n+1}, y_{n+1})$$

trapezoidal

$$hY_1' = hf(t_n, y_n)$$

$$hY_2' = hf(t_n + h, y_n + 1/2 hY_1' + 1/2 hY_2')$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} hf(t_n, y_n) + \frac{1}{2} hf(t_n + h, y_n + 1/2 hY_1' + 1/2 hY_2')$$