Matematiska strukturer - Satser

April 2, 2018

I detta dokument har jag samlat och översatt de flesta satser som ingår i kursen Matematiksa Strukturer (FMAN65) från kursboken *Set Theory and Metric Spaces* skriven av Irving Kaplansky. Även några satser utanför kursboken finns med.

Notera att detta inte är allt som kursen innehåller.

Om du vill få tillgång till ShareLaTeX-dokumentet för att förbättra det så skriv ett mail till tpi15aoh@student.lu.se så löser vi det.

Alle beviser gives som en triviel øvning til læseren.

/Albin Ohlsson

Kapitel 2

Sats 1. En uppräknelig union av uppräkneliga mängder är uppräknelig.

Sats 2. Mängden av heltal är uppräknelig.

Sats 3. Mängden av rationella tal är uppräknelig.

Sats 4. Mängden av algebraiska tal är uppräknelig.

Sats 5. Mängden av reella tal är inte uppräknelig.

Sats 6. För alla mängder A, finns det ingen funktion som avbildar A på dess potensmängd $P(A)$.

Kapitel 4

Sats 26. För punkter a, b, c i ett metriskt rum så gäller

$$|D(a,c) - D(b,c)| \leq D(a,b).$$

Sats 27. En öppen boll i ett metriskt rum är en öppen mängd.

Sats 28. I ett metriskt rum är en union av öppna mängder öppen.

Sats 29. I ett metriskt rum är ett ändligt snitt av öppna mängder öppet.

Sats 30. En delmängd av ett metriskt rum är öppet om och endast om det går att uttrycka som en union av öppna bollar.

Sats 31. En delmängd av ett metriskt rum är öppet om och endast om det innehåller, tillsammans med en punkt x, även en omgivning av x.

Sats 32. Låt A vara en delmängd och x en punkt av ett metriskt rum. Då finns en sekvens av element i A som konvergerar mot x om och endast om varje $S_r(x) \cap A \neq \emptyset$.

Sats 33. En delmängd av ett metriskt rum är sluten om och endast om dess komplement är öppet.

Sats 34. Snittet av en samling av slutna mängder i ett metriskt rum är slutet.

Sats 35. Unionen av ändligt många slutna mängder är sluten i ett metriskt rum.

Sats 36. Låt A vara en delmängd och x en punkt av ett metriskt rum. Följande tre påståenden är ekvivalenta:
(a) x ligger i det slutna höljet $\bar{A}$ av A.
(b) Varje omgivning av x överlappar A.
(c) Det finns en följd av element tillhörande A som konvergerar mot x.

Sats 37. Om $x_i \to x$ och $y_i \to y$ i ett metriskt rum, så gäller

$$D(x_i, y_i) \to D(x, y).$$

Definition. Låt X och Y vara metriska rum, låt f vara en funktion från X till Y, låt x_0 vara en punkt i X, och kalla $y_0 = f(x_0)$. Vi säger att f är kontinuerlig vid x_0 om följande är sant: För något $\epsilon > 0$ finns det $\delta > 0$ så att $D(x, x_0) < \delta$ implicerar $D[f(x), y_0] < \epsilon$.

Sats 38. Låt X och Y vara metriska rum, låt f vara en funktion från X till Y, låt x_0 vara en punkt i X, och kalla $y_0 = f(x_0)$. Då är f kontinuerlig vid x_0 om och endast om följande är sant: För någon omgivning V av y_0 finns det en omgivning U av x_0 med $f(U) \subset V$.

Sats 39. Låt X och Y vara metriska rum, låt f vara en funktion från X till

Y, låt x_0 vara en punkt i X, och kalla $y_0 = f(x_0)$. Då är f kontinuerlig om och endast om följande är sant: När en följd x_i av element av X konvergerar mot x_0, och $y_i = f(x_i)$, så konvergerar y_i konvergerar mot y_0.

Sats 40. Låt f vara en avbildning från ett metriskt rum X till ett metriskt rum Y. Då är följande påståenden ekvivalenta:
(a) f är kontinuerlig.
(b) Hela urbilden av en öppen mängd är öppen dvs, för en en öppen mängd V i Y, $f^{-1}(V)$ är en öppen delmängd av X.
(c) Hela urbilden av en sluten mängd är sluten dvs, för en en sluten mängd G i Y, $f^{-1}(G)$ är en sluten delmängd av X.

Sats 41. Låt f och g vara kontinuerliga funktioner från ett metriskt rum X till ett metriskt rum Y. Låt B vara mängden av alla x i X för vilka $f(x) = g(x)$. Då är B en sluten delmängd av X.

Sats 42. Låt A vara en tät delmängd av ett metriskt rum X, och låt f och g vara kontinuerliga funktioner från X till ett metriskt rum Y. Anta att f och g sammanfaller på A. Då sammanfaller de på hela X.

Kapitel 5

Sats 43. Alla konvergenta följder i ett metriskt rum är Cauchyföljder.

Sats 44. Om en Cauchyföljd x_i i ett metriskt rum har en delföljd som konvergerar mot y, så konvergerar hela följden mot y.

Sats 45. Låt $x_1, x_2, x_3, ...$ vara en Cauchyföljd i ett metriskt rum. Då har mängden x_i ändlig diameter.

Sats 46. Låt $x_1, x_2, x_3, ...$ vara en följd av unika element i en kedja. Då finns det antingen en delföljd som är monotont växande eller monotont avtagande.

Sats 47. Det metriska rummet bestående av de reella talen är fullständigt.

Sats 48. Låt A vara en sluten delmängd av ett fullständigt metriskt rum. Då är A fullständigt.

Sats 49. Låt A vara en delmängd av ett metriskt rum M. Anta att A är fullständigt (i den medföljande metriken). Då är A en sluten delmängd av M.

Sats 50. För ett metriskt rum M är följande två påståenden ekvivalenta:
(a) M är fullständigt.
(b) För någon avtagande följd $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset ...$ av icke-tomma slutna mängder med diametrar som går mot noll, då gäller $\cap A_i \neq \emptyset$.

Sats 51. En likformigt kontinuerlig funktion avbildar Cauchyföljder på Cauchyföljder.

Sats 52. Låt A vara en tät delmängd av det metriska rummet B. Låt F vara en likformigt kontinuerlig funktion från A till ett fullständigt metriskt rum C. Då har f en unik utvidgning till en kontinuerlig funktion från B till C. Den utökade funktionen är likformigt kontinuerlig. Vidare, om f är en isometri på A, så är den utökade funktionen likväl en isometri.

Sats 53. Låt Y och Z vara kompletteringar av ett metriskt rum X. Då finns det en isometri av Y på Z vilken är identiteten på X.

Sats 54. Gränsfunktionen av en likformigt konvergent följd av kontinuerliga funktioner är också kontinuerlig.

Sats 55. Låt X vara ett metriskt rum och Y ett fullständigt metriskt rum. Då är $C(X, Y)$ ett fullständigt metriskt rum.

Sats 56. Låt X vara ett metriskt rum, och fixera en punkt a i X. Tilldela varje $u \in X$ den reellvärda funktionen $f_u : X \to R$ given av $f_u(x) = D(u, x) - D(a, x)$. Då är avbildningen $u \to f_u$ en isometri av X till $C(X, R)$.

Sats 57. Alla metriska rum har en komplettering.

Sats 63. Låt x_i vara en följd av unika punkter i ett metriskt rum M. Kalla den (oordnade) mängden av x_i:n för A. Då gäller det att för varje punkt som ligger i det slutna höljet av A men inte i A att det finns en delföljd av x_i som konvergerar mot x.

Sats 64. De följande påståendena är ekvivalenta i ett metriskt rum:
(a) Varje följd har en konvergent delföljd.
(b) Varje oändlig mängd har en hopningspunkt.

Sats 65. Alla slutna intervall av de reella talen (dvs mängden av alla x för vilka det gäller att $a \leq x \leq b$) är kompakta.

Sats 66. En sluten delmängd av ett kompakt metriskt rum är kompakt.

Sats 67. Alla kompakta metriska rum är fullständiga.

Sats 68. Ett kompakt metriskt rum M har ändlig diameter. Diametern uppfylls av två lämpliga punkter i M.

Sats 69. En kontinuerlig reell funktion på ett kompakt metriskt rum är begränsad och antar sin övre och undre begränsning.

Sats 71. Följande påståenden är ekvivalenta för ett metriskt rum M:

(a) M är kompakt.
(b) Om $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset ...$ är en avtagande följd av icke-tomma slutna mängder i M, då gäller $\cap F_i \neq \emptyset$.

Sats 72. Följande påståenden är ekvivalenta för ett metriskt rum M:
(a) M är kompakt.
(b) Alla öppna övertäckningar av M har en ändlig delövertäckning.
(c) Om en familj av slutna mängder F_1 i M är sådant att ett ändligt antal av F_i:n har ett icke-tomt snitt, så är $\cap F_i$ icke-tom.

Sats 73. Låt f vara en kontinuerlig funktion från ett kompakt metriskt rum X till ett metriskt rum Y. Då är f likformigt kontinuerlig.

Kapitel 6

Sats 77. Låt M vara ett komplett metriskt rum och låt $f : M \to M$ vara en avbildning med följande egenskap: det finns ett reellt tal $k < 1$ så att $D[f(x), f(y)] \leq kD(x, y)$ för alla $x, y \in M$. Då har f en unik fixpunkt.

Sats 78. Låt A vara en ingenstans tät mängd i ett metriskt rum M och låt U vara en icke-tom mängd i M. Då är A disjunkt med någon boll innehållen i U.

Sats 79. Ett komplett metriskt rum är av andra kategorin.

Övrigt

Huvudsats 1. Låt $f : M \to N$ vara kontinuerlig. Om $K \subset M$ är kompakt så är $f(K) \subset N$ också kompakt.

Följdsats. Om $f : M \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig och $K \subset M$ är kompakt så antar f ett största och minsta värden på K.

Huvudsats 3. Låt $f : M \to N$ vara kontinuerlig. Om M är kompakt och f är bijektiv så är även f^{-1} kontinuerlig.

Huvudsats 4. Låt $f : M \to N$ vara kontinuerlig. Om $S \subset M$ är sammanhängande så är $f(S) \subset N$ också sammanhängande.

Huvudsats 5. Låt $(M_1 \times M_2)$ vara det metriska produktrummet av (M_1, d_1) och (M_2, d_2). Då gäller att $M_1 \times M_2$ är kompakt om och endast om M_1 och M_2 är båda kompakta.

Bevis: Notera att projektionen $M_1 x M_2 \ni (x_1, x_2) \to x_i \in M_i$ $(i = 1, 2)$ är avståndsminskande och därmed kontinuerlig. Så $\pi_i(M_1 \times M_2) = M_i$ är kompakt för $i = 1, 2$.

Antag att M_1 och M_2 är kompakta och låt (x'_n, x''_n) vara en följd i $M_1 \times M_2$. Eftersom M_1 är kompakt så har x'_n en konvergent delföljd x'_{n_k}, låt oss säga att $x'_{n_k} \to x' \in M_1$. Men M_2 är också kompakt så x''_{n_k} har en konvergent delföljd $x''_{n_{k_L}}$. Låt oss säga att $x''_{n_{k_L}} \to x''$. Vi ser att $(x'_{n_{k_L}}, x''_{n_{k_L}})$ är en delföljd av (x'_n, x''_n) och denna delföljden konvergerar mot (x', x''). Alltså är $M_1 \times M_2$ kompakt.

Definition. Vi säger att $f : M$ är Lipschitzkontinuerlig om det finns $\Theta > 0$ så att för all $x, y \in M$: $d_N(f(x), f(y)) \leq \Theta d_M(x, y)$.

Definition. Vi säger att $f : M$ är en isometri om $d_N(f(x), f(y)) = d_M(x, y)$ för alla $x, y \in M$.

Banachs fixpunktssats. Låt (M, d) vara ett metriskt rum och antag att $T : M \to M$ är en kontraktion.

Då har T en entydig fixpunkt $a \in M$.

För en godtycklig startpunkt $x \in M$ gäller det att $x_n = T^n(x_0)$ då $n \to \infty$.

Dessutom är $d(x_n, a) \leq \frac{\Theta^n}{1-\Theta} d(x_1, x_0)$ för $n \geq 1$ där $\Theta < 1$ är Lipschitzkonstanten för T.