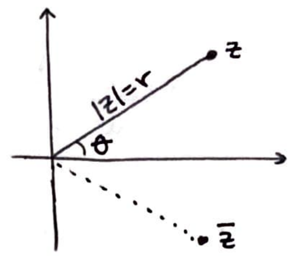
INSTUDERINGSFRÅGOR ENDIM. B2

NELLY FRANZÉN, B19

KAPITEL 6

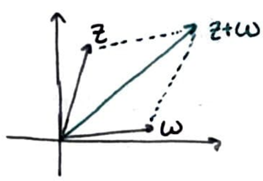
1. Av det komplexa talet $z = \overbrace{a+bi}^{\text{REKTANGULÄR FORM}} = \overbrace{r\cos\theta + ir\sin\theta}^{\text{POLÄR FORM}}$ definieras...
   - $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ (absolutbelopp)
   - $\bar{z} = a - bi$ (konjugatet)
   - $\arg z = \theta$ (vinkeln)



2. a) Absolutbeloppet av z motsvarar avståndet mellan z och origo i det komplexa talplanet.

   b) Konjugera z innebär att byta tecken på imaginärdelen – dvs spegling i den reella axeln.

   c) Addera w till z innebär att vektorerna för w respektive z adderas:



   dvs $z+w = (a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$.
   (samma princip för subtraktion)

   d) Multiplicera z med w innebär att vektorerna multipliceras:
   $z \cdot w = (a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$

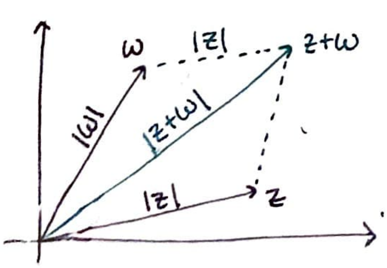
3.

(6.1)	$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$
(6.2)	$\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
(6.3)	$z \cdot \bar{z} = \vert z\vert^2$
(6.4)	$\vert z \cdot w\vert = \vert z\vert \cdot \vert w\vert$
(6.5)	$\vert z+w\vert \le \vert z\vert + \vert w\vert$

BEVIS (6.2)
Med $z = a+bi$ och $w = c+di$ följer
$\overline{zw} = \overline{(a+bi)(c+di)} = \overline{(ac-bd)+(ad+bc)i} = ac-bd-(ad+bc)i$.
samt...
$\bar{z} \cdot \bar{w} = (a-bi)(c-di) = ac-bd+(-ad-bc)i = ac-bd-(ad+bc)i$
alltså HL=VL □

BEVIS (6.4)
$|zw|^2 = zw \cdot (\overline{zw}) = z \cdot w \cdot \bar{z} \cdot \bar{w} = z\bar{z} \cdot w\bar{w} = |z|^2|w|^2 = (|z||w|)^2$
och genom att dra roten ur får vi...
$|zw| = |z||w|$ (OBS! absolutbelopp alltid positivt, alltså kan vi bortse från negativt fall) □

4. TRIANGELOLIKHETEN (6.5)



Vi bildar en triangel med sidlängderna $|z|, |w|$ och $|z+w|$. Eftersom en sidlängd i en triangel aldrig är större än summan än de övriga två får vi olikheten i (6.5).
Likhet har vi precis då vektorerna för z och w är parallella och lika riktade. (alt. bevisa med cosinussatsen) □

5. DEFINITION 6.2 (KVOT AV KOMPLEXA TAL)

För komplexa tal u och w, där $w \neq 0$ definieras kvoten ...

$$\frac{u}{w} = \frac{u\bar{w}}{|w|^2}$$

... rektangulär form:

$$\frac{u}{w} = \frac{u\bar{w}}{|w|^2} = \frac{(a+bi)(c-di)}{((c^2+d^2)^{\frac{1}{2}})^2} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2} = \frac{(ac+bd)-(ad-bc)i}{c^2+d^2}$$

6. $e^{iy} = \cos y + i \sin y$

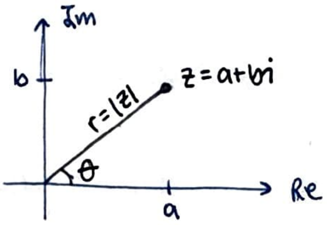
$e^{x+iy} = e^x e^{iy}$

7. $z = a+bi = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$

$r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$\theta = \arg z$

$$\begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{cases}$$



9. EULERS FORMLER

(1) $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

(2) $e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$

Adderar (1) + (2)

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta) + (\cos\theta - i\sin\theta) = 2\cos\theta$$

Subtraherar (1) − (2)

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta) - (\cos\theta - i\sin\theta) = 2i\sin\theta$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

10. SATS 6.1 (DE MOIVRES FORMEL)

För varje positivt heltal n gäller

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

dvs $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

SATS (6.17)

$$e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$e^{ix} \cdot e^{iy} = (\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y) =$$

$$= \underbrace{\cos x\cos y - \sin x\sin y}_{\cos(x+y)} + i\underbrace{(\sin x\cos y + \cos x\sin y)}_{\sin(x+y)} =$$

$$= \cos(x+y) + i\sin(x+y) = e^{i(x+y)} \qquad \square$$

11. KOMPLEXA ANDRAGRADSEKVATIONER

TYPFALL I. $z^2 = -3-4i$

II. $z^2 - (2+2i)z + 3+6i = 0$

(I) Ansätt $z = x+iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ och kvadrera

$(x+iy)^2 = -3-4i$

$x^2 + 2ixy - y^2 = -3-4i$

... där imaginärdel och realdel är lika:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 & (1) \\ 2xy = -4 & (2) \end{cases}$$

OBSERVERA att absolutbeloppen $|VL| = |HL|$

$|VL| = |x+iy|^2 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = x^2+y^2$

$|HL| = \sqrt{(-3)^2+(-4)^2} = \sqrt{25} = 5$

(3) $x^2+y^2 = 5$

Addera (1) och (3):

$2x^2 = -3+5 \iff x^2 = 1 \iff x = \pm 1$

Ekvation (2) ger nu:

$y = \frac{-4}{2x} = -\frac{2}{x} = \mp 2$

Alltså:

$z_1 = 1-2i$

$z_2 = -1+2i$

(II) Kvadratkomplettering ger...

$z^2 - 2(1+i)z + 3+6i = 0$

$(z-(1+i))^2 - (1+i)^2 + 3+6i = 0$

$\underbrace{(z-(1+i))}^2 = -3-4i$

Ansätt $\omega = x+iy$ och gör som typfall I.

Vi får då att:

$$\begin{cases} \omega_1 = 1-2i & (1) \\ \omega_2 = -1+2i & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1 - (1+i) = 1-2i & (1) \\ z_2 - (1+i) = -1+2i & (2) \end{cases}$$

Alltså:

$z_1 = 2-i$

$z_2 = 3i$

13. Den binomiska ekvationen $z^n = \omega$ löses genom att ansätta z på polär form.

EX. $z^4 = -4$

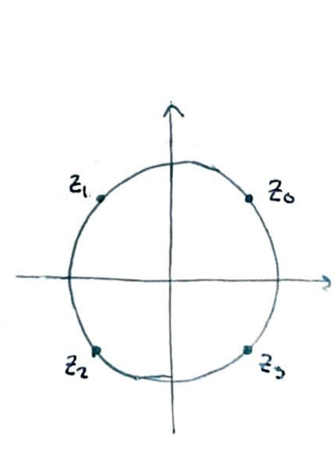
Ansätter att $z = re^{i\theta}$ och utnyttjar de Moivres formel...

$VL = z^4 = (re^{i\theta})^4 = r^4 e^{i4\theta}$

$HL = -4 = 4e^{i\pi}$

Jämför absolutbelopp och argument

$$\begin{cases} r^4 = 4 & r \geq 0 \quad (1) \\ 4\theta = \pi + k \cdot 2\pi & k \in \mathbb{Z} \quad (2) \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt{2} & (1) \\ \theta = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z} & (2) \end{cases}$$



Fjärdegradspolynom ger 4 lösningar, behöver alltså endast ta lösningarna $k = 0, 1, 2, 3$.

$\Rightarrow z_k = \sqrt{2} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right)}$,

där $k = 0, 1, 2, 3$

14. ALGEBRANS FUNDAMENTALSATS

[OBS! icke-reell och komplex är ej samma sak...]

= varje icke-konstant polynom med komplexa koefficienter har minst ett komplext nollställe.

SATS 6.3

Ett polynom $p(z)$ av grad $n \geq 1$ har precis n st nollställen (räknat med multiplicitet), och $p(z)$ kan faktoriseras:

$$p(z) = a_n(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(z-\alpha_n)$$

där a_n är koefficienten framför z^n och $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ är nollställena.

BEVIS: Enligt algebrans fundamentalsats finns ett nollställe α_1 till $p(z)$ så faktorsatsen ger

$$p(z) = (z-\alpha_1)\,q_{n-1}(z)$$

... för något polynom $q_{n-1}(z)$ av grad $n-1$.

Om $n-1 \geq 1$, dvs om $q_{n-1}(z)$ är en icke-konstant, så följer det på samma sätt att $q_{n-1}(z)$ har ett nollställe α_2 och att:

$$p(z) = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\,q_{n-2}(z)$$

... för något $q_{n-2}(z)$ av grad $n-2$.

Proceduren upprepas så länge $\deg q_k(z) \geq 1$ så att vi till sist får

$$p(z) = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)\cdot\ldots\cdot(z-\alpha_n)\,q_n(z)$$

... där $\deg q_n(z) = 0$, dvs $q_n(z)$ är en konstant och motsvarar högstagrads-koefficienten a_n när vi multiplicerat ihop parenteserna. □

15. SATS 6.4

Antag att polynomet $p(z)$ har reella koefficienter och att α är ett nollställe till $p(z)$. Då är även konjugatet $\bar{\alpha}$ ett nollställe till $p(z)$, dvs...

$$p(\alpha) = 0 \implies p(\bar{\alpha}) = 0$$

BEVIS: Låt $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$. Enligt förutsättningarna är $p(\alpha) = 0$ och vi ska då visa att även $p(\bar{\alpha}) = 0$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\bar{z}\cdot\bar{w} = \overline{zw}\\ \bar{z}^n = \overline{z^n}\\ \bar{z}+\bar{w} = \overline{z+w}\end{array}}$$

$$p(\bar{\alpha}) = a_n\bar{\alpha}^n + a_{n-1}\bar{\alpha}^{n-1} + \ldots + a_1\bar{\alpha} + a_0 = a_n\overline{\alpha^n} + a_{n-1}\overline{\alpha^{n-1}} + \ldots + a_1\bar{\alpha} + a_0 =$$

$\bar{a}_i = a_i$

$$= \bar{a}_n\overline{\alpha^n} + \overline{a_{n-1}}\,\overline{\alpha^{n-1}} + \ldots + \bar{a}_1\bar{\alpha} + \bar{a}_0 = \overline{a_n\alpha^n} + \overline{a_{n-1}\alpha^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1\alpha} + \bar{a}_0 =$$

$$= \overline{a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1\alpha + a_0} = \overline{p(\alpha)} = \bar{0} = 0$$ □

16. SATS 6.5.
Varje icke-konstant polynom med reella koefficienter kan faktoriseras i reella första- och andragradspolynom.

BEVIS: Låt $p(z)$ vara ett polynom av grad n med reella koefficienter. Enligt sats (6.3) har $p(z)$ precis n komplexa nollställen och kan faktoriseras ...

$$p(z) = a_n(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(z-\alpha_n).$$

Varje reellt α ger upphov till en reell förstagradsfaktor $z-\alpha$.
För varje icke-reellt α finns det enl. sats ytterligare ett nollställe $\overline{\alpha}$ och i faktoriseringen ovan får vi genom multiplicering...

$$(z-\alpha)(z-\overline{\alpha}) = z^2 - \underbrace{(\alpha+\overline{\alpha})}_{a+ib+a-ib=2a} z + \underbrace{\alpha\overline{\alpha}}_{|\alpha|^2}$$

... dvs en reell andragradsfaktor.

17. DERIVATAN AV EN KOMPLEXVÄRD FUNKTION
En komplexvärd funktion f av en reell variabel x kan skrivas

$$f(x) = g(x) + ih(x)$$

där g och h är reellvärda funktioner. Då definieras derivatan

$$f'(x) = g'(x) + ih'(x)$$

... alternativt $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left(g(x)+ih(x)\right) = \frac{dg}{dx} + i\frac{dh}{dx}$

18. $De^{wx} = De^{ax+ibx} = D(e^{ax}\cdot e^{ibx}) = ae^{ax}e^{ibx} + ibe^{ibx}e^{ax} = (a+ib)e^{ax}e^{ibx} = we^{wx}$

$\boxed{\text{KAPITEL 11}}$

19. SATS 11.1 (MACLAURINS FORMEL)

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x)$$

där $\underbrace{R_{n+1}(x)}_{\text{LAGRANGES RESTTERM}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$ för något ξ mellan 0 och x, förutsatt att f har kontinuerlig derivator till och med ordning $n+1$ i en omgivning av $x=0$.

20. Maclaurinpolynomet $p_n(x)$ är en bra approximation till $f(x)$ nära $x=0$.
Vill approximera en funktion med ett polynom eftersom polynom är lättare att hantera och arbeta med.

21. Beskriver felet då $f(x)$ ersätts med $p_n(x)$ med resttermen

$$R_{n+1}(x) = f(x) - p_n(x)$$

22. SATS 11.4 (TAYLORS FORMEL)

Antag att funktionen f har kontinuerliga derivator till och med ordning $n+1$ i en omgivning av punkten a. Då gäller för alla x i omgivningen...

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x)$$

där $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ för något ξ mellan 0 och X.

23. SATS 11.3

(11.5) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^{n+1} \cdot B(x)$

(11.6) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + x^{n+1} B(x)$

(11.7) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n + x^{n+1} B(x)$

(11.8) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n+1} \cdot B(x)$

(11.9) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+2} \cdot B(x)$

(11.10) $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)} + x^{2n+1} \cdot B(x)$

24. (11.14) $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \ \forall x \in \mathbb{R}$

Vid Maclaurinutveckling av e^x får vi resttermen

$$R_{n+1}(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad \xi \text{ ligger mellan } 0 \text{ och } X.$$

För varje fixt x är e^ξ begränsad:

- Om $x \geq 0$ är $0 < e^\xi < e^x \leftarrow$ FIXT
- Om $x < 0$ är $0 < e^\xi < e^0$

Gränsvärdet för $R_{n+1}(x)$ då $n \to \infty$ avgörs av $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, dvs gränsvärdet $\lim \frac{a^n}{n!}$

Antag alltså att a är positivt och väljer ett heltal $m > a$. För $n > m$ gäller då att:

$$0 \leq \frac{a^n}{n!} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} = \underbrace{\frac{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m}}_{\substack{C \\ \text{(konstant)}}} \cdot \underbrace{\frac{a}{m+1}}_{<1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\frac{a}{n-1}}_{<1} \cdot \frac{a}{n} < C \cdot \frac{a}{n}$$

Får genom instängning $0 \leq \frac{a^n}{n!} < C \cdot \frac{a}{n}$ att $\frac{a^n}{n!} \to 0$ då $n \to \infty$, dvs $R_{n+1}(x) \to 0$ då $n \to \infty$

Alltså, Maclaurinserien för e^x konvergerar mot e^x för alla x.

KAPITEL 12

25. En funktion F kallas primitiv funktion till f på intervallet I om $F'(x) = f(x)$ för alla $x \in I$.

26. Eftersom F och G båda är primitiva funktioner till f gäller det att $F'(x) = G'(x) = f$ och två funktioner med samma derivata skiljer sig endast åt med en konstant. Alltså kan varje primitiv funktion G till f skrivas $G(x) = F(x) + C$ för någon konstant C.

27. ELEMENTÄRA PRIMITIVA FUNKTIONER

(12.2) $\int e^x \, dx = e^x + C$

(12.3) $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$

(12.4) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$

(12.5) $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

(12.6) $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

(12.7) $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C$

(12.8) $\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + C$

(12.9) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C$

(12.10) $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + C$

(12.12) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha}} \, dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+\alpha}\right| + C$

28. PARTIALINTEGRATION

$$\boxed{\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx}$$

Produktregeln tillämpas på funktionerna F och g, där F är primitiv till f.

$$(F(x)g(x))' = F'(x)g(x) + F(x)g'(x) = f(x)g(x) + F(x)g'(x)$$

$$\Rightarrow \int (F(x)g(x))' dx = \int (f(x)g(x) + F(x)g'(x)) \, dx =$$

$$= \int f(x)g(x)\,dx + \int F(x)g'(x)\,dx$$

Vi får då genom omflyttning av termerna...

$$\int f(x)g(x)\,dx = \int (F(x)g(x))'\,dx - \int F(x)g'(x)\,dx \Rightarrow$$

$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx$$

29. VARIABELBYTE

Utnyttjar den omvända kedjeregeln.

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \left[\begin{array}{c} t = g(x) \\ \frac{dt}{dx} = g'(x) \Rightarrow dt = g'(x)\,dx \end{array} \right] = \int f(t)\,dt = F(t) + C = F(g(x)) + C$$

(29.) VARIABELBYTE ROTUTTRYCK

I. Integranden innehåller

$$\boxed{\sqrt{x+\alpha} \ \text{ eller } \ \sqrt{\frac{x+\alpha}{x+\beta}}} \quad \Rightarrow \quad \text{sätt } t=\sqrt{x+\alpha}$$

II. a) Integranden innehåller

$$\boxed{\sqrt{x^2+\alpha}}$$

sätt $t=\sqrt{x^2+\alpha}$ eller $t=x+\sqrt{x^2+\alpha}$

- $$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+\alpha}}\,dx = \begin{bmatrix} t=\sqrt{x^2+\alpha} \\ t\,dt = x\,dx \end{bmatrix} = \int \frac{t}{t}\,dt = t+C = \sqrt{x^2+\alpha}+C$$

- $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha}}\,dx = \begin{bmatrix} t = x+\sqrt{x^2+\alpha} & \\ \sqrt{x^2+\alpha} = t-x = \frac{t^2+\alpha}{2t} & \text{och } \frac{dx}{dt} = \frac{t^2+\alpha}{2t^2} \end{bmatrix} = \int \frac{2t(t^2+\alpha)}{(t^2+\alpha)\cdot 2t^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t|+C = \ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right|+C$$

b) Uttryck med

$$\boxed{\sqrt{x^2+ax+b} = \sqrt{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}}$$

sätt $y=x+\frac{a}{2}$ så att vi får $\sqrt{y^2+\alpha}$ där $\alpha = -\frac{a^2}{4}+b$ och se typfall a).

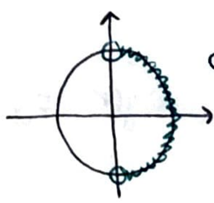
III. a) Uttryck med

$$\boxed{\sqrt{a^2-x^2},\ a>0 \text{ och } |x|<a}$$

utför variabelbytet $x = a\sin t$, $|t| \le \frac{\pi}{2}$

$t = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$

$\frac{dx}{dt} = a\cdot\cos t$



$\cos t > 0$

b) Uttryck med

$$\boxed{\sqrt{-x^2+ax+b}}$$

Kvadratkomplettera och se typfall a)...

$\sqrt{a^2-y^2} \Rightarrow y = \left(x-\frac{a}{2}\right)$

EGEN ANMÄRKNING:

TRIGONOMETRISKA FUNKTIONER PRIMITIVER

- Standardprimitiver
- Omformulera med trig. formler
  ex. $\cos 2x = 1-2\sin x = 2\cos x - 1$
- Variabelbytet $t=\cos x$, $t=\sin x$, $t=\tan x$
- Eulers formler
- $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$

30. GENERELL METOD FÖR RATIONELLA FUNKTIONER

① Polynomdivision

$$\frac{g(x)}{h(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{h(x)} \quad \text{om } \deg g \geq \deg h$$

② Faktorisera $h(x)$ i reella första- och andragradsfaktorer.

③ Partialbråksuppdelning av $\frac{r(x)}{h(x)}$:

FAKTOR I $h(x)$	... GER UPPHOV TILL
$x-\alpha$	$\frac{A}{x-\alpha}$
$(x-\alpha)^n$	$\frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x-\alpha)^n}$
x^2+ax+b	$\frac{Ax+B}{x^2+ax+b}$

④ Hitta primitiver till alla termer.

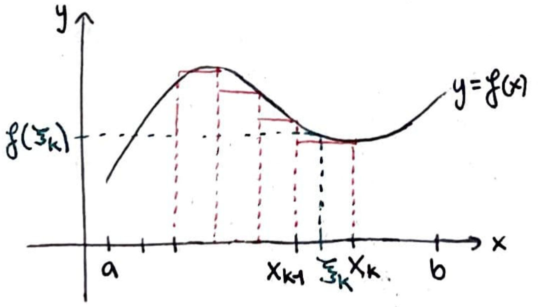
KAPITEL 13

31. RIEMANNSUMMA

Låt f vara en begränsad funktion på intervallet $[a,b]$ och gör en indelning

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

I varje delintervall $[x_{k-1}, x_k]$ väljer vi en punkt ξ_k.



=> En Riemannsumma till f på intervallet $[a,b]$ definieras då:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})}$$

Då indelningarnas finhet går mot noll gäller

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx}$$

...om funktionen f är kontinuerlig på $[a,b]$ och om $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ är Riemannsummor till f på samma intervall.

32. RÄKNELAGAR FÖR INTEGRALER

Antag att funktionerna f och g är integrerbara på intervallet $[a,b]$. Då gäller...

(13.8) $\displaystyle\int_a^b \alpha \cdot f(x)\,dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\,dx$, α konstant

(13.9) $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

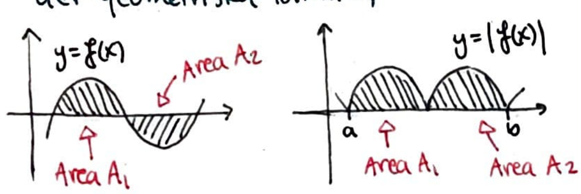
(13.10) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

(13.11) $f(x) \leq g(x)$ då $a \leq x \leq b$ $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

33. TRIANGELOLIKHETEN FÖR INTEGRALER (13.16)

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \quad (a \leq b)$$

ger geometriska tolkningen...



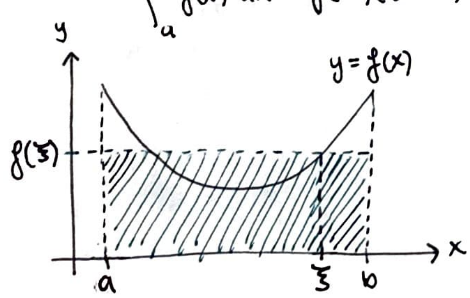
Med integralens tolkning som area får vi för f i figuren

$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = |A_1 - A_2| = A_1 - A_2$ vilket är mindre än $\int_a^b |f(x)|\,dx = A_1 + A_2$

34. INTEGRALKALKYLENS MEDELVÄRDESATS

Antag att funktionen f är kontinuerlig på intervallet $[a,b]$. Då finns det (minst) en punkt ξ, $a \leq \xi \leq b$, sådan att

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$$



35. ANALYSENS HUVUDSATS

= Antag att funktionen f är kontinuerlig på det öppna intervallet I och att $a \in I$. Funktionen...

$$S(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in I$$

... är då en primitiv funktion till f, dvs $S'(x) = f(x)$.

BEVIS: $\displaystyle\frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left(\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right) = \frac{1}{\Delta x}\int_x^{\Delta x} f(t)\,dt = \left[\begin{matrix}\text{integralkalkylens}\\ \text{medelvärdesats}\end{matrix}\right] =$

$= \frac{1}{\Delta x} f(\xi)(x+\Delta x - x) = f(\xi)$, för något ξ mellan x och $\Delta x + x$.

Låter vi $\Delta x \to 0$ så följer $\xi \to x$, vilket medför att $f(\xi) \to f(x)$ eftersom f enligt förutsättningarna är kontinuerlig funktion. Vi får då att

$\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = f(x)$ $\Rightarrow$ $S(x)$ är deriverbar med derivatan $S'(x) = f(x)$.

□

36. SATS 13.7 (INSÄTTNINGSFORMELN)

= Antag att f är kontinuerlig på intervallet $[a,b]$ och att F är en godtycklig primitiv till f. Då är...

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b)-F(a)$$

BEVIS: Enligt analysens huvudsats är även

$$S(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

... en primitiv till f. Då gäller att $S(x) = F(x)+C$ för alla $x \in I$ och för någon konstant C.

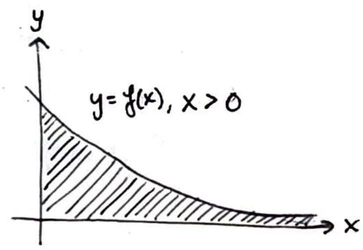
Med $x=a$ får vi speciellt att $S(a) = F(a)+C$ och eftersom

$$S(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$$

... så följer det att $F(a)+C=0$, dvs $C=-F(a)$. Detta innebär att $S(x) = F(x)-F(a)$. Om vi nu sätter in $x=b$ så får vi:

$$S(b) = F(b)-F(a), \text{ dvs } \int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a) \qquad \square$$

37. Att den generaliserade integralen $\int_a^\infty f(x)\,dx$ är konvergent innebär att gränsvärdet...



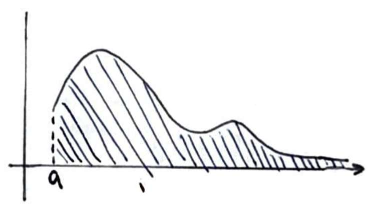
$$\lim_{X\to\infty} \int_a^X f(x)\,dx = A$$

... existerar (ändligt); förutsatt att funktionen f är definierad i intervallet $[a,\infty[$ och integrerbar på $[a,X]$ för varje $X>a$.

38. GENERALISERADE INTEGRALER

- Obegränsat integrationsintervall

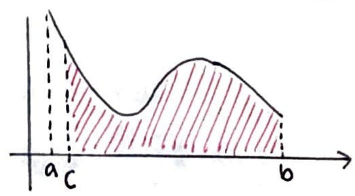
$$\lim_{X\to\infty} \int_a^X f(x)\,dx$$



- Obegränsad integrand

$$\lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$$

Vid beräkning, sätt $c=a+\varepsilon$ så att $c\to a^+$ motsvaras av $\varepsilon\to 0^+$.



- Generaliserad på mer än ett sätt

Delar upp integralen i olika delar med en generalisering i varje. Om alla delarna är konvergenta definieras även integralen som konvergent.

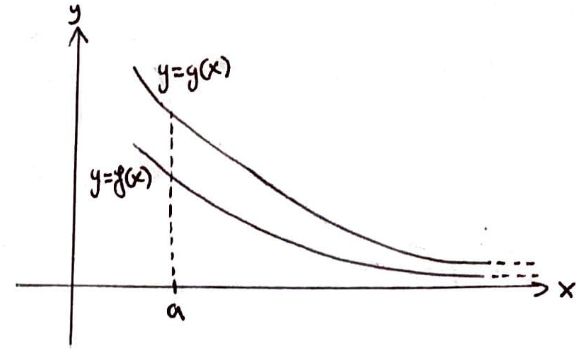
39. (1) $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ konvergent $\iff \alpha > 1$

(2) $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ konvergent $\iff \alpha < 1$

(3) $\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ divergent $\forall x$

40. JÄMFÖRELSESATS (13.10)

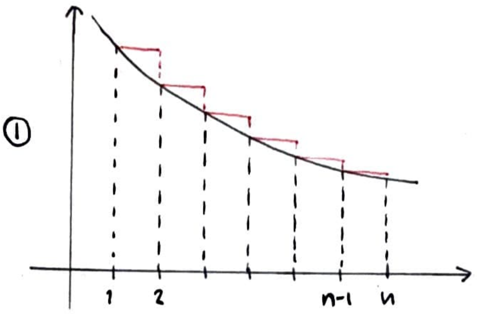
Antag att funktionerna f och g är definierade på intervallet $[a, \infty[$, att $0 \leq f(x) \leq g(x)$ då $x \geq a$, och att f och g är integrerbara på $[a, X]$ för varje $X > a$. Då gäller...

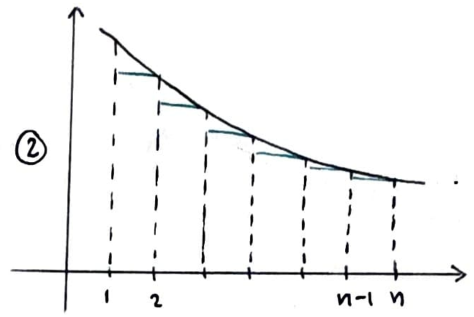


(1) $\int_a^\infty g(x)\,dx$ konvergent $\Rightarrow$ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergent

(2) $\int_a^\infty g(x)\,dx$ divergent $\Rightarrow$ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ divergent

41. Funktionen f är positiv och avtagande, definierad och integrerbar på intervallet $[1, n]$. Ritar upp staplar över (1) och under (2) kurvan:





$A = f(1)\cdot 1 + f(2)\cdot 1 + \ldots + f(n-1)\cdot 1 \geq \int_1^n f(x)\,dx$

Adderar $f(n)$ ...

$\sum_{k=1}^{n} f(k) = f(1) + f(2) + \ldots + f(n) \geq \int_1^n f(x)\,dx + f(n)$

$A = f(2)\cdot 1 + f(3)\cdot 1 + \ldots + f(n)\cdot 1 \leq \int_1^n f(x)\,dx$

Adderar $f(1)$ ...

$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(x)\,dx + f(1)$

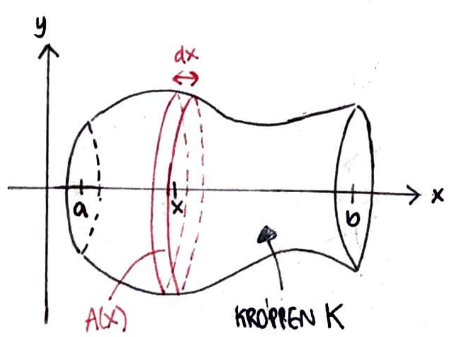
$$\boxed{\int_1^n f(x)\,dx + f(n) \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(x)\,dx + f(1)}$$

KAPITEL 14

42. Arean mellan två funktionskurvor:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

43.



$$\boxed{V = \int_K dV = \int_a^b A(x)\,dx}$$

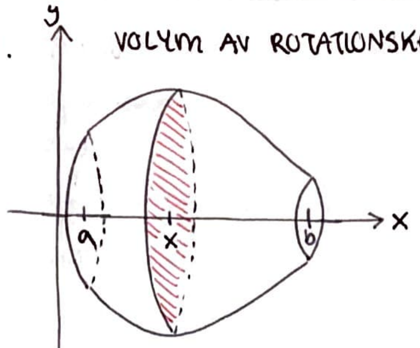
SKIVFORMELN

Studerar en skiva med tjocklek dx, vid punkt x (se figur). Om dx är litet skiljer sig arean $A(x+dx)$ således lite från $A(x)$. Vi approximerar därför skivans tvärsnittsarea med $A(x)$.

För volymen av skivan gäller det alltså att $dV \approx A(x)\,dx$. Hela kroppens volym får vi genom att, utifrån en uppdelning av kroppen i sådana skivor, summera skivornas volymer $A(x)\,dx$.

Detta ger en Riemannsumma som vid gränsövergång övergår i en integral.

44. VOLYM AV ROTATIONSKROPP



$y=f(x),\ a \leq x \leq b$

Varje snitt består av en cirkelskiva med radien $y=f(x)$. För tvärsnittsarean gäller:

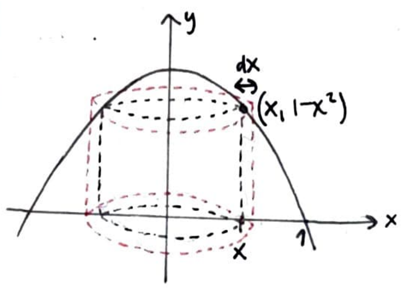
$$A(x) = \pi y^2 = \pi \cdot f(x)^2$$

Rotationsvolymen blir således enligt skivformeln

$$\boxed{V=\pi\int_a^b f(x)^2\,dx}$$

EGEN ANMÄRKNING:

Om vi låter en kurva, ex. $y=1-x^2,\ 0\leq x\leq 1$, rotera kring y-axeln istället kan rotationsvolymen bestämmas på två sätt.

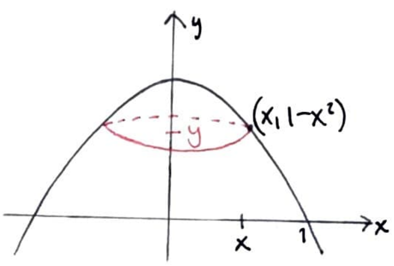


ALT 1. INTEGRERA ÖVER TUNNA RÖR

som har volymelementet

$$dV = \underbrace{y}_{\text{höjd}}\,\underbrace{2\pi x}_{\text{omkrets}}\,\underbrace{dx}_{\text{bredd}} = (1-x^2)\,2\pi x\,dx$$

$$V=\int_K dV = 2\pi\int_0^1 x-x^3\,dx = 2\pi\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

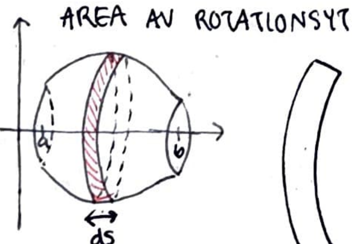


ALT. 2. INTEGRERA ÖVER TUNNA SKIVOR

på höjden y, med tjocklek dy och radien $x=(1-y)^{1/2}$. Arean är $A(y)=\pi f^{-1}(y)^2 = \pi x^2 = \pi(1-y)$

$$V=\int_K dV = \int A(y)\,dy = \pi\int(1-y)\,dy = \pi\left[y-\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

AREA AV ROTATIONSYTA



Studerar en remsa belägen mellan x och $x+dx$. För små dx blir tjockleken av remsan ungefär lika med kurvans bågelement

$$ds = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

och remsans längd approximeras med omkretsen av rotationsytan vid x

$$2\pi y = 2\pi f(x).$$

Arean av utklippt remsa, $dA \approx 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$

Arean av hela rotationsvolymen blir således

$$\boxed{A=\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx}$$

45. TYNGDPUNKTSBERÄKNING

$m=\int_K dm = \int_K \rho\,dV$ där kroppens massa m summerats med masselementen dm.

$X_T = \frac{1}{m}\int_K x\,dm$ där X_T är systemets tyngdpunkt/masscentrum.

46. PARAMETERFORM

$$L=\int_\gamma ds = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt$$

... för en kurva med parametriseringen $\gamma(t)=(x(t),y(t))$ $a\le t\le b$

FUNKTIONSKURVA

$$L=\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

... för en funktionskurva $y=f(x)$, $a\le x\le b$.

Anm. $x(t)=t$ och $x'(t)=1$.

KAPITEL 15

47. En funktion är en lösning till en differentialekvation på intervallet I om denna uppfyller differentialekvationen på hela I.

EX. $y=e^{x^2}$ lösning till $y''-2xy'-2y=0$

$y=e^{x^2} \Rightarrow y'=2xe^{x^2} \Rightarrow y''=4x^2e^{x^2}+2e^{x^2}$

Insättning ger...

$VL=4x^2e^{x^2}+2e^{x^2}-2x\cdot 2xe^{x^2}-2e^{x^2}=0$

$HL=0$

Alltså $VL=HL$ och $y=e^{x^2}$ är således en lösning till differentialekvationen.

48. a) INTEGRERANDE FAKTOR-METODEN

$$y'+g(x)\cdot y=h(x)$$

I. Primitiv till $g(x)$

II. Multiplicera med integrerande faktor $e^{G(x)}$, där $G'(x)=g(x)$.

$$y'\cdot e^{G(x)}+g(x)y\cdot e^{G(x)}=h(x)e^{G(x)}$$

III. VL derivatan av en produkt

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{G(x)}\right)=h(x)e^{G(x)}$$

IV. Tag primitiv av VL och HL

$$ye^{G(x)}=\int h(x)e^{G(x)}\,dx+C$$

... och använd begynnelsevärde för att bestämma C.

b) SEPARABEL DIFF.EKVATION

$$g(y)\cdot y'=h(x)$$

I. Samla allt med y och y' i vänsterled och allt med x i högerled.

II. Tag primitiver...

$$\int g(y)\,dy=\int h(x)\,dx \Rightarrow G(y)=H(x)+C,$$ där $G'(y)=g(y)$ och $H'(x)=h(x)$

III. Bestäm C genom begynnelsevärde.

IV. Lös om möjligt ut $y(x)$.

49. Visa att allmän lösning till $y' = ay$ är $y = Ce^{ax}$

Flyttar över...

$y' - ay = 0$

Integrerande faktor, $IF = e^{-ax}$

Multiplicerar med IF:

$y'e^{-ax} - aye^{-ax} = 0$

$\frac{d}{dx}(ye^{-ax}) = 0 \implies ye^{-ax} = C$, där C är en konstant

Lösningen blir således:

$y = \frac{C}{e^{-ax}} = Ce^{ax}$

50. $y(x) = A + \int_0^x f(t)y(t)\,dt$, A konstant

Deriverar HL och VL:

$y'(x) = f(x)y(x) \iff y'(x) \cdot \frac{1}{y(x)} = f(x)$

Lös den separabla differentialekvationen se fråga 48 b)

Begynnelsevärde beräknas enligt

$y(0) = A + \int_0^0 f(t)y(t)\,dt = A + 0 = A$

...dvs $y(0) = A$.

51. y_h = homogen lösning (alla lösningar till homogen ekv. $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$)

y_p = partikulärlösning (specifika lösningen till ekv. $y'' + a(x)y' + b(x)y = h(x)$)

52. SATS 15.2

Antag att karaktäristiska ekvationen $r^2 + ar + b = 0$ till

(*) $y'' + ay' + by = 0$

har rötterna r_1 och r_2. Då ges den allmänna lösningen till (*) av

$$\boxed{y(x) = \begin{cases} C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} & \text{om } r_1 \neq r_2 \\ (C_1x + C_2)e^{r_1x} & \text{om } r_1 = r_2 \end{cases}}$$

... där C_1 och C_2 är godtyckliga konstanter.

53. SATS 15.3

Antag att karaktäristiska ekv. $r^2 + ar + b = 0$ till

(*) $y'' + ay' + by = 0$

har rötterna $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$). Då ges den allmänna lösningen till (*) av...

$$\boxed{y(x) = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)}$$

... där A och B är godtyckliga konstanter.

54. PARTIKULÄRLÖSNINGAR

till $y'' + ay' + by = h(x)$.

a) $h(x) =$ konstant

Ansätt $y_p(x) = C$, där C är en konstant. OBS

b) $h(x) =$ polynom

Om konstant framför y är skild från noll, ansätt ett polynom $p(x)$ av samma grad som $h(x)$.

Om konstant framför y är lika med noll, ansätt polynomet $x \cdot p(x)$ där $p(x)$ är ett polynom av samma grad som $h(x)$.

c) $h(x) = (\text{polynom}) \cdot e^{\alpha x}$

Ansätt $y_p(x) = z(x) \cdot e^{\alpha x}$ och bestäm funktionen $z(x)$.

d) $h(x) = (\text{polynom}) \cdot \begin{cases} \sin \beta x \\ \cos \beta x \end{cases}$

Utnyttja att $\sin \beta x = \text{Im}(e^{i\beta x})$ alternativt $\cos \beta x = \text{Re}(e^{i\beta x})$

Lös genom att bestämma en lösning till hjälpekv. $e^{i\beta x}$ och sedan plocka ut just den imaginära/reella delen av lösningen.

e) $h(x) = h_1(x) + h_2(x)$

Finn partikulärlösningar var för sig och summera

$$y_p = y_{p1} + y_{p2}$$

55. $y'' + \omega^2 y = 0$

HOMOGEN LSG.

$r^2 + \omega^2 r = 0$

$r^2 = -\omega^2$

$r = \pm i\omega$

$y_h(x) = A\cos \omega x + B \sin \omega x$

PARTIKULÄR LSG.

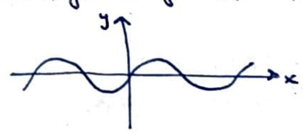
Ansätt $y_p = C$ ger

$\omega^2 C = 0$

$C = 0$

$y_p(x) = 0$

Lösningen beskriver ett svängande förlopp ...

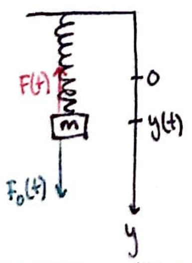


... exempel en pendel som gungar fram och tillbaka.

ALLMÄN LSG.

$y = A\cos \omega x + B \sin \omega x$

56. Resonans = när amplituden i ett svängande förlopp blir obegränsat stor.



Fjäderkraft $F(t) = -Ky(t)$

Yttre periodisk kraft $F_0(t)$

Uppstår då den yttre kraften $F_0(t)$ har exakt samma, eller ett värde nära, systemets naturliga vinkelfrekvens.