NELLY FRANZÉN, D19

SAMMANFATTNING LINJÄR ALGEBRA

① VEKTORER

En vektor $\bar{v}$ är en linjärkombination av vektorerna $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_p$ om det gäller att:

$$\bar{v} = \lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2 + \ldots + \lambda_p\bar{u}_p$$

SKALÄRPRODUKT

$\bar{u}\cdot\bar{v} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)\cdot(b_1, b_2, \ldots, b_n) = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$ ← Resultatet ett <u>tal</u>

... kan även skrivas ...

$\bar{u}\cdot\bar{v} = \|\bar{u}\|\|\bar{v}\|\cos\theta$

ENHETSVEKTORN

$\bar{e} = \frac{1}{\|\bar{u}\|}\cdot\bar{u}$

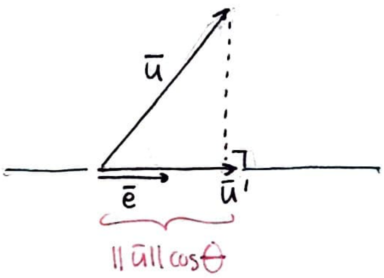
ORTOGONAL PROJEKTION

Vektorerna $\bar{u}$ och $\bar{v}$ är ortogonala om

$$\boxed{\bar{u}\cdot\bar{v} = 0}$$

Den ortogonala projektionen $\bar{u}'$ av vektorn $\bar{u}$ på vektorn $\bar{e}$ kan beskrivas enligt

$$\boxed{\bar{u}' = (\bar{u}\bar{e})\cdot\bar{e}}$$

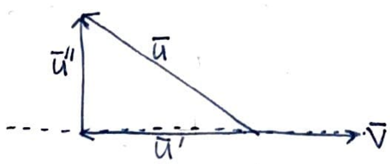


EX. För att bestämma den ortogonala projektionen $\bar{u}'$ av $\bar{u} = (2, 4, -1)$ på vektorn $\bar{v} = (1, -2, 0)$, måste vi först normera $\bar{v}$...

$$\bar{e} = \frac{1}{\|\bar{v}\|}\bar{v} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, -2, 3)$$

... och kan därefter bestämma $\bar{u}'$ genom formeln ovan: $(\bar{u}' = (\bar{u}\bar{e})\cdot\bar{e})$

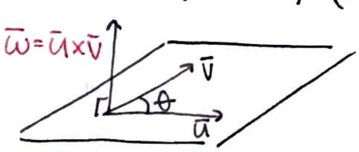
Vi kan även komposantuppdela vektorn $\bar{u}$ till summan av vektorerna $\bar{u}'$ och $\bar{u}''$:



$\Rightarrow \bar{u} = \bar{u}' + \bar{u}''$

VEKTORPRODUKT

$u \times v = (a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3)$ ← Resultatet en <u>vektor</u>



OBS! Det gäller att vektorprod. $\bar{u}\times\bar{v}$ är ortogonal mot både $\bar{u}$ och $\bar{v}$.

MINNESREGEL

Skriv elementen två gånger; $\bar{u}$ överst, $\bar{v}$ underst

$$\begin{matrix} \cancel{a_1} & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 & \cancel{a_3} \\ \cancel{b_1} & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 & \cancel{b_3} \end{matrix}$$

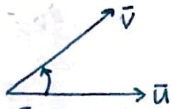
Stryk yttersta och tag $^{+}\times^{-}$

a_2	a_3	a_1	a_2
b_2	b_3	b_1	b_2

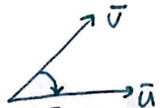
$\bar{u}\times\bar{v} = (a_1 a_2 a_3)\times(b_1 b_2 b_3) = a_2b_3 - a_3b_2, a_1b_3 - a_3b_1, a_1b_2 - a_2b_1.$

ORIENTERING

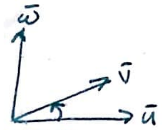
EX.



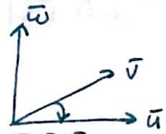
$\bar{u}, \bar{v}$ positivt orienterade



$\bar{u}, \bar{v}$ negativt orienterade



$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ pos. orienterade



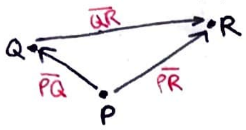
$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ neg. orienterade.

vektorerna $\underline{\bar{u}, \bar{v}, \bar{u} \times \bar{v}}$ är positivt orienterade.

② VEKTORER SOM GEOMETRISKA OBJEKT

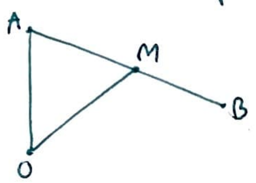
VEKTORADDITION

$\overline{PR} = \overline{PQ} + \overline{QR}$



EX. MITTPUNKTSFORMELN

Låt M vara mittpunkten på $\overline{AB}$. Visa att $\overline{OM} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB})$ för varje punkt O.



$$\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AM} = \overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{AB} = \overline{OA} + \frac{1}{2}(\overline{AO} + \overline{OB}) =$$

$$= \overline{OA} + \frac{1}{2}(\overline{OB} - \overline{OA}) = \frac{1}{2}\overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{OB} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB}) \quad \square$$

- **LINJE PÅ PARAMETERFORM**

$$\boxed{\begin{aligned} x &= a_0 + ta \\ y &= b_0 + tb \qquad t \in \mathbb{R} \\ (z &= c_0 + tc) \end{aligned}}$$

- **LINJE PÅ NORMALFORM**

$$\boxed{a(x - a_0) + b(y - b_0) = 0}$$

- **PLAN PÅ PARAMETERFORM**

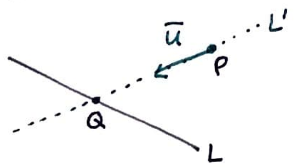
$$\boxed{\begin{aligned} x &= a_0 + sa_1 + ta_2 \\ y &= b_0 + sb_1 + tb_2 \qquad t \in \mathbb{R} \\ z &= c_0 + sc_1 + tc_2 \end{aligned}}$$

- **PLAN PÅ NORMALFORM**

$$\boxed{a(x - a_0) + b(y - b_0) + c(z - c_0) = 0}$$

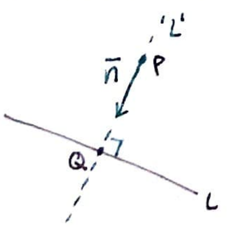
PROJEKTION OCH SPEGLING

- **SNED PROJEKTION (LINJE 2D)**



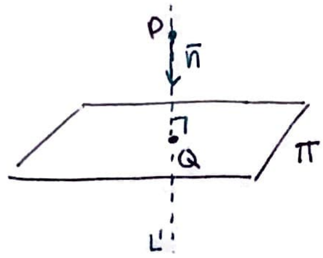
Bestäm ekvationen för linjen L' genom P med riktning ū på parameterform. Hitta skärningen mellan L' och L.

- **ORTOGONAL PROJEKTION (LINJE 2D)**



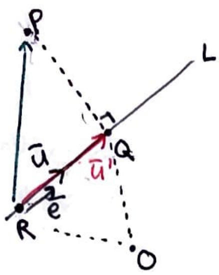
Bestäm ekvationen för L' genom P med riktning ortogonal mot L.
Använd normalvektorn som riktningsvektor.
Beräkna skärningspunkten Q genom insättning i ekvationen för linjen L.

ORTOGONAL PROJEKTION (PLAN)



Om P är punkten vi vill projicera och $\bar{u}$ är riktningen så ställer vi upp ekvation på parameterform för linjen L' som går genom P med riktning $\bar{u}$.
Projektionen fås som skärningspunkt mellan L' och π.

ORTOGONAL PROJEKTION PÅ LINJE I RUMMET



Väljer en punkt R på L och skapar vektorn $\overline{PR}$.
Normerar vektorn $\bar{u}$ på linjen L och får vektorn u' och kan då projicera $\overline{RP}$ på $\bar{e}$:

$$\bar{u}' = \overline{RQ} = (\overline{RP} \cdot \bar{e})\bar{e}$$

Koordinaterna för Q blir:

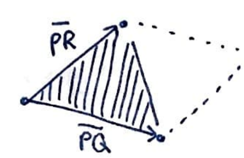
$$\overline{OQ} = \overline{OR} + \overline{RQ}$$

... and we're done!

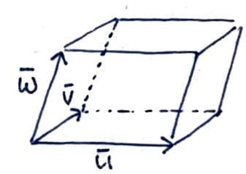
AREA OCH VOLYM

Arean som vektorerna $\bar{u}, \bar{v}$ i $\mathbb{R}^3$ spänner upp ges av $\|\bar{u} \times \bar{v}\|$.

som vektorerna $\bar{u} = (a_1, a_2)$ och $\bar{v} = (b_1, b_2)$ spänner upp ges av $|a_1 b_2 - a_2 b_1|$ i $\mathbb{R}^2$



Volymen som vektorerna $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ i $\mathbb{R}^3$ spänner upp ges av $|(\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{w}|$

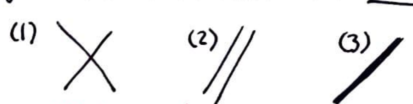


③ LINJÄRA EKVATIONSSYSTEM

GAUSSELIMINATION

= systematiskt eliminera de obekanta i en ekvation.

system som svarar mot 2 linjer:



en skärningsp. | inga lösningar | oändligt många lösningar

SATS 3.2
Ett linjärt ekvationssystem har ingen, entydig eller oändligt många lösningar.

FÖLJDSATS 3.1
Ett homogent linj. ekvationssystem har antingen entydig eller oändligt många lösningar.

ÖVERBESTÄMDA SYSTEM

= har fler ekvationer än obekanta (förväntar oss att lösning saknas)

UNDERBESTÄMDA SYSTEM

= har fler obekanta än ekvationer (förväntar oss oändligt många lösningar)

HOMOGENA KVADRATISKA SYSTEM

(4) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ \quad y - 4z = -1 \\ \quad\quad z = 0 \end{cases}$

entydig lösning

(5) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ \quad y - 4z = -1 \\ \quad\quad 0 = 1 \end{cases}$

saknar lösning

PIVÅVARIABEL
FRI VARIABEL

(6) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ \quad y - 4z = -1 \\ \quad\quad 0 = 0 \end{cases}$

oändligt många lösningar

④ MATRISER

DEF. En matris är ett rektangulärt schema av tal.

MULTIPLIKATION AV MATRISER

Om A är av typ $\underline{p \times q}$ och B av typ $\underline{q \times r}$, så blir produkten av typ $\underline{p \times r}$.

(4.7) $(A+B)C = AC + BC$
(4.8) $A(B+C) = AB + AC$
(4.9) $\alpha(AB) = A(\alpha B)$
(4.10) $(AB)C = A(BC)$

OBS: $AB \neq BA$, dvs ej kommutativt!

TRANSPONAT

Transponatet A^T av A fås genom att byta plats på rader och kolonner.

EX. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(4.15) $(A^T)^T = A$
(4.16) $(A+B)^T = A^T + B^T$
(4.17) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
(4.18) $(AB)^T = B^T A^T$

... matrisen A är <u>symmetrisk</u> om $A^T = A$ (av typ $n \times n$)

BEVIS AV (4.18).

På plats (i,j) i $(AB)^T$ = plats (i,j) i A står:

$$(A \text{ rad } j) \cdot (B \text{ kolonn } i)$$

På plats (i,j) i $B^T A^T$ står:

$$(B^T \text{ rad } i) \cdot (A^T \text{ kolonn } j) = (B \text{ kolonn } i) \cdot (A \text{ rad } j)$$

Skalärprodukten blir kommutativ, så likhet gäller för alla positioner, och alltså gäller:

$$(AB)^T = B^T A^T$$

□

INVERS MATRIS

Invers matris beräknas enligt:

$$A\bar{x} = \bar{y} \Leftrightarrow \bar{x} = A^{-1}\bar{y}$$

Matrisen A är inverterbar om det finns en matris A^{-1} sådan att...

$$\boxed{AA^{-1} = A^{-1}A = I}$$

SATS 4.3
Om A är inverterbar är inversen entydig.

BEVIS: Antag att matriserna B och C är inverser till A, dvs

$$AB = BA = I \quad \text{och} \quad AC = CA = I$$

Speciellt gäller det då att...

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$$

Vi ser att $B = C$ vilket visar entydigheten hos inversen. □

(4.27) $(A^{-1})^{-1} = A$

(4.28) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

(4.29) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

HÖGER- OCH VÄNSTERINVERS

- V är vänsterinvers till A om $VA = I$
- H är högerinvers till A om $AH = I$

HJÄLPSATS (4.1)

A har vänsterinvers $\Leftrightarrow$ $A\bar{x} = \bar{y}$ entydig lösning för varje $\bar{y}$

$A\bar{x} = \bar{y}$ lösning för varje $\bar{y}$ $\Leftrightarrow$ A har högerinvers

BEVIS:

- A vänsterinvers V:

  $A\bar{x} = \bar{y} \Rightarrow VA\bar{x} = V\bar{y} \Rightarrow \bar{x} = V\bar{y}$, vilket blir den entydiga lösningen.

- $A\bar{x} = \bar{y}$ lösning för varje $\bar{y}$:

  Finns lösning $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ så att $A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ så att $A\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

  Då gäller det att ...

  $$A\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  ... så vi har skapat högerinversen $H = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. □

ORTOGONAL MATRIS

En mängd vektorer sägs vara en ortonormerad mängd om de är:

- parvis ortogonala (skalärprodukt = 0)
- normerade (längd = 1)

Kvadratisk matris är ortogonal om dess kolonner bildar en ortonormerad mängd. ← borde heta "ortonormerad matris" istället...

SATS 4.7

För en kvadratisk matris gäller det att:

A ortogonal $\Leftrightarrow$ A inverterbar med $A^T = A^{-1}$

BEVIS: vi tittar på matrisen $A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$ av typ 3×3. Skalärprodukten A^TA blir då...

$$A^TA = \begin{pmatrix} \cdots & A_1 & \cdots \\ \cdots & A_2 & \cdots \\ \cdots & A_3 & \cdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1A_1 & A_1A_2 & A_1A_3 \\ A_2A_1 & A_2A_2 & A_2A_3 \\ A_3A_1 & A_3A_2 & A_3A_3 \end{pmatrix}$$

Detta är lika med enhetsmatrisen precis då:

$a_ia_i = 1$ för $i = 1,2,3$ och $a_ia_j = 0$ då $i \neq j$

... dvs precis då $a_1 a_2 a_3$ bildar en ortonormerad mängd. Det gäller alltså att $A^TA = I$ om och endast om A är ortogonal. □

MINSTA KVADRATMETODEN

$$\boxed{A^TA\bar{x} = A^T\bar{y}}$$

⑤ CENTRALA BEGREPP

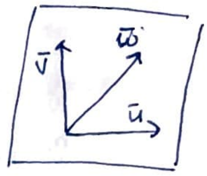
LINJÄRT BEROENDE/OBEROENDE

Vektorerna $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_p$ är linjärt beroende om någon av dem är en linjärkombination av de övriga.

Om *ingen* linjärkombination finns är de linjärt oberoende.

ANMÄRKNING:

- Två vektorer $\bar{u}, \bar{v}$ linjärt beroende <=> vektorerna parallella ($\bar{u} = \lambda \bar{v}$ eller $\bar{v} = \lambda \bar{u}$)
- Tre vektorer $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ linjärt oberoende <=> Vektorerna ligger alla i ett plan (om t.ex. $\bar{w} = \lambda_1 \bar{u} + \lambda_2 \bar{v}$ så ligger $\bar{w}$ i planet som $\bar{u}$ och $\bar{v}$ spänner upp. omvänt i figuren kan $\bar{w}$ byggas upp av $\bar{u}$ och $\bar{v}$.)



SATS 5.2
Vektorerna $u_1 u_2 \ldots u_p$ linjärt beroende om:

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p \bar{u}_p = 0$$

har någon lösning med $\lambda \neq 0$.

SATS 5.3
Vektorerna $u_1 u_2 \ldots u_p$ linjärt oberoende om:

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 \bar{u}_2 + \ldots + \lambda_p \bar{u}_p = 0$$

endast har trivial lösning $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0$.

BAS

Vektorerna $\bar{u}_1 \bar{u}_2 \ldots \bar{u}_p$ utgör en bas för $\mathbb{R}^n$ om varje $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ kan skrivas:

$$\bar{v} = x_1 \bar{u}_1 + x_2 \bar{u}_2 + \ldots + x_p \bar{u}_p$$ ← med entydigt bestämda $x_1 x_2 \ldots x_p$!

Vektorerna $\bar{u}_1 \bar{u}_2 \ldots \bar{u}_p$ spänner upp $\mathbb{R}^n$ om varje $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ kan skrivas:

$$\bar{v} = x_1 \bar{u}_1 + x_2 \bar{u}_2 + \ldots + x_p \bar{u}_p$$

Vektorerna $\bar{u}_1 \bar{u}_2 \cdots \bar{u}_p$ utgör en bas för $\mathbb{R}^n$ om de både spänner upp $\mathbb{R}^n$ och är linjärt oberoende.

bas <=> linj. oberoende <=> spänner upp

RANG OCH NOLLDIMENSION

- Kolonnrummet = mängden av alla linj. komb. av kolonnerna i en matris A
- Rangen = rang A, maximala antalet linj. oberoende kolonner i A, dvs antalet pivåvariabler.
- nollrummet = mängden av alla lösningar till $A\bar{x} = 0$.
- nolldimension = nolldim A, maximala antalet linj. oberoende lösningar till $A\bar{x} = 0$.

$$\boxed{\underbrace{\text{rang } A}_{\text{antal pivåvariabler}} + \underbrace{\text{nolldim } A}_{\text{antal fria variabler}} = \underbrace{n}_{\text{antal kolonner}}}$$

OBS: rang A = rang A^T

LINJÄRA RUM

= en mängd L med addition och multiplikation som uppfyller att

$\bar{u} \in L, \bar{v} \in L \Rightarrow \bar{u}+\bar{v} \in L$ och $\lambda \in \mathbb{R}, \bar{u} \in L \Rightarrow \lambda \cdot \bar{u} \in L$

UNDERRUM

= en delmängd M av ett linjärt rum L, sluten under addition och multiplikation med tal:

$\bar{u} \in M, \bar{v} \in M \Rightarrow \bar{u}+\bar{v} \in M$ och $\lambda \in \mathbb{R}, \bar{u} \in M \Rightarrow \lambda \cdot \bar{u} \in M$

EX. Låt M vara mängden av alla symmetriska matriser av typ $n \times n$, dvs sådana att $A = A^T$. Med räknelagarna för transponatet får vi för två symmetriska matriser...

$(A+B)^T = A^T + B^T = A + B \qquad (\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha A$

Matriserna $A+B$ och αA är därför också symmetriska, så M är sluten under addition och multiplikation med tal = underrum!

⑥ DETERMINANTER

2×2-matris:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

3×3-matris:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Longrightarrow \begin{array}{cccccc} + & + & + & - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}$$

För en 2x2 och 3x3-matris A gäller det att dess kolonner är linjärt oberoende om $\det A \neq 0$.

EGENSKAPER

För en 2x2 och 3x3-matris gäller det att:

- Determinanten linjär i varje kolonn
- Om två kolonner lika är $\det A = 0$
- Determinanten av enhetsmatrisen är 1.
- Om två kolonner byter tecken så ändrar determinanten tecken.
- Determinanten ändras inte om man till en kolonn adderar en multipel av en annan kolonn.

$\boxed{\det A = \det A^T}$ $\boxed{\det AB = \det A \det B}$ $\boxed{\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}}$

CRAMERS REGEL

För en 3x3-matris med $\det A \neq 0$ har $A\bar{x} = \bar{y}$ den entydiga lösningen $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ där...

$$\boxed{x_1 = \frac{\det(\bar{y}\ \bar{a}_2\ \bar{a}_3)}{\det A} \qquad x_2 = \frac{\det(\bar{a}_1\ \bar{y}\ \bar{a}_3)}{\det A} \qquad x_3 = \frac{\det(\bar{a}_1\ \bar{a}_2\ \bar{y})}{\det A}}$$

UTVECKLING EFTER RAD/KOLONN

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{D_{11}} - a_{12}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}_{D_{12}} + a_{13}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}_{D_{13}}$$

... vi får D_{ij} genom att stryka rad i, kolonn j för att få underdeterminanten:

$$D_{12} = \begin{vmatrix} \cancel{D_{11}} & \cancel{D_{12}} & \cancel{D_{13}} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{vmatrix}$$

ADJUNKTEN:

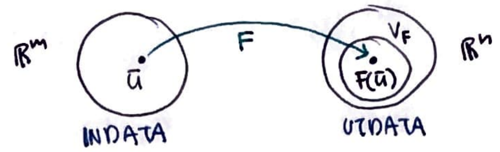
$$\text{adj}\,A = \begin{pmatrix} D_{11} & -D_{12} & D_{13} \\ -D_{21} & D_{22} & -D_{23} \\ D_{31} & -D_{32} & D_{33} \end{pmatrix}^T \implies \boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj}\,A}$$

STÖRRE DETERMINANTER

EX.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{kolonn } (2) - 2\cdot(1) \\ (3) - 3\cdot(1) \\ (4) - 4\cdot(1) \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ -1 & 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{utv. första} \\ \text{raden} \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -1 & -2 & -4 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 6$$

⑦ LINJÄRA AVBILDNINGAR

= en regel som till varje $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$ ordnar precis en vektor $F(\bar{u}) \in \mathbb{R}^n$. $\mathbb{R}^n$ är <u>def. mängden</u> och alla möjliga $F(\bar{u})$ är <u>värdemängden</u>.



En avbildning F sägs vara en linjär avbildning om:

$$\begin{matrix} (\mathrm{I}) \\ (\mathrm{II}) \end{matrix} \begin{cases} F(\bar{u}+\bar{v}) = F(\bar{u}) + F(\bar{v}) \\ F(\lambda\bar{u}) = \lambda F(\bar{u}) \end{cases} \quad \text{alternativt} \quad F(\lambda\bar{u} + \mu\bar{v}) = \lambda F(\bar{u}) + \mu F(\bar{v})$$

EX. Nollvektorn:

$$F(0) = F(0 \cdot \bar{u}) = 0 \cdot F(\bar{u}) = 0$$

$$\ldots F(0) = 0$$

AVBILDNINGSMATRIS

"Kolonnerna i avbildningsmatrisen är bilderna av basvektorerna"

Om avbildningen F är linjär kan den uttryckas på matrisformen $F(\bar{x}) = A\bar{x}$.

BEVIS: Antag att F är linjär och att vektorn $(\bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_p)$ avbildas på $(\bar{y}_1 \bar{y}_2 \ldots \bar{y}_p)$. Då gäller sambandet...

$$(\bar{y}_1, \bar{y}_2 \ldots \bar{y}_p) = F(\bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_p) = x_1 F(\bar{e}_1) + x_2 F(\bar{e}_2) + \ldots + x_p F(\bar{e}_m)$$

... där $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots \bar{e}$ är standardbasen för $\mathbb{R}^m$.

Bilderna för basvektorerna är kolonnerna i avbildningsmatrisen...

$$\begin{aligned} F(\bar{e}_1) &= (a_{11}\, a_{21} \ldots a_{n1}) \\ F(\bar{e}_2) &= (a_{12}\, a_{22} \ldots a_{n2}) \\ &\vdots \\ F(\bar{e}_m) &= (a_{1m}\, a_{2m} \ldots a_{nm}) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \ldots + x_m \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}$$

Vilket kan skrivas:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{\bar{y}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}}_{\bar{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}_{\bar{x}} \qquad \square$$

ROTATION

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

⑧ EGENSKAPER HOS LINJÄRA AVBILDNINGAR

VÄRDEMÄNGD

$V_F = \{\bar{v} \in \mathbb{R} ; \bar{v} = F(\bar{u}) \text{ för något } \bar{u} \in \mathbb{R}\}$

$\boxed{\text{rang } A = \dim V_F}$

SAMMANSÄTTNING

SATS 8.1

Den sammansatta avbildningen $G \circ F$ är linjär med avb.matrisen BA.

BEVIS: F ges av $F(\bar{x}) = A\bar{x}$.

G ges av $G(\bar{x}) = B\bar{x}$.

$(G \circ F)(\bar{x}) = G(F(\bar{x})) = G(A\bar{x}) = B(A\bar{x}) = (BA)\bar{x}$

INVERS AVBILDNING

- Injektiv

$\bar{u}_1 \neq \bar{u}_2 \Rightarrow F(\bar{u}_1) \neq F(\bar{u}_2)$

$\bar{u}_1 = \bar{u}_2 \Rightarrow F(\bar{u}_1) = F(\bar{u}_2)$

$F(\bar{u}) = 0 \Rightarrow \bar{u} = 0$

- Surjektiv

F surjektiv $\Leftrightarrow$ A:s kolonner spänner upp $\mathbb{R}^n$

- Bijektiv

F bijektiv $\Leftrightarrow$ A:s kolonner bas för $\mathbb{R}^n$

(bijektiv = injektiv + surjektiv)

- Isometrisk avbildning

$\|F(\bar{u})\| = \|\bar{u}\|$

F isometrisk $\Leftrightarrow$ F ortogonal

- symmetrisk avbildning

$F(\bar{u}) \cdot \bar{v} = \bar{u} \cdot F(\bar{v})$

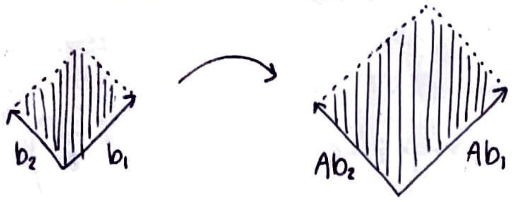
F symmetrisk $\Leftrightarrow$ A symmetrisk

SAMMANFATTNING

För en $n \times n$-matris A är följande ekvivalenta:

1. Kolonnerna i A utgör en bas för $\mathbb{R}^n$.
2. Kolonnerna i A är linjärt oberoende
3. Kolonnerna i A spänner upp $\mathbb{R}^n$
4. Raderna i A utgör en bas för $\mathbb{R}^n$
5. Raderna i A är linjärt oberoende.
6. Raderna i A spänner upp R^n.
7. Ekvationssystemet $A\bar{x} = \bar{y}$ har entydig lösning för varje högerled $\bar{y}$.
8. Ekvationssystemet $A\bar{x} = \bar{y}$ har entydig lösning för något högerled $\bar{y}$.
9. Ekvationssystemet $A\bar{x} = \bar{y}$ har lösning för varje högerled $\bar{y}$.
10. Matrisen A är inverterbar.
11. Rang $A = n$
12. $\det A \neq 0$
13. Avbildningen med avbildningsmatris A är injektiv.
14. —— " —— är surjektiv.
15. —— " —— är bijektiv.

LINJÄRA AVBILDNINGAR OCH DETERMINANTER



$\Rightarrow \det C = \det A \cdot \det B$

Låt F vara en linjär avbildning med avb.matris A. Då gäller det att arean/volymen ändras med en faktor $|\det A|$ när vi tillämpar F på ett parallellogram/parallellepiped. Om $\det A > 0$ bevaras orienteringen, medan $\det A < 0$ ändras orienteringen.

För ortogonala matriser gäller det att $\boxed{\det A = \pm 1}$

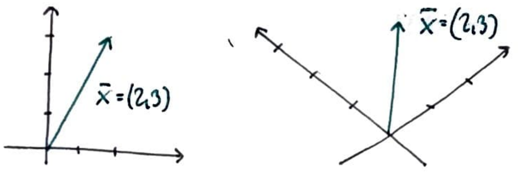
BEVIS: $\det A^{-1} = \det A^T \iff$

$\frac{1}{\det A} = \det A \iff$

$(\det A)^2 = 1 \iff$

$\det A = \pm 1$

9 BAS OCH KOORDINATBYTE



Om $\bar{u}_1, \bar{u}_2 \ldots \bar{u}_n$ är en bas för $\mathbb{R}^n$ och ...

$$\bar{x} = \hat{x}_1\bar{u}_1 + \hat{x}_2\bar{u}_2 + \ldots + \hat{x}_n\bar{u}_n$$

... har vektorn $\bar{x}$ koordinaterna $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2 \ldots \hat{x}_n)$ i basen $\bar{u}_1 \bar{u}_2 \ldots \bar{u}_n$.

EX. $\bar{u}_1 = (1,2)$ och $\bar{u}_2 = (-2,1)$ är bas för $\mathbb{R}^n$ ($\bar{u}_1 \nparallel \bar{u}_2$)

För $\bar{x} = (4,3)$ gäller ...

$$\underbrace{(4,3)}_{\bar{x}} = 2\underbrace{(1,2)}_{\bar{u}_1} - 1\underbrace{(-2,1)}_{\bar{u}_2}$$

... så $\bar{x}$ får de nya koordinaterna $\hat{x} = (2,-1)$ i basen $\bar{u}_1, \bar{u}_2$.

BASBYTE

$$\boxed{\hat{E} = S^T E \Rightarrow \bar{x} = S\hat{x}}$$

... där S är koordinatbytesmatrisen och $\bar{x}$ betecknar koordinaterna i den gamla basen E och $\hat{x}$ koordinaterna i den nya basen $\hat{E}$.

ORTONORMERAT BASBYTE

$$\boxed{\hat{E} = S^T E \Rightarrow \bar{x} = S\hat{x} \Rightarrow \hat{x} = S^{-1}\bar{x} = S^T\bar{x}}$$

... man kan även få de nya koordinaterna m.h.a skalärprodukt:

$\boxed{\hat{x} = \bar{x}\hat{e}}$ ← OBS! gäller för ortonormerad bas.

KOORDINATBYTE FÖR LINJÄRA AVBILDNINGAR

$$\boxed{\hat{A} = S^{-1}AS}$$

EX. Avbildningsmatrisen som svarar mot spegling i Π: $x-y+z=0$ är $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

- Inför en ny ortonormerad bas så att $\hat{e}_1, \hat{e}_2$ blir parallella med planet Π och $\hat{e}_3$ vinkelrät mot planet.

  Utgår från normalvektorn $(1,-1,1)$ och normerar för att få:

  $$\hat{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$$

  Varje val av vektor parallell med planet ger vektor ortogonal mot $\hat{e}_3$, så kan t.ex. för $\hat{e}_1$ välja:

  $$\hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) \quad \leftarrow \text{OBS! } \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_3 = 0$$

  Sista basvektorn $\hat{e}_2$ skall vara ortogonal mot $\hat{e}_1$ och $\hat{e}_3$ så tar vektorprodukt:

  $$\hat{e}_2 = \hat{e}_1 \times \hat{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)$$

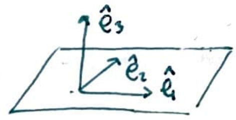
- Vi får:

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) \\ \hat{e}_2 &= \tfrac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2) \\ \hat{e}_3 &= \tfrac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1) \end{aligned} \implies S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$\leftarrow$ OBS! ortonormerat basbyte innebär att: $A^{-1} = A^T$! ☺

Avbildningsmatrisen för speglingen i nya basen?

$$\hat{A} = S^{-1}AS = S^TAS = [\text{efter lite beräkningar} \ldots] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Π: 

ORIENTERING

$\hat{e}_1, \hat{e}_3, \hat{e}_1 \times \hat{e}_3$ positivt orient.

$\hat{e}_1, \hat{e}_1 \times \hat{e}_3, \hat{e}_3$ negativt orient.

$\hat{e}_1, \hat{e}_3 \times \hat{e}_1, \hat{e}_3$ positivt orient.

⑩ EGENVÄRDEN OCH EGENVEKTORER

- TILL AVBILDNING

  vektorn $\bar{u} \neq 0$ egenvektor till F, och talet $\lambda \in \mathbb{R}$ egenvärde till F om det gäller:

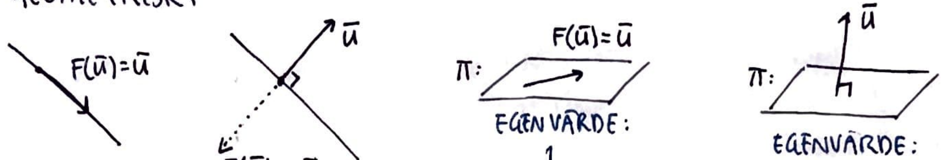
  $$F(\bar{u}) = \lambda \bar{u}$$

- TILL MATRIS

  vektorn $\bar{x} \neq 0$ egenvektor till A, och talet $\lambda \in \mathbb{R}$ egenvärde till A om det gäller:

  $$A\bar{x} = \lambda \bar{x}$$

GEOMETRISKT



EGENVÄRDE: 1

EGENVÄRDE: −1

EGENVÄRDE: 1

EGENVÄRDE: 0 ← avbildas på nollvektorn

BERÄKNING AV EGENVÄRDEN / EGENVEKTORER?

$$\boxed{\lambda \text{ egenvärde till } A \iff \det(\lambda I - A) = 0}$$

EX. EGENVÄRDEN

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^3 + 1 + 1 - (\lambda-2) - (\lambda-2) - (\lambda-2) = [\ldots] = \lambda(\lambda-3)^2 = 0$$

... där $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

... ger egenvärdena $\underline{\lambda = 0}$ och $\underline{\lambda = 3}$.

EGENVEKTORER

$\lambda = 0$: $0 - A\bar{x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \iff (x, y, z) = \underline{t(1, -1, 1)},\ t \neq 0$

$\lambda = 3$: $(3I - A)\bar{x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff$ ... alla (x, y, z) som uppfyller $x - y + z = 0$!

⑪ DIAGONALISERING

DIAGONALMATRIS

$$\boxed{D = \hat{A} = S^{-1}AS}$$

EX. Om vi inför en ny bas av egenvektorer, ex. $\hat{e}_1 = (-2, 1)$ och $\hat{e}_2 = (1, 2)$ får vi koordinatbytesmatrisen:

$$S = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrisen A blir i vår nya bas:

$$\hat{A} = S^{-1}AS = [\ldots] = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

... vi får alltså en diagonalmatris där diagonalelementen är <u>egenvärdena</u>.

VARFÖR? Om F är avbildningen så gäller $F(\hat{e}_1) = 5\hat{e}_1$ och $F(\hat{e}_2) = -5\hat{e}_2$. I den nya basens koordinater är $\hat{e}_1 = (1,0)$ och $\hat{e}_2 = (0,1)$ för $\hat{e}_1 = 1 \cdot \hat{e}_1 + 0 \cdot \hat{e}_2$. När vi räknar i nya basen gäller alltså...

$$(1,0) \to 5(1,0)$$
$$(0,1) \to -5(0,1)$$

...och då kolumnerna i avbildningsmatrisen är bilderna av basvektorerna får vi i nya basen avb.matrisen i nya koordinater:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} = D$$

SATS 11.1
En kvadratisk matris A är diagonaliserbar om och endast om matrisen har en bas av egenvektorer. Kolumnerna i matrisen S är egenvektorer till A och diagonalelementen i matrisen D är motsvarande egenvärden.

För en $n \times n$-matris gäller...

- Om A har n olika egenvärden är A diagonaliserbar
- Om F är en symmetrisk linjär avbildning och $\bar{u}, \bar{v}$ egenvektorer med olika egenvärden λ, μ så gäller $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$.
- Om A är symmetrisk och har n olika egenvärden är A diagonaliserbar med en ortogonal koordinatbytesmatris.
- $\det A$ är produkten av egenvärdena, räknat med multiplicitet.

POTENSER AV MATRISER

$$\boxed{A^k = SD^kS^{-1}}$$