Sammanfattning Nanomatte

Oskar Darselius Berg

En sammanfattning som innehåller det mesta men inte allt. Inklusive aggressiva påståenden och oupptäckta fel.

1 Del 1, Fourier, Laplace och sånt

3. Reella Fourierserier

Innan vi sätter igång, måste vi definiera massa integraler:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t)dt = \delta_{n,0}T, \int_{-T/2}^{T/2} \sin(n\omega_0 t)dt = 0 \tag{1}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos^2(n\omega_0 t)dt = T/2, \int_{-T/2}^{T/2} \sin^2(n\omega_0 t)dt = T/2 \tag{2}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t)\sin(m\omega_0 t)dt = 0 \tag{3}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)dt = \delta_{n,m}T/2 \tag{4}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(n\omega_0 t)\sin(m\omega_0 t)dt = \delta_{n,m}T/2 \tag{5}$$

Så när det gäller integral 1 är de uppenbara. Bara rita upp dem.

När det gäller integral 2 så har jag lösningen här

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos^2(n\omega_0 t)dt = \frac{1}{2}\int_{-T/2}^{T/2} \cos(2n\omega_0 t) + 1dt =$$

$$\frac{1}{2}[\frac{1}{2n\omega_0}\sin(2n\omega_0 t) + t]_{-T/2}^{T/2} =$$

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{2n\omega_0}\sin(2n\omega_0\frac{T}{2}) + \frac{T}{2} - \frac{1}{2n\omega_0}\sin(2n\omega_0\frac{T}{2}) + \frac{T}{2}) =$$

$$\frac{1}{2}T = \frac{T}{2}$$

Och så har vi sinus.

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin^2(n\omega_0 t)dt = \frac{1}{2}\int_{-T/2}^{T/2} \cos(2n\omega_0 t) - 1dt =$$

$$\frac{1}{2}[\frac{1}{2n\omega_0}\sin(2n\omega_0 t) - t]_{-T/2}^{T/2} =$$

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{2n\omega_0}\cos(2n\omega_0\frac{T}{2}) + \frac{T}{2} - \frac{1}{2n\omega_0}\cos(2n\omega_0\frac{T}{2}) + \frac{T}{2}) =$$

$$-\frac{1}{2}(-T) = \frac{T}{2}$$

När det gäller integral 3 är den noll pga att den ena är jämn och den andra ojämn.

När det gäller 4 så om $m = n$ ges integral 3 medans annars kan man kolla på den lite annorlunda såhär $\rightarrow$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)dt =$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t)dt \int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t)dt =$$

$$\delta_{m,o}T\delta_{n,o}T$$

Vilket om $m \neq n \rightarrow$

$$\delta_{m,0}\delta_{n,0} = 0$$

Nu är det ju bara integral 5 kvar. Om $m = n$ fås 3. Annars kan man kolla på den såhär $\rightarrow$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(n\omega_0 t)\sin(m\omega_0 t)dt =$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(n\omega_0 t)dt \int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_0 t)dt = 0$$

Ansats

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \tag{6}$$

där $t \in [-T/2, T/2]$ och $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. Denna serie måste vara konvergent (annars är detta ganska onödigt, eller hur?)

Låt mig multiplicera ekvation 6 med $\int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t)dt$, för att få fram a_n, $\rightarrow$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t)dt f(t) = \frac{a_0}{2}\int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t)dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)dt + b_n \int_{-T/2}^{T/2} \sin(n\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)dt$$

Från integral 3, 4 och $m = n$ ges

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t)dt f(t) = \frac{a_0}{2}\delta_{n,0} + a_n \delta_{n>0} = a_n \frac{T}{2}$$

$$\leftrightarrow$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t) f(t)dt$$

Nu ska vi få fram b_n, dett gör vi genom att multiplicera med $\int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_0 t)dt$, $\rightarrow$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_0 t)dt f(t) = \frac{a_0}{2}\int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_0 t)dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)dt + b_n \int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_0 t)\sin(n\omega_0 t)dt$$

Från integral 3, 5 och $m = n$ ges

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(n\omega_0 t) f(t)dt = b_n \delta_{n>0} \frac{T}{2}$$

$$\leftrightarrow$$

$$b_n = \frac{T}{2}\int_{-T/2}^{T/2} \sin(n\omega_0 t) f(t)dt$$

Alltså ges utvecklingskoefficienterna av :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t) f(t)dt \tag{7}$$

$$b_n = \frac{T}{2}\int_{-T/2}^{T/2} \sin(n\omega_0 t) f(t)dt \tag{8}$$

Eftersom utvecklingskefficienterna är beroende av funktionen, $f(t)$, sägs det att

"Utvecklingskoefficienterna är en **avbildning** på $f(t)$"

Pga att $f(t) = f(t + T)$ betyder detta att funktionen är periodisk, dvs att den upprepar sig efter periodtidens slut. Dvs **Periodisk upprepning**

Annat tips är att vid beräkning använda symmetri vid beräkning av integralerna.

4. Komplexa Fourierserier

Låt mig nu härleda den komplexa Fourierserien

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \tag{9}$$

Härledningen till denna är lite skum, men den ser ut som följande. Jag använder mig av Eulers formler

$$\cos(n\omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{in\omega_0 t} + e^{-in\omega_0 t})$$

$$\sin(n\omega_0 t) = \frac{1}{2i}(e^{in\omega_0 t} - e^{-in\omega_0 t})$$

Om jag sedan applicerar dessa på den reella Fourierserien (ekvation 6), ges ett långt uttryck, men låt mig inleda med att endast kolla på det inom summatecknet →

$$a_n\cos(n\omega_0 t) + b_n\sin(n\omega_0 t) = \frac{a_n}{2}(e^{in\omega_0 t} + e^{-in\omega_0 t}) - \frac{ib_n}{2}(e^{in\omega_0 t} - e^{-in\omega_0 t}) =$$

$$\frac{a_n - ib_n}{2}e^{in\omega_0 t} + \frac{a_n + ib_n}{2}e^{-in\omega_0 t}$$

Nu omdefinierar vi lite saker...

$$c_n = \tfrac{a_n - ib_n}{2},\ c_{-n} = \tfrac{a_n + ib_n}{2} \text{ och } c_0 = \tfrac{a_0}{2}$$

Detta ger i den reella Fourierserien →

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} + c_{-n}e^{-in\omega_0 t}$$

Nu kommer tricket, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} = \sum_{n=-1}^{-\infty} c_{-n} e^{-in\omega_0 t}$, Vilket ger den komplexa Fourierserien →

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}$$

Halleluja, detta var ju fint, men hur får vi fram c_n? Det finns 2 sätt

Alternativ 1

Beräkna a_n och b_n först och utnytja sambandet

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$$

Eller lite mer vackert uttryckt

$$a_n = 2\mathrm{Re}(c_n) \tag{10}$$

$$b_n = 2\mathrm{Im}(c_n) \tag{11}$$

Detta är den bästa metoden du då faktiskt ska räkna då symmetrier gör ofta att a_n eller $b_n = 0$ och därför blir det enklare räkning.

Alternativ 2

Om du multiplicerar båda sidor med $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-im\omega_0 t}dt \rightarrow$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-im\omega_0 t}dtf(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{in\omega_0 t}e^{-im\omega_0 t}dt$$

Observera att högersidan blir 0 förutom då $m = n$. Eftersom fallet då allt blir 0 är ointressant, säger jag att $m = n \rightarrow$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-in\omega_0 t}dtf(t) = c_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{in\omega_0 t}e^{-in\omega_0 t}dt$$

$$\leftrightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-in\omega_0 t}dtf(t) = c_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{in\omega_0 t}e^{-in\omega_0 t}dt$$

$$\leftrightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-in\omega_0 t}dtf(t) = c_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{in\omega_0 t}e^{-in\omega_0 t}dt$$

Observera att den $t \in [T/2, -T/2] \rightarrow$

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{-in\omega_0 t}dtf(t) = c_n \int_{-T/2}^{T/2} e^{0}dt$$

$$\leftrightarrow$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{-in\omega_0 t}dtf(t) = c_n T$$

$$\leftrightarrow$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{-in\omega_0 t}dt \tag{12}$$

och med denna kan man ju beräkna c_n. Det brukar dock bli jobbiga integraler.

5. Fourierspektrat

Ok, lite konventioner:

t kan oftast (i alla våra fall) tolkas som en tidsvariabel. Om vi har en funktion beroende av t säger vi att den befinner sig i **tidsdomänen**. Utvecklingskoefficienterna beror däremot på ω_0 och befinner sig därav i **frekvensdomänen**.

Talföljden av Fourierkoefficienter, c_n, befinner sig i frekvensdomänen och beskriver funktionens spektrum. Eftersom n antar heltalsvärden säger vi att vi har ett *diskretspektrum* i dessa fall, även känt som linjespektrum. Man kan sedan dela upp spektrat ytterliggare.

Amplitudspektrat, $|c_n|$
Fasspektrat, $arg(c_n)$

6. Alla exempel från innan till nu

Här tar jag alla exempel som har kommit såhär långt inklusive alla i kapitel 6.

Jag inleder på sidan 5 nmd en gitarrsträng, som beskrivs av vågekvationen

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x,t)=\frac{\mu}{T}\frac{\partial^2}{\partial t^2}y(x,t) \tag{13}$$

Där y är avvikelsen från 0:läget. När man har en vågekvation ges alltid hastigheten som $\sqrt{1/K}$ där K är termen framför den tidsberoende derivatan. Alltså ges hastigheten av $\sqrt{T/\mu}$. Bevis:

$$\text{Ansats: } y(x,t)=Ae^{ikx-\omega t}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x,t)=\frac{\mu}{T}\frac{\partial^2}{\partial t^2}y(x,t)$$

$$\leftrightarrow$$

$$(ik)^2y(x,t)=\frac{\mu}{T}(-i\omega)^2y(x,t)\leftrightarrow$$

$$-k^2=\frac{\mu}{T}\omega^2\leftrightarrow\frac{k}{\omega}=\sqrt{\frac{\mu}{T}}\leftrightarrow$$

Eftersom $\omega=\frac{2\pi}{T}$, $\frac{1}{T}=f$ och $k=\frac{2\pi}{\lambda}\rightarrow$

$$\frac{2\pi f}{2\pi/\lambda}=\sqrt{\frac{T}{\omega}}$$

$$\leftrightarrow$$

$$v=\lambda f=\frac{T}{\omega}$$

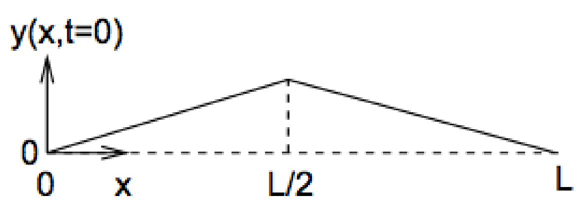
TA MOTHERFUCKING DA!

Tillbaka till själva diff-ekvationen (ekvation 13). Jag låter gitarren ha längden L. Detta ger randvillkoren

Randvillkor

$$y(0,t)=y(L,t)=0$$

Eftersom vi har noder i ändarna. Nu behöver vi bara begynnelsevillkor. Kolla på gitarren vid $t=0\rightarrow$



Figur 1: Såhär ser gitarren ut då $t=0$

Detta ger

Begynnelsevillkor

$$y(x,0) = \begin{cases} \frac{2Ax}{L}, 0 \leq x < \frac{L}{2} \\ \frac{2A(L-x)}{L}, \frac{L}{2} \leq x \geq L \end{cases}$$

Kolla på figuren ser du att det stämmer. Ok, eftersom detta inte är en härledning kommer följande del inte att vara logisk. Men vi ansätter

$$y(x,t) = Be^{i(kx-\omega t)} + Ce^{-i(kx-\omega t)}$$

Där B-delen går åt höger och C delen år vänster. Låt oss nu använda begynnelsevillkoren. Jag börjar med

$$y(0,t) = 0 \leftrightarrow 0 = Be^{-i\omega t)} + Ce^{i\omega t)}$$

$$\leftrightarrow 0 = B + C$$

$$\leftrightarrow$$

$$B = -C$$

Vilket ger $\rightarrow y(x,t) = B(e^{i(kx-\omega t)} - e^{-i(kx-\omega t)}) = B(e^{ikx} - e^{-ikx})e^{-i\omega t} = B2i\sin(kx)e^{-i\omega t}$.

Om vi nu tar en paus och kollar på

$$2iB$$

ser de inte så fint ut.

Om

$$2iB = B' \rightarrow$$

$$y(x,t) = B'\sin(kx - \omega t)e^{-i\omega t}$$

Låt mig nu kolla på $y(L,t) = 0 \rightarrow$

$$0 = B'\sin(kL)e^{-i\omega t} \leftrightarrow 0 = B'\sin(kL)$$

Om vi nu bara låter $B' = 0$ blir livet lite mindre färgglatt utan gitarr kring lägerelden så vi struntar i de fallet och får $\rightarrow$

$$kL = \pi n$$

$$\leftrightarrow$$

$$k = \frac{n\pi}{L}$$

Jamen nu har vi ju en lösning!

$$y(x,t) = B'\sin(\frac{n\pi}{L}x)e^{-i\omega_n t}$$

Dags för lite analys! Om vi nu kollar på $y(x,t)$ ges olika vågor vid olika n. Grundvågen (Ser ut som en cos) ges du $n = 1$, $n = 2$ ger en med en nod i mitten etc...

Våglängden för $n = 1$ blir uppenbart $2L$ och allmänt $2L/n$.
Frekvensen blir då $\omega_1 = 4\pi/L$ och allmänt $\omega_n = \frac{n\pi V}{L} = \omega_1 n$

Nu kommer en ansats, alla vågor byggs upp som en summa av det specifika n:et och föregående $n \rightarrow$

$$y(x,0) = \sum_n S_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)$$

där

$$y(x,0) = \begin{cases} \frac{2Ax}{L}, 0 \leq x < \frac{L}{2} \\ \frac{2A(L-x)}{L}, \frac{L}{2} \leq x \geq L \end{cases}$$

Hur ska vi hitta S_n?

Jo, genom och kolla på bevisen ovan din dumme jävel. Nu pallar inte jag detta exempel längre, vidare till nästa.

Dags för exemplet på sida 10.

Vad blir Fourierkoefficienterna för sågtandsfunktionen, $f(t) = t$, $t \in [-\pi, \pi]$. Börja med att rita upp funktionen, så att du ser att den är **ojämn**. Därför vet du på en gång att $a_n = 0$. Nu rör vi oss vidare till b_n.

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(n\omega_0 t)dt = \frac{1}{\pi}([-t\frac{1}{n\omega_0}\cos(n\omega_0 t)]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{n\omega_0}\cos(n\omega_0 t)dt) =$$

7. Några Egenskaper hos Fourierserier

1. Linjäritet

Om vi har $f(t) = g(t) + h(t)$ där $g(t)$ och $h(t)$ har Fourierkoefficienterna C_n^g respektive C_n^g ges $f(t)$:s koefficient till $C_n^f = C_n^g + C_n^h$.

Bevis:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^f e^{in\omega_0 t} = g(t) + h(t)$$

$$g(t) + h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^g e^{in\omega_0 t} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^h e^{in\omega_0 t}$$

Sätt $f(t) = g(t) + h(t)$ och TA DAAA

2. Om $f(t)$ är komplex har komplexkonjugatet Fourierkoefficientern $\overline{c_{-n}}$

Bevis:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \rightarrow \overline{f(t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{c_n} e^{-in\omega_0 t}$$

Låt $m = -n$

$$\overline{f(t)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \overline{c_{-m}} e^{im\omega_0 t}$$

och $m = n \rightarrow$

$$\overline{f(t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{c_{-n}} e^{in\omega_0 t}$$

3. $f(t-t_0)$ har Fourierkoefficienten $c_n e^{-in\omega_0 t_0}$

Bevis:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \to f(t-t_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} e^{-in\omega_0 t_0}$$

Detta är tydligen beviset enligt anteckningar.

4. $f(-t)$ har Fourierkoefficienten c_{-n}
Bevis:

$$f(-t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{-m} e^{-im\omega_0 t}$$

$m = n$ ger

$$f(-t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n} e^{-in\omega_0 t}$$

Detta är ett annat sjukt skumt bevis.

8. En tillämpning: Värmeledningsekvationen

Efter en massa härledning kommer man fram till värmeledningsekvationen.

$$\frac{\partial}{\partial t} T(x,t) = k \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x,t) \tag{14}$$

Där k är en matrialkonstant. Nu ska vi syssla med en konkret exempel. Vi har en järnstav med längden L och ändarna har konstant en temperatur på 0 grader. Ändarna är även värmeisolerade. Hur förändras temperaturen $T(x,t)$ med tiden?

Randvillkor

$$T(0,t) = T(L,t) = 0$$

Eftersom jag har separerade derivator kan jag ansätta $\to$

$$T(x,t) = \theta(t) X(x)$$

Jag stoppar in detta i värmeledningsekvationen (ekvation 14) $\to$

$$\theta'(t) X(x) = k\theta(t) X''(x) \leftrightarrow \frac{1}{k} \frac{\theta'(t)}{\theta(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Eftersom varje sida beror på olika variabler så vet jag att

$$\frac{1}{k} \frac{\theta'(t)}{\theta(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = a$$

Där a är en konstant. Detta ger ekvationsystemet $\to$

$$\begin{cases} \theta'(t) = ka\theta(t) \\ X''(x) = aX(x) \end{cases}$$

Ansats för $X(x)$:

$$X(x) = \alpha e^{\sqrt{a}x} + \beta e^{-\sqrt{a}x}$$

Om vi nu kollar på denna.

Om $a > 0 \to X(x)$ blir exponentiell. Detta kan inte vara lösningen då randvillkoren inte uppfylls i detta fall.

Om $a < 0 \to X(x)$ får en trigonometrisk lösning, sin och cos alltså. Detta är nog lösningen.

För att få detta lite mer tydligare. $b = -a \to$

$$X(x) = \alpha e^{i\sqrt{b}x} + \beta e^{-i\sqrt{b}x}$$

Med hjälp av Eulers formler ges

$$X(x) = A\text{sin}(\sqrt{b}x) + D\text{cos}(\sqrt{b}x)$$

Nu kollar vi på randvillkoren $\to$

$$X(0) = 0 \tag{15}$$

$$X(L) = 0 \tag{16}$$

Ekvation 15 $\to$

$$X(0) = 0 \leftrightarrow 0 = A \times 0 + D \times 1 \leftrightarrow$$

$$D = 0$$

Så $X(x) = A\text{sin}(\sqrt{b}x)$. Nu kollar vi på ekvation 16 $\to$

$$X(L) = 0 \leftrightarrow 0 = A\text{sin}(\sqrt{b}x)$$

Nu finns två lösningar men det blir inget trevligt om $A = 0$ så vi sätter $A \neq 0$. Detta ger

$$n\pi = \sqrt{b}L \leftrightarrow$$

$$\sqrt{b} = \frac{n\pi}{L}$$

Detta ger lösningen $\to$

$$X(x) = A\text{sin}(\frac{n\pi}{L}x) \tag{17}$$

Varje värde på n ger en lösning.

$$\theta'(t) = ka\theta(t) \to \theta(t) = B_n e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t}$$

Eftersom värmeledningsekvationen är linjär i $T(x,t)$ är varje summa av dessa lösningar också en lösning. Den allmänna lösningen kan då skrivas som $\to$

$$T(x,t) = \sum_n X_n(x)\theta(t) = \sum_n c_n \text{sin}(\frac{n\pi}{l}x)e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t} \tag{18}$$

där $c_n = A_n B_n$

12. Deltafunktionen

Speciell funktion. Ett exempel

$$y(x,0) = \begin{cases} 1/a, \ |t| \leq a/2 \\ 0, \text{ annars} \end{cases}$$

Funktionen är alltså en spik med höjden $1/a$ och bredden a. Arean under detta måste vara 1, så $\to$

Egenskap 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

Vidare gäller $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t)dt$ observera att $t \in [-a/2, a/2] \rightarrow$

$$\lim_{a\rightarrow 0} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{a} f(t)dt = \lim_{a\rightarrow 0} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{a} dt \int_{-a/2}^{a/2} f(t)dt$$

Eftersom defentionen av deltafunktionen ges $\rightarrow$

$$\lim_{a\rightarrow 0} 1 \times \int_{-a/2}^{a/2} f(t)dt = f(0)$$

Egenskap 2

$$\int \delta(t)f(t)dt = f(0)$$

Egenskap 3

$$\int \delta(t-a)f(t)dt = f(a)$$

15 Diffrentialekvationer

Så vi har en masssa som hänger i en fjäder.

$$F_{friktion} = -\lambda v = -\lambda \frac{\partial x}{\partial t}$$

$$F_{fjäder=-kx}$$

dessa två måste ju motsvara den totala kraften $\rightarrow$

$$F_{tot} = F_{friktion} + F_{fjäder\leftrightarrow}$$

$$ma = -\lambda \frac{\partial x}{\partial t} - kx \leftrightarrow$$

$$m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\lambda \frac{x}{t} - kx \tag{19}$$

Ansats: $X(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t}d\omega \rightarrow$ ekvation 19

$$m\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t}d\omega = -\lambda \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t}d\omega - k\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t}d\omega \leftrightarrow$$

Efter mycket om och men ges

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}X(\omega)[-m\omega^2 + k + \lambda i\omega]d\omega = 0$$

Låt $F(\omega) = X(\omega)[-m\omega^2 + k + \lambda i\omega] \rightarrow$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}F(\omega)d\omega = 0$$

Detta är ju bara den inversa fouriertransformen från $0 \to 0$! $f(\omega) = 0$, vilket ger

$$X(\omega)[-m\omega^2 + k + \lambda i\omega] = 0$$

Multiplicera med $(-\frac{1}{m}) \to$

$$X(\omega)[\frac{m\omega^2}{m} - \frac{k}{m} - \frac{\lambda i\omega}{m}] = 0 \leftrightarrow$$

$$X(\omega)[\omega^2 - \frac{k}{m} - \frac{\lambda}{m} i\omega] = 0$$

$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ och vi låter $2\beta = \frac{\lambda}{m}$ ger

$$X(\omega)[\omega^2 - \omega_0^2 - i2\beta\omega] = 0$$

Nu har vi en andra gradens diffrentialekvation. mha pq-formeln ges nollställen då

$$\omega = \omega_{1,2} = i\beta \pm \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Jaha, vad ska vi med detta till? Jo, omega är en deltafunktion! $\to$

$$X(\omega) = A\delta(\omega - \omega_1) + B\delta(\omega - \omega_2)$$

Se på faan, nu har vi ju en Fouriertransform! Låt oss inverstransformera

$$X(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} dt =$$

$$\frac{1}{2\pi}(A \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_1) e^{i\omega t} dt + B \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_2) e^{i\omega t} dt) =$$

$$\frac{1}{2\pi}(Ae^{i\omega_1 t} + Be^{i\omega_2 t}) =$$

$$\frac{A}{2\pi} e^{i\omega_1 t} + \frac{B}{2\pi} e^{i\omega_2 t}$$

$\omega_1 = i\beta + \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ och $\omega_2 = i\beta - \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ ger $\to$

$$X(t) = e^{i\beta}(\frac{A}{2\pi} e^{it\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} + \frac{B}{2\pi} e^{-it\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}})$$

Låt oss och ändra om lite till andra konstanter $\to$

$$X(t) = Ce^{-\beta t} e^{it\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} + De^{-\beta t} e^{-it\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

Alternativ 1 $\to$
$\beta = 0 \leftrightarrow$ Harmoniska svängningar
Alternativ 2 $\to$
$\beta \neq 0$ och $\beta < \omega_0 \leftrightarrow$ Lite dämpning
Alternativ 3 $\to$
$\beta \neq 0$ och $\beta > \omega_0 \leftrightarrow$ Exponentiell dämpning utan svängning

Drivande kraft

$$F_{drivande} = F\sin(\Omega t)$$

Det blir enklare om vi tar en e-grej. Alltså nu $\rightarrow$

$$F_{drivande} = Fe^{i\Omega t}$$

Vilket ger $\rightarrow$

$$m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -kx - \lambda\frac{\partial x}{\partial t} + Fe^{i\Omega t}$$

Som innan $\rightarrow$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)[\omega^2 - \omega_0^2 - 2i\beta\omega]e^{i\omega t}d\omega = -\frac{F}{m}e^{i\Omega t}$$

$$\leftrightarrow$$

$$-\frac{F}{m}e^{i\Omega t} = \frac{1}{2\pi}(-\frac{F}{m}2\pi)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\Omega)e^{i\Omega t}d\omega \rightarrow$$

$$X(\omega)[\omega^2 - \omega_0^2 - i2\beta\omega] = (-\frac{2\pi F}{m})\delta(\omega-\Omega)$$

Vänsterledet är som förr.
Tänk diff.-ekvationer i endimmen, den har lösningen en homogenlösning + partikulärlösning!

$$X(\omega) = \frac{-\frac{2\pi F}{m}\delta(\omega-\Omega)}{[\omega^2 - \omega_0^2 - i2\beta\omega]} + \text{Homogenlösningen}$$

Som förr använder vi inversfouriertransformen

$$X(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\Omega t}d\omega =$$

$$-\frac{F}{m}\frac{e^{i\Omega t}}{\omega^2 - \omega_0^2 - i2\beta\omega}$$

Svängingarnas Amplitud

$$|X(t)| = \frac{F/m}{\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2 - i2\beta\omega}}$$

Denna amplitud är som störst då nämnaren har ett minimum. Detta sker då

$$\omega = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta}(\approx \omega_0\ ,\ \omega_0 >> \beta)$$

Vi har en såkallad <u>Resonans</u>. Resonansfrekvensen ligger strax under egensvängningsfrekvensen ω_0

Vid resonansfrekvensen har vi amplituden

$$|X_{max}| = \frac{F/m}{2\omega_0\beta}$$

Ju mindre dämpning desto högre central topp.

Tillämpning kretsekvationer

Vi har en ström, j, en resistans, R, en spole med induktansen L och en kondensator med kapacitansen C. Alla dessa är seriekopplade, **se sida 29 i häftet**.

Spänningsfallet över resistorn ges av

$$u_r = Rj$$

Spänningsfallet över spolen ges av

$$u_L = L\frac{dj}{dt}$$

Spänningsfallet över kondensatorn ges av

$$u_C = \frac{q}{C}$$

Går vi ett varv genom kretsen ges då logiskt $\rightarrow$

$$u - u_r - u_L - u_C = 0$$

$$\leftrightarrow$$

$$u - Rj - L\frac{dj}{dt} - \frac{q}{C} = 0$$

Eftersom $j = \frac{dq}{dt}$ $\rightarrow$

$$u - R\frac{dq}{dt} - L\frac{d}{dt} - \frac{q}{C} = 0$$

Jämför detta med den harmoniska oscillatorn

$$L\frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{q}{C} - R\frac{dq}{dt} + u$$

$$m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -kx - \lambda\frac{\partial x}{\partial t} + F_{drivande}$$

Vi ser att de liknar varandra och då kan vi använda analogier för att beräkna detta! Analogierna vi kommer använda är

Läge $\leftrightarrow$ Laddning
Hatighet $\leftrightarrow$ Ström
Massa (rörelsetröghet) $\leftrightarrow$ induktans (strömtröghet)
Fjäderkonstant $\leftrightarrow$ invers kapacitans ($1/C$)
Friktion $\leftrightarrow$ Resistans Kraft $\leftrightarrow$ Spänning

Alltså kan vi beskriva hela den elektriska kretsen med mekanisk analogi. Detta ska jag visa är svinskönt då vi har en växelström. Låt oss derivera en gång till [Just 4 fun]

$$\frac{du}{dt} - R\frac{dj}{dt} - L\frac{d^2 j}{dt^2} - \frac{j}{C} = 0 \tag{20}$$

Vi antar växelspänning

$$u(t) = |u(\omega)|\cos(\omega t) = \mathrm{Re}(u(\omega)e^{i\omega t})$$

Och vi antar att strömmen svänger på samma sätt

$$j(t) = |j(\omega)|\cos(\omega t + \varphi)$$

Eftersom ekvation 20 är linjär och reell blandas ej real- och imaginärdelen → Vi kan räkna komplext och skita i imaginärdelen av svaret!

Insättning av j och u ger på samma sätt som med den harmoniska oscillator →

$$j(\omega) = \frac{u(\omega)}{R - \frac{1}{i\omega C} + i\omega L}$$

$$u(\omega) = (R - \frac{1}{i\omega C} + i\omega L)j(\omega)$$

Impedanser

$$u(\omega) = (R - \frac{1}{i\omega C} + i\omega L)j(\omega)$$

Ser ju ut som Ohms lag fast med komplexa frekvensberoende resistanser.

$$u(\omega) = Z(\omega)j(\omega)$$

där $Z(\omega) = R - \frac{1}{i\omega C} + i\omega L = z_R + z_L + z_C$ [Impedanser]
Där vi tolkar seriekoppling mha impedanser. Om $U(\omega)$ är reell så är oftast $j(\omega)$ komplext.

16. Sampling och diskret Fouriertransform

När man samplar, vilken samplingsperiod ska man välja?
Ju fler ju bättre!

Hur många måste man minst välja för att det ska bli bra?
2 ggr frekvensperioden!
Lite mer matematiskt kan man säga:

$$|\omega| > 2\omega_c$$

Frekvensen $2\omega_c$ kallas Nyqvistfrekvensen.
Vad händer om man samplar för glest?
spöksignaler uppstår vid låga frekvenser!
Detta kallas **Aliasing**!

17. Laplacetransform

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega_0 t}dt$$

Funkar oftast bra för funktionern som slås på vid $t = 0$.

Om vi tänker oss en funktion där där $f(t) = 0$ innan $t = 0$ →

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega_0 t}dt$$

I många fall konvergerar tyvärr inte integralen :(

Istället kan vi Laplacetransformera!

$$F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}$$

där $s = \sigma + i\omega$ observera att $\sigma > 0$ och $\sigma \in \mathbf{R}$

18. Laplacetransform av derivator och integraler

Derivator

$$F'(s) = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = [\text{Partialintegratioin}] =$$

$$[\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt]_0^\infty + s\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt =$$

$$-f(0) + sF(s)$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} \rightarrow sF(s)$$

om $f(0) = 0$ Med samma härledning gäller

$$\mathcal{L}\{f(''(t))\} \rightarrow s^2F(s)$$

om $f(0) = f'(0) = 0$

Integral

Samma logik kan användas på integraler Låt $g(t)$ vara en integrering av $f(t)$

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{1}{s}G(s)$$

om $\frac{1}{s}g(0) = 0$, vilket det ofta blir.

Alltså får vi en enkel regel

Minnesregel
Derivata: $\times s$
Integral: $\times \frac{1}{s}$

Nu kan vi byta ut diff-ekvationer mot Laplace och få allt jättemysigt!

2 Del 2, Maxwell

1. Förberedelse

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e_x} & \mathbf{e_y} & \mathbf{e_z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Dags för 2 räkneregler.

Räkneregel 1

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

Räkneregel 2

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{ab})$$

Skalärfält och vektorfält

Ett skalärfält är ett fält där varje punkt beskrivs av ett tal. Ett vektorfält är ett fält där varje punkt är en vektor istället.

Ex. Skalärfält
Temperatur och Elektrisk potetial
Ex. Vektorfält
Vattnets hastighet i en flod, elektriska och magnetiska fält

Nablaoperatorn, ∇

$$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$$

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$$

Detta kallas *Laplace operator*

$$\nabla \cdot (\mathbf{a}c) = (\nabla_{\mathbf{a}} + \nabla_c) \cdot (\mathbf{a}c) = \nabla_{\mathbf{a}} \cdot (\mathbf{a}c) + \nabla_c(\mathbf{a}c)$$

Integraler

Linjeintegral:

$$\int_{\Gamma_{AB}} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$$

Där vi integrerar en linje mellan punkterna A och B. Ex: Om vektorfältet är en kraft ger linjeintegralen arbetet att förflytta sig vägen mellan A och B.

Specialfall:

$$\oint_{\Gamma_{AB}} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$$

Vilket betyder att Γ är en sluten kurva.

Ytintegral:

$$\int_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}$$

Ytan är S. $d\mathbf{S}$ är en svinliten del av ytan som pekar i en viss riktning, dvs en vektor.

Om $\mathbf{a}$ är vattnets hastighet beskriver integralen flödet genom ytan S, då kan kallas integralen för flödesintegralen och betecknas ofta som

$$\int\int_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}$$

Specialfall:

$$\int_{S(V)} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}$$

Ytan S omsluter volymen V. Integralen beräknar flödet ut Volymen V.

Volymintegral:

$$\int_V \phi d\mathbf{V}$$

Summerar de små volymbitarna med dess skalär. ϕ är alltså ett skalärfält. Tex är ϕ laddningstätheten kommer integralen ge laddningen.

Integralsatser

Stokes sats

$$\oint_\Gamma \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla\times\mathbf{a})\cdot d\mathbf{S} \tag{21}$$

Gauss sats

$$\int_{S(V)} \mathbf{a}\cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla\cdot\mathbf{a}d\mathbf{V} \tag{22}$$

2. Härledning av Maxwells ekvationer

Coulumbs Lag

Coulumbs lag:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{e_r}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Jag placerar en sfär kring laddningen och beräknar ytintegralen $\rightarrow$

$$\int_S \mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int_S \mathbf{e_r}\cdot d\mathbf{S}$$

Ytintegralen av en sfär är $4\pi r^2$ $\rightarrow$

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Se på fan. Oberoende av radien! Detta är ju ifs logiskt då det totala antalet fältlinjer ut från en godtycklig sfär är oberoende av sfärens storlek.

Uppenbart gäller följande då vi inte har någon laddning

$$\int_S \mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{S} = 0$$

Om vi nu går tillbaka till den orginala integralen och lägger till "en bulapå sfären ges

$$\int_S \mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Eftersom bulan"inte bidrar med någon extra laddning. Alltså gäller sambandet för en godtycklig omslutande volym.

Så vad händer om vi har flera laddningar?
Jo, det logiska såklart.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon}$$

Slatsats:
Ytintegralen mäter laddningen inom den slutna volymen!

Laddningen ges av volymintegralen av laddningstätheten $\rightarrow$

$$Q = \int_V \rho dV$$

(Kom ihåg, laddningstäthet = laddning/Volym)
Kombinera detta med tidigare grejer $\rightarrow$

$$\int_S \mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV$$

Detta uttrycket är sjukt användbart. Den kallas **Gauss lag i integralform**. Vi skriver om den mha **Gauss sats** →

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) d\mathbf{V} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV$$

Eftersom integralerna är desamma kan man bara skriva →

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{23}$$

Detta är **Gauss lag i diffrentialform**

Magnetiska fältlinjer

När det gäller magnetiska fält, notera följande:

- Finns ingen magnetisk laddning → magnetiska fältllinjerna är slutna kurvor!
- Vid slutna ytor är alltid flödet = 0

Detta ger →

$$\int_{S(V)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} d\mathbf{V}$$

Där den tredje delen kommer från Gauss sats. Detta ger →

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{24}$$

Alltså, det finns inga magnetiska laddningar.

Faradays induktionslag

Om vi har en sluten slinga i rummet beskriven av kurvan Γ säger lagen

$$u = -\frac{d\Phi}{dt}$$

u =inducerad spänning, Φ =Magnetiska flödet

$$\Phi = \int_S \Phi \cdot d\mathbf{S}$$

och

$$u = \oint_{\Gamma(S)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

Dessa ger

$$\oint_{\Gamma(S)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \int_S \Phi \cdot d\mathbf{S} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

Vi använder oss av den gode Stoke på det vänstra ledet →

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

Också samma grej som förut, vi har samma integral på båda sidorna →

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Detta är Faradays lag i diffrentialform

Amperes Lag

Nu kollar vi på magnetfältet som skapas av en rak ledare

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}$$

Magnetlinjerna bildar slutna cirklar som omsluter ledaren och vi har axial symmetri. Detta betyder att om vi ser ledaren som en axel finns det lika mycket av kurva på alla sidor. Som sagt $\rightarrow$

$$B2\pi = \mu_0 I$$

Vi kan nu resonera oss till $\rightarrow B2\pi = \oint_{circle} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r}$ Eftersom cirkeln är detsamma överallt och parallellt med integrationvägen.

Vi deformerar cirkeln och inser att det inte gör någon skillnad för att magnetfältet är svagare längre ut och starkare längre in. Ok, så vi har:

$$\oint_{\Gamma(S)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I$$

för varje kurva $\Gamma(S)$ som omsluter I Detta ger mha Stokes sats

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S}$$

Observera följande

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

Vilket ger

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \mu_{\mathbf{0}} \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

Återigen ges

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

Maxwells Tillägg

Ytan S omsluter laddningen Q. Om denna laddning förändras måste vi ha ström, alltså $\rightarrow$

$$-\frac{dQ}{dt} = I$$

Nu vill vi uttrycka strömmen som strömtäthet och laddningen som laddningstäthet

$$-\frac{d}{dt}\int_V \rho dV = \int_{S(V)} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \leftrightarrow$$

$$-\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} = \int_{S(V)} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

mha Gauss sats $\rightarrow$

$$-\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{J}) d\mathbf{V}$$

och så plockar vi bort integralerna

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Detta är kontiutetsekvationen på diffrentialform. Kontinuitetsekvationen uttrycker alltid att laddningen är bevarad.

Om vi nu kollar på Amperes lag och multiplicerar den med $\nabla \rightarrow$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J} \leftrightarrow$$
$$(\nabla \times \nabla) \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \nabla^2 \cdot \mathbf{J} \leftrightarrow$$
$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

Detta blir ju totalt knas! Den uppfyller inte kontinuitetsekvationen tänkte Maxwell. Sen gick han och sov på saken och bara adderade till en term, den såkallade förskjutningsströmmen. Då ges $\rightarrow$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Nu gör vi som förut och då ges efter många steg...

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 (\nabla \cdot \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) \leftrightarrow$$
$$\mu_0 (\nabla \cdot \mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) = \mu_0 (\nabla \cdot \mathbf{J} + \varepsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t})$$

Med hjälp av Gauss lag ($\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$) ges då $\rightarrow$

$$\mu_0 (\nabla \cdot \mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) = \mu_0 (\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t}) \leftrightarrow$$
$$\mu_0 (\nabla \cdot \mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) = \mu_0 (\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t})$$

Genom detta tillägget blir kontinuitetsekvationen inbyggd i Amperes lag! Vilket är ju hur mysigt som helst. Vad får detta för konsekvenser för teorin?

Har vi en tom rymd (dvs vakuum) $\rightarrow \mathbf{J} = 0$ men har vi ett elektriskt fält kan vi alstra ett magnetiskt fält, vi kan även göra tvärtom, mha ett elektriskt fält alstra ett magnetiskt fält. Observera att vi har en tidsderivata så vi måste variera det ena fältet för att ge upphov till ett annat.

Sammanfattning av det vi har kommit fram till

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

trin Notera symmetrin i ekvationerna. Symmetrin bryts av av det faktum att det inte finns några magnetiska strömmar och laddningar Nu på integralform.

$$\oint_{\Gamma(S)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$
$$\oint_{\Gamma(s)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d\Phi}{dt}$$
$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$
$$\int_{S(V)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho d\mathbf{V} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

3. Maxwell i vakuum

$\mathbf{J} = \rho = 0$ Detta ger

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

Observera ekvation 2. Dvs $\rightarrow$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Kryssprodukt med ∇ från vänster $\rightarrow$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Enligt räkneregel 2 [$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$] $\rightarrow$

$$\nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{E}) = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\leftrightarrow$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B}$$

Nu kan man tänka, varför gör vi detta? Jo, Vi har ju ekvation 1 och 5 som vi kan göra nåt med! Detta ger $\rightarrow$

$$\nabla(0) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \leftrightarrow$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \tag{25}$$

Denna är sjukt viktig. Nu tar vi och kollar på ekvation 1

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Kryssprodukt med nabla från vänstser ger

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \nabla \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \leftrightarrow$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{E}$$

Och nu uttnyttjar vi ekvation 2 och 3 $\rightarrow$

$$\nabla(0) - \nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}) \leftrightarrow$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \tag{26}$$

Ekvation 25 och 26 är ju vågekvationen! Isf borde ju

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

Vilket stämmer! Vi vet att **B** och **E** rör sig med de och ekvationerna är ju identiska så låt oss sätta $\mathbf{F} = \mathbf{B} = \mathbf{E}$ och så bevisar vi att hastigheten är c i endimension.

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial t^2} \tag{27}$$

Betrakta $F(x,t) = F_1(x-ct) + F_2(x-ct) \rightarrow$

$$\frac{\partial F_1(x-ct)}{\partial x} = F_1' \frac{\partial (x-ct)}{\partial x} = F_1'$$
$$\frac{\partial^2 F_1(x-ct)}{\partial x^2} = F_1''$$
$$\frac{\partial F_1(x-ct)}{\partial t} = -cF_1'$$
$$\frac{\partial^2 F_1(x-ct)}{\partial t^2} = c^2 F_1''$$
$$\frac{\partial^2 F_2(x+ct)}{\partial x^2} = F_2''$$
$$\frac{\partial^2 F_2(x+ct)}{\partial t^2} = c^2 F_2''$$

Eftersom $F(x,t) = F_1(x-ct) + F_2(x-ct) \rightarrow$

$$\frac{\partial^2 F(x,t)}{\partial x^2} = F(x,t)''$$

$$\frac{\partial^2 F(x,t)}{\partial t^2} = c^2 F(x,t)''$$

Vi stoppar in detta i ekvation 27 $\rightarrow$

$$F(x,t)'' = \mu_0 \varepsilon_0 c^2 F(x,t)''$$
$$\leftrightarrow$$
$$1 = \mu_0 \varepsilon_0 c^2$$
$$\leftrightarrow$$
$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

Tydligen är detta ett bevis.
Fuck this. Tenta imorrn. Nu ska jag äta.