NanoKvant - tagga!!!

Grundläggande till Kvantmekanik

Uppgift - grära böcker om Kvantmekanik i bibliotek
ex. Absolutely Small

Kvantmekanik beskriver det icheklassiska beteendet hos mikroskopiska enheter.

$$\omega = 2\pi \cdot f$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$\omega\hbar = h \cdot f$$

10^{-34}

storleken av Planck

Vi pratar bara om sannolikheten inom kvantfysiken

Om man börjar kolla närmare på vågfunktionen och vilken spalt som vågen går genom kollapsar vågfunktionen.

"Alla andra utfall än det som erhölls blir inte längre möjliga."

Vågfunktionens normering.

beskriv kvanttillstånd $\Psi(x,t)$ position & tid

- kan vara komplex & negativ

Men $|\Psi|^2 = \Psi^* \Psi$ är positivt

Sannolikstätheten

$$\rho(x,t) = |\Psi(x,t)|^2$$ fundamentalt

Sannolikheten att hitta en partikel mellan $x_1 \leq x \leq x_2$

$$P(x_1 \to x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t)\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x,t)\, dx = 1$$

Sannolikheten att hitta en partikel någonstans

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,t)|^2\, dx = 1$$

Normerad vågfunktion

går att ändra men måste då specifieras

Exempel: Vågfunktion för en partikel vid $t=0$

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}}\, e^{-x/a}\, e^{ikx} & x>0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

k: vågtalet

$a, k \in \mathbb{R}$

försvinner pga $|z|^2 = z^* \cdot z$

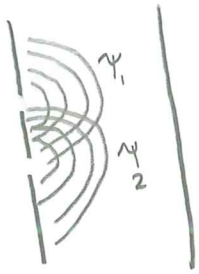
$$\rho(x,0) = \begin{cases} \frac{2}{a}\, e^{-2x/a} \\ 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x,0)\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{2}{a} e^{-2\frac{x}{a}}\, dx = \frac{2}{a}\left[\frac{e^{-2x/a}}{-2/a}\right]_0^{\infty} = 1$$

Är normerad!!!

"Det är som om jag försöker lära er italienska men samtidigt påpekar hur man säger det på spanska"

Exempel: Dubbelspalt



$$\psi_{tot} = \psi_1 + \psi_2$$

$$\rho_{tot} = |\psi_{tot}|^2 = |\psi_1 + \psi_2|^2$$

$$= |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 = \underbrace{(\psi_1^* \psi_2 + \psi_1 \psi^*)}_{\text{Interferens}}$$

Om spalt 1 observeras blir ψ_1 en konstant och då försvinner den blandade termen och därmed kollapsar vågfunktionen då inteferensen är blandad.

Konstanter och storlekar

$E = q \cdot \Delta U$ $\quad$ $eV = 1{,}662177 \cdot 10^{-19} J$

$E = \hbar \omega$

rött ljus $\lambda = 700nm \longrightarrow 1{,}8 eV$

violett ljus $\lambda = 400nm \longrightarrow 3{,}1 eV$

Heisenberg

Planvåg: e^{-ikx}

$\uparrow$ våglängd $\lambda = \frac{2\pi}{k}$

$p = h/\lambda$ (de Broglie)

Position ej bestämd.

$\Delta \lambda = 0$ $\quad$ ingen osäkerhet i våglängd eller momentum

$\Delta p = 0$

Vågpaket: $\psi = \sum_{i}^{i_{max}} c_i e^{ik_i x}$ (superposition av olika planvågor.)

lokaliserar partikeln.

För mindre Δx krävs "många vågor"

$\Rightarrow$ obestämbar våglängd ($\Delta \lambda$)

antigen så vet jag våglängden eller positionen.

Härledning i boken.

litet $\Delta x \Rightarrow$ stort Δp

litet $\Delta p \Rightarrow$ stort Δx

$$\boxed{\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}}$$ Heisenberg Osäkerhetsprincip

liknande relation: $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$

SCHRÖDINGEREKVATIONEN

Vågekvation för sannolikhetsvågen

Generell och tidsoberoende formen:

$$(*) \quad i\hbar \frac{\partial \Psi(\bar{r}t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\bar{r},t) + V(\bar{r})\Psi(\bar{r},t)$$

nabla² = Laplace

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

I endimension:

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$^*\Psi(x,t) = A \cdot e^{ikx - i\omega t}$$

Fri partikel $\Rightarrow V(\bar{r}) = V_0 =$ konstant

$$E_{kin} = \frac{p^2}{2m}, \quad \lambda = \frac{h}{p}, \quad p = \hbar k$$

$$E_{kin} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

(*) i endim

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + V_0 \Psi(x,t)$$

$\Psi(x,t)$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = ik \cdot \Psi(x,t)^* \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -i\omega \Psi(x,t)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -k^2 \Psi(x,t)$$

$$E_2 \Psi(x,t) = (E_{kin} + V_0)\Psi(x,t)$$

$$= \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Psi(x,t) + V_0 \Psi(x,t)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V_0 \Psi(x,t)$$

$$E_1 \Psi(x,t) = \hbar\omega\, \Psi(x,t) = -\frac{1}{i}\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

$E_1 \Psi(x,t) = E_2 \Psi(x,t)$ ger Schrödinger, inte egentligen, men typ.

Nu ska jag använda de sista -2minuterna...

Föreläsning Matlab

med stora bokstäver

Allt ska redovisas 25/11 program.ddg.lth.se/

* i o j är imaginära tal
  skriv ej över.

* Minvektor' - transponerar

* när jag inte vill att något ska skrivas ut så använder jag semikolon

* hold on - plotta i samma fönster

New Script

- får ej börja med en siffra!

- ladda ned MATLAB
- Smartstudies

Laplaceoperatorn: Δ

$\vec{\nabla}^2 = \Delta$ = gradienten med andraderivatan

$$= \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\bar{r},t)}{\partial t} = \underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\bar{r})\right)}_{\text{operator}} \Psi(\bar{r},t)$$

$\hat{A}\cdot\hat{B} \neq \hat{B}\cdot\hat{A}$

"Hamhilton-operatorn"

$$\hat{H} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\bar{r})\right)$$

Vi kommer mest använda den endimensionella versionen. ☺ FORMELBLAD

POTENTIAL

$V(x)$ Fält kallas "konservativt" eller Potentialfält om

$$\bar{F} = -\bar{\nabla} V(\bar{r})$$

I en dimension:

$$F_x(x) = -\frac{\partial}{\partial x} V(x)$$

"skalärpotential

Exempel: en partikel påverkas av en kraft som är konstant i intervallet $0 \leq x \leq a$ och lika med $-|F_0|$.
Bestäm potentialen

$$F_x = \begin{cases} 0 & x<0 \\ -|F_0| & 0 \leq x \leq a \\ 0 & x>a \end{cases}$$

1) i området $0 \leq x \leq a$

$$-V'(x) = -|F_0| \Rightarrow V(x) = |F_0|x + C_1 \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

godtycklig konstant

ii) $x < 0 \quad -V' = 0 \Rightarrow V = C_2$ $\quad C_2 \in \mathbb{R}$

iii) $x > a \quad -V' = 0 \Rightarrow V = C_3$ $\quad C_3 \in \mathbb{R}$

Beror på C_1 om den väljs först. Ska vara kontinuerlig

Potentialen skall vara <u>kontinuerlig</u>

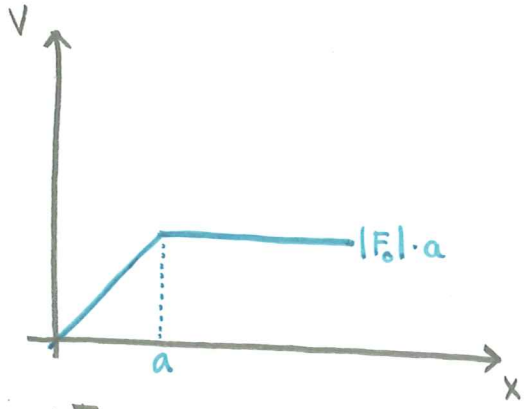
i $x = 0 \Rightarrow C_2 = |F_0| \cdot 0 + C_1$

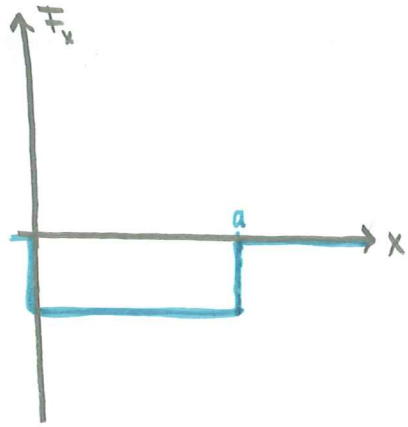
$C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

Friheten att välja C_2

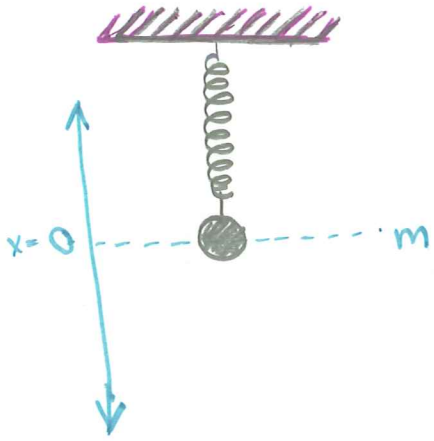
$x = a \Rightarrow |F_0| \cdot a = C_3$

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ |F_0| & 0 \le x \le a \\ |F_0| a & x > a \end{cases}$$





Exempel: vikt i en fjäder



$$F = -k \cdot x$$

Fjäderkonstant

$$F = -\frac{\partial}{\partial x} V(x)$$ idealt - konservativt

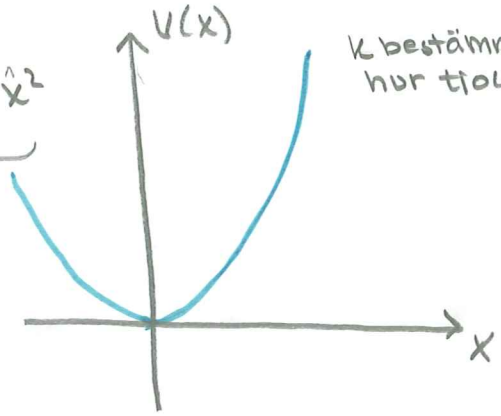
$$-k\frac{x^2}{2} + C = -V(x)$$

$C = 0$ "sätt x i origo"

väljs godtyckligt

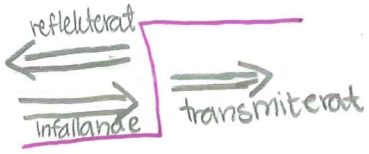
$$V(x) = \frac{k}{2}x^2$$

Totala energin: $E_{tot} = \underbrace{\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{k}{m}\hat{x}^2}_{\hat{H}}$



k bestämmer hur tjock

STATONÄRA STRÖMMAR



Stationära lösningar

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x,t)$$

Vi antar att det finns lösningar som har formen

$$\Psi(x,t) = \Phi(x) \cdot e^{-i\omega t}$$ {Stationära tillstånd}

Tidsberoendet ~~försvinner~~!

$$|\Psi(x,t)|^2 = |\Phi(x)|^2 \underbrace{e^{i\omega t} \cdot e^{-i\omega t}}_{1} = |\Phi(x)|^2$$

$$\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -i\omega \Psi(x,t)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = e^{-i\omega t} \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x^2}$$

Ψ kan allt om schrödinger är löst kan vi allt om vågen

in i Schrödinger ♡

$$i\hbar(-i\omega)\Phi(x)\cancel{e^{-i\omega t}} = -\frac{\hbar^2}{2m}\cancel{e^{-i\omega t}} \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x^2} + V(x)\Phi(x)\cancel{e^{-i\omega t}}$$

$$\underbrace{\hbar\omega}_{E} \cdot \Phi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x^2} + V(x)\Phi(x)$$

Den tidsoberoende Schrödinger-ekvationen !!!

Lösningar för en konstant potential:

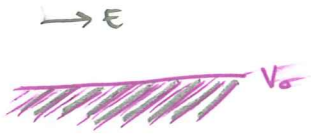
$V(x) = 0$

SE: $$-\frac{\hbar^2}{2m}\underbrace{\frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2}}_{\phi''(x)} + V_0\phi(x) = E\phi(x)$$

$$\phi''(x) + \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)}_{k^2}\phi(x) = 0$$

$E \geq V_0$

$k \geq 0$



$$\phi''(x) + k^2\phi(x) = 0$$

$$\phi(x) = Ce^{\alpha x}$$

$$C\alpha^2 e^{\alpha x} = -k^2 Ce^{\alpha x}$$

$\alpha^2 = -k^2$ imaginära lösningar!

$\alpha = \pm ik$

Vi väljer en linjärkombination. vi vill ju välja båda lösningarna

$$\phi(x) = C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx}$$

$$\Psi(x,t) = C_1 e^{ikx - i\omega t} + C_2 e^{-ikx - i\omega t} \quad !$$

$$= \underbrace{C_1 e^{ikx - \frac{iEt}{\hbar}}} + \underbrace{C_2 e^{-ikx - i\frac{E}{\hbar}t}}$$

$p = \frac{h}{\lambda}$, $p = m \cdot v$ $\Big\}$ $v = \frac{}{}$

$= \left(\lambda = \frac{2\pi}{k}\right) = \frac{\hbar k}{m} = v$

hastighet: $\frac{\hbar k}{m}$ $\quad -\frac{\hbar k}{m}$ vi lika med

$$\Psi(x,t) = \Psi_+ + \Psi_-$$

$$\rho_+ = |\Psi_+|^2 = |C_1|^2$$

$$\rho_- = |C_2|^2 \quad \text{P.S.S}$$

Sannolikheten att hitta en partikel mellan $x_0 \leq x \leq x_0 + l$ ← längdenhet

$$\int_{x_0}^{x_0+l} \rho_+ \, dx = \underbrace{|C_1|^2 \cdot l}_{\text{finns } |C_1|^2 \text{ partiklar per längdenhet } l.}$$

} beskriver ju en ström

Ström $\frac{|C_1|^2}{l}$; $l = 1$

$\psi_+ \Rightarrow \frac{\hbar k}{m}$ i hastighet, åt höger

Repetition:

$$\psi_+(x,t) = C_1 e^{ikx - \frac{i}{\hbar}Et}$$

$$\psi_-(x,t) = C_2 e^{-ikx - \frac{i}{\hbar}Et}$$

$$\rho_+ = |\psi_+|^2 = |C_1|^2$$

sannolikheten att hitta en partikel någonstans i det positiva planet

Sannolikhetsström:

Antalet partiklar i längenhet l

$$\int_{x_0}^{x_0+l} \rho_+ \, dx = |C_1|^2 \cdot l$$

Partikelström
=
Sannolikhetsström

hastighet: $v = \frac{l}{t}$

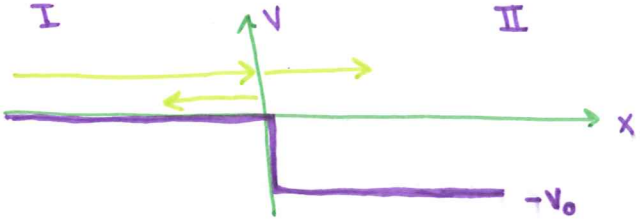
$$l|C_1|^2 = vt \cdot |C_1|^2 = \frac{p}{m} t \, |C_1|^2 = \frac{\hbar k}{m} \cdot t \cdot |C_1|^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{l \cdot |C_1|^2}{t}}_{\text{antalet partiklar i längdenhet/tidsenhet}} = \frac{\hbar k}{m}|C_1|^2 = \rho_+$$

sekund

Reflektion och Transmission

vid potentialsprång



$$V(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \quad \text{I} \\ -V_0 & x > 0 \quad \text{II} \end{cases}$$

SE i I: $-\frac{\hbar^2}{2m}\phi''(x) + 0 \cdot \phi(x) = E\phi(x)$

$$\phi''(x) = \underbrace{\frac{-2m}{\hbar^2}}_{k^2}\phi(x) \Rightarrow \phi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

SE i II: $-\frac{\hbar^2}{2m}\phi''(x) - V_0\phi(x) = E\phi(x)$

$$\phi''(x) = -\underbrace{\left(\frac{2m}{\hbar}(E+V_0)\right)}_{K^2 \text{ - lokalt vågtal}}\phi(x) \Rightarrow \phi(x) = \underbrace{Ce^{iKx}}_{\text{högur}} + \underbrace{De^{-iKx}}_{0 \text{ ingen ström åt vänster}}$$

$$\Rightarrow \quad \Phi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & (i\,I) \\ Ce^{iKx} & (i\,II) \end{cases}$$

Passningsvillkor:

(i) i $x=0$ måste funktionen vara kontinuerlig

$$\boxed{A + B = C}$$

(ii) Derivatorna måste också vara kontinuerliga

$$\boxed{ik(A-B) = iKC} \quad \text{i } x=0$$

Vi vet A (infallande)

$$\Rightarrow \quad B = \frac{1-K/k}{1+K/k} A \quad \text{(reflekterad)}$$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{2}{1+\frac{K}{k}} A \quad \text{(transmitterad)}$$

$$R = \frac{|\text{reflekterad ström}|}{|\text{infallande ström}|} \quad \text{reflektans}$$

$$T = \frac{|\text{transmitterad ström}|}{|\text{infallande ström}|} \quad \text{transmitans}$$

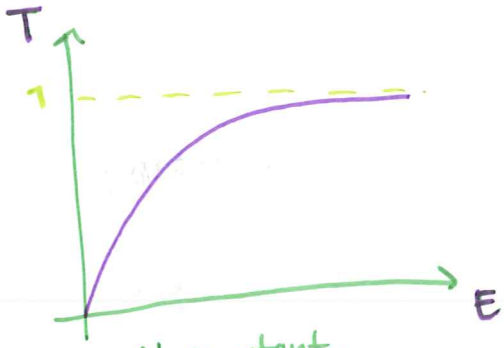
Infallande sannolikhetsström $S_{in} = \frac{\hbar k}{m}|A|^2$

reflekterande —"— $S_{refl} = -\frac{\hbar k}{m}|B|^2$

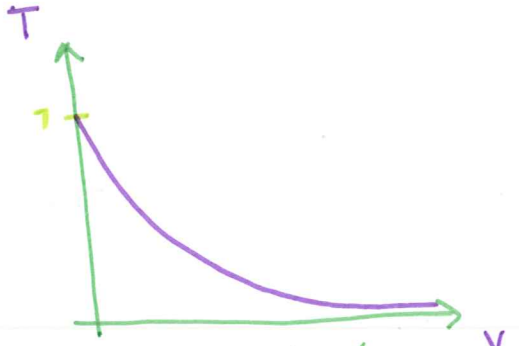
transmitterande —"— $S_{trans} = \frac{\hbar K}{m}|C|^2$

$$R = \frac{|S_{refl}|}{|S_{in}|} = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{\left(1-\frac{\kappa}{k}\right)^2}{\left(1+\frac{\kappa}{k}\right)^2}$$

$$T = \frac{|S_{trans}|}{|S_{in}|} = \frac{\kappa}{k}\cdot\frac{|C|^2}{|A|^2} = \frac{\kappa}{k}\cdot\frac{4}{\left(1+\frac{\kappa}{k}\right)^2} = \frac{4\cdot\sqrt{E}\sqrt{E+V_0}}{\left(\sqrt{E}+\sqrt{E+V_0}\right)^2}$$

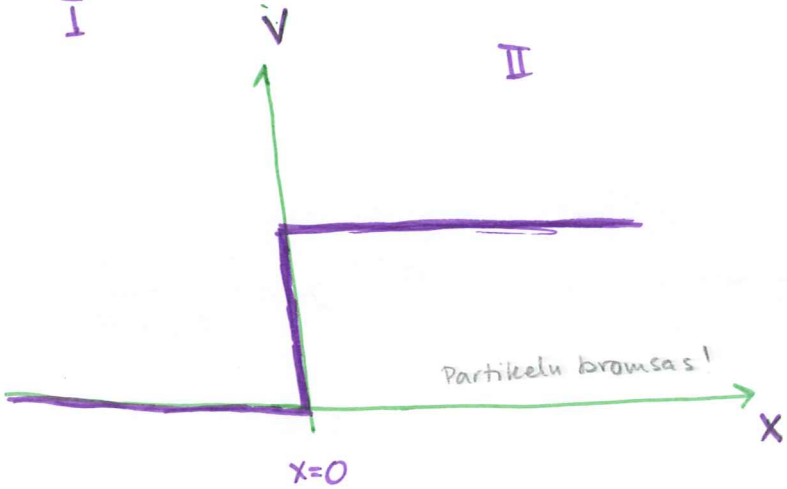


V_0 konstant.



E konstant.

In i barriären



$$V(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ V_0 & x>0 \end{cases}$$

SE i I: $\frac{-\hbar}{2m}\phi''(x) = E\phi$

$$\phi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

SE i II: $\frac{-\hbar}{2m}\phi''(x) + V_0\phi(x) = E\phi$

Omg

$$\phi''(x) = \frac{2m}{\hbar}\underbrace{(V_0-E)}_{\text{positivs } \kappa^2}\phi$$

$$\phi''(x) - \kappa^2\phi = 0$$

Ansats: $\phi = Ce^{\alpha x}$, $\alpha^2 = \kappa^2$

$\alpha = \pm\kappa$

Ingen oscilliatron

$$\phi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \\ C\cdot e^{-\kappa x} \end{cases}$$

i) $A + B = C$ Passa ϕ

ii) $ik(A-C) = \kappa C$ passa ϕ'

$$\boxed{\begin{aligned} A &= B - \frac{\kappa}{ik}C \\ A &= -B + C \end{aligned}}$$ lös systemet

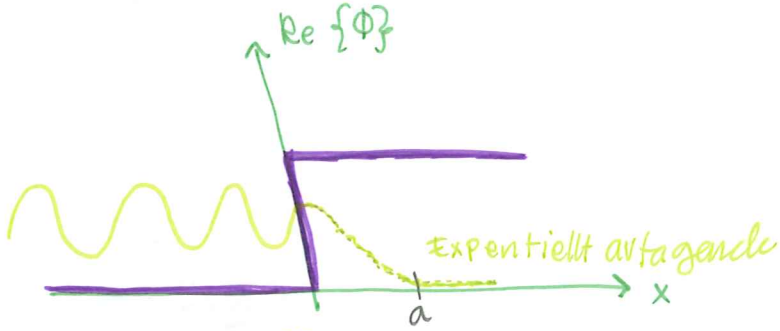
$\Longrightarrow$ Lösningen $\phi(x) = C\cdot e^{-\kappa x} + \underbrace{De^{\kappa x}}_{D=0}$

I område $I = |\Phi_{in}|^2 = |Ae^{ikx}|^2 = |A|^2$

Bara Φ_+

$$II = |\Phi_{II}|^2 = |C \cdot e^{-\kappa x}|^2$$

$$= |C|^2 \cdot e^{-2\kappa x}$$



$$P(x>0) = \int_0^\infty |\Phi_{II}|^2 dx = |C|^2 \int_0^\infty e^{-2\kappa x} dx$$

$$= |C|^2 \left[\frac{e^{-2\kappa x}}{-2\kappa} \right]_0^\infty = \frac{|C|^2}{2\kappa}$$

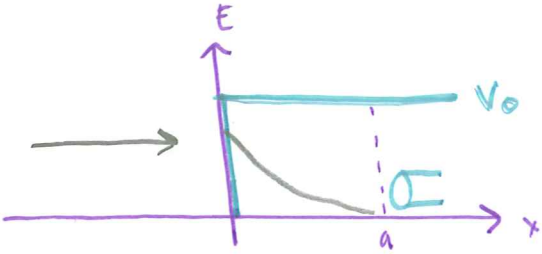
$$P(x>a) = \int_a^\infty |\Phi_{II}|^2 dx = \frac{|C|^2 e^{-2\kappa a}}{2\kappa}$$

$$\frac{P(x>a)}{P(x>0)} = e^{-2\kappa a}$$

Ju längre bort detektorn är, desto mindre är sannolikheten att partikeln fångas upp.

REP:

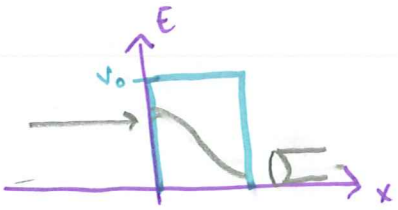
Potentialsprång



"barriär"

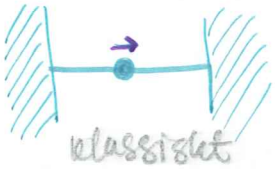
Vi sa att $\frac{P(x>a)}{P(x>0)} = e^{-2\kappa a}$

Idag

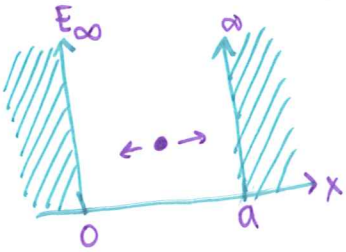


Detta ger oss tre områden, svårt att passa. Istället så inser vi att frekvensen "sparas" men amplituden minskar.

Bundna tillstånd



studsar elastiskt fram och tillbaka



de Broglie

$p \Rightarrow \lambda$

Relationen mellan Våglängden och hur stort systemet är bestämmer om vi ska räkna kvantmekaniskt

$$V(x): \begin{cases} \infty & x<0 \\ 0 & 0 \leq x \leq a \\ \infty & a<x \end{cases}$$

i brunnen:

$$\phi'' = -\frac{2mE}{\hbar^2}\phi = -k^2\phi$$

Lösningar fås som $\phi(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ A\sin(kx) + B\cos(kx) & 0\le x\le a \\ 0 & x>a \end{cases}$

Passningen:

$x=0$

$$0 = A\underbrace{\sin(k\cdot 0)}_{1} + B\underbrace{\cos(k\cdot 0)}_{0} \Rightarrow B=0$$

$x = a$

$0 = A\sin(k\cdot a)$ $\quad$ $A=0$, ej meningsfullt...

$A \neq 0$

$\sin(k\,a) = 0 \Rightarrow \underset{\text{Energin}}{ka} = n\cdot\pi$ $\quad$ Detta säger att energin måste vara kvantiserad

Vågtalet kan endast anta diskreta värden

$$\frac{n\cdot\pi}{a} = k_n, \quad E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}\cdot n^2$$

kvanttal

Motsvarande vågfunktioner:

$$\phi_n(x) = A\sin\left(n\frac{\pi}{a}x\right)$$

Sannolikheten att hitta partikeln i brunnen = 1 (normerad)

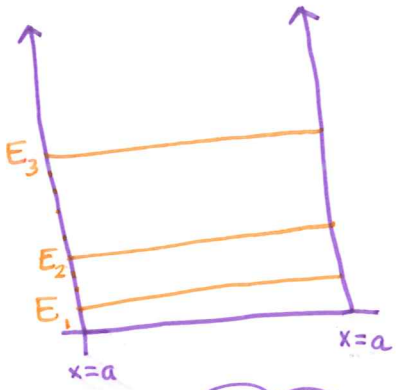
$$\int_0^a |\phi_n(x)|^2\,dx = 1 = \int_0^a |A|^2\sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx$$

$$= |A|^2\int_0^a\left(\frac{1}{2i}\left(e^{in\frac{\pi}{a}x} - e^{-in\frac{\pi}{a}x}\right)\right)^2 dx = \underset{\text{Gör hemma}}{\ldots} = \frac{|A|^2\cdot a}{2}$$

$$\Rightarrow |A| = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

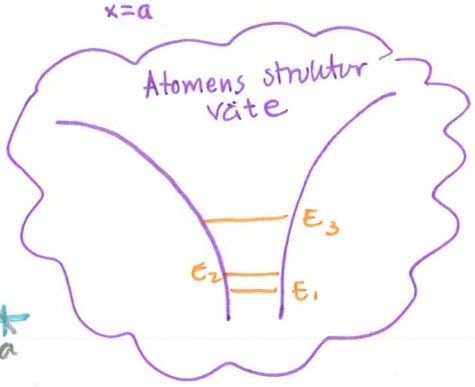
$$E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$$ $n = 1$, Grundtillstånd

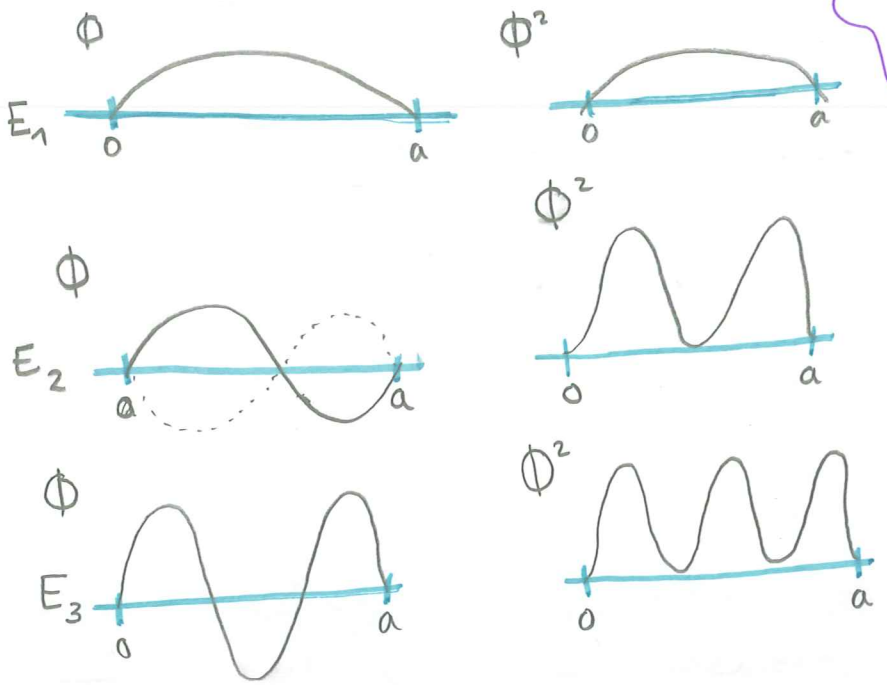
$$E_2 = 4E_1$$
$$E_3 = 9E_1$$ Exciterade tillstånd



Sannolikhets-tätheten:

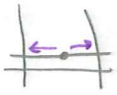
$$\rho_n(x,t) = |\Psi(x,t)|^2 = |\Phi_n(x)|^2$$





$$a = \sqrt{\frac{\hbar^2 \cdot \pi^2}{2mE}}$$

Potentialen är symmetrisk kring mitten (?) $a/2$



– Paritet $\Rightarrow$ Sannolikheten är symmetrisk

$V(x)$ symmetrisk $\Rightarrow$ $\rho(x)$ symmetrisk

$\Rightarrow \Phi$ udda eller jämn mot spegling i punkten $a/2$

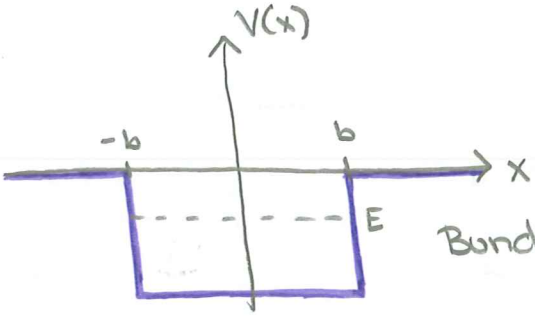
Om vi halverar brunnens bredd

$\Rightarrow \quad E = 4\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$ – energin större!!

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m_e a^2} n^2 = 0{,}4\, n^2 \text{ eV}$$

För en e^- i en ∞ brunn med $a = 1$ nm

Ändlig kvantbrunn



Bundet tillstånd

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x > b \\ -V_0 & |x| \leq b \end{cases}$$

SE: utanför brunnen

$$-\frac{\hbar}{2m}\phi'' = E\phi$$

$$\phi'' = \underbrace{-\frac{2mE}{\hbar^2}}_{K^2}\phi \qquad \boxed{E<0}$$

K^2 ← positivt

Ansats: $\phi = Ae^{\alpha x}$

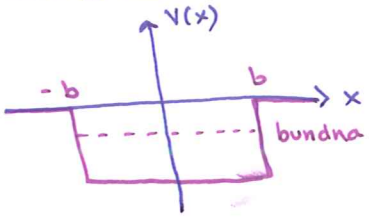
$\alpha^2 = K^2\phi$

$\alpha = \pm K$

$\phi(x) = Ce^{-Kx} + De^{Kx}$

$$\phi(x) = \begin{cases} Ce^{-Kx} & x > b \text{ dvs} \to \infty \\ De^{Kx} & x < -b \text{ dvs} \to -\infty \end{cases}$$

Ändlig kvantbrunn



bundna tillstånd i kvantbrunnen

$E<0$

$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| > b \\ -V_0 & |x| \leq b \end{cases}$$

SE utanför brunnen:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\phi'' + 0\cdot\phi = E\phi$$

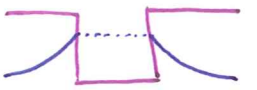
$$\phi'' = \underbrace{-\frac{2mE}{\hbar^2}}_{k^2,\ k>0 \text{ då } E<0}\phi$$

Udda o jämn funktion

$$\phi'' = k^2\phi$$

ansats: $\phi = Ae^{\alpha x}$

$\alpha = \pm k$



$$\phi(x) = C\cdot e^{-kx} + De^{+kx}$$

Måste begränsas olika för $\pm\infty$

$$\Rightarrow \phi(x) = \begin{cases} C\cdot e^{-kx} & x>b \\ D\cdot e^{kx} & x<-b \end{cases}$$

SE innanför brunnen:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\phi'' - V_0\phi = E\phi$$

$$\phi'' = \underbrace{-\frac{2m}{\hbar^2}(V_0+E)}_{k^2,\ k>0}\phi$$

$$\phi'' = -k^2\phi$$

$$\phi = Ae^{\alpha x}$$

$$\Rightarrow \phi = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

PARITET

i en jämn potential $V(-x) = V(x)$ är lösningarna alltid

udda $\phi(-x) = -\phi(x)$

eller jämna $\phi(-x) = \phi(x)$

För en jämn lösning

$$\phi(x) = \phi(-x) \Rightarrow \left.\begin{matrix} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} = \\ Ae^{-ikx} + Be^{ikx} \end{matrix}\right\} A=B$$

$$\phi(x) \overset{A=B}{=} A(e^{ikx} + e^{-ikx}) = \underbrace{2A\tfrac{1}{2}(\quad)}_{C_1\ \cos(kx)} \Rightarrow \phi(x) = C_1\cos(kx)$$

För en udda lösning

$$\phi(-x) = -\phi(x) \Rightarrow Ae^{ikx} + Be^{-ikx} = -(Ae^{-ikx} + Be^{ikx})$$

$$-A = B$$

$$\phi(x) = A(e^{ikx} - e^{-ikx}) = \underbrace{A\,2i}_{C_2}\ \underbrace{\frac{1}{2i}(\ )}_{\sin(kx)}$$

$$\phi = C_2 \sin(kx)$$

KOM IHÅG – utanför hade vi

$$\phi(x) = \begin{cases} Ce^{-Kx} & x > b \\ De^{Kx} & x < -b \end{cases}$$

För jämna lösningar måste $\phi(x)$ utanför brunnarna vara jämna, $C = D = a_1$ för $\phi(-x) = \phi(x)$

För udda lösningar $C = a_2$, $D = -a_2$ för $\phi(-x) = -\phi(x)$

Låt oss samla alla lösningar

Jämna

$$\phi = \begin{cases} a_1 e^{Kx} & x < -b \\ C_1 \cos(kx) & |x| \le b \\ a_1 e^{-Kx} & x > b \end{cases}$$

litet k

Udda

$$\phi = \begin{cases} a_2 e^{Kx} & x < -b \\ C_2 \sin(kx) & |x| \le b \\ -a_2 e^{-Kx} & x > b \end{cases}$$

Passnings villkoren är olika för jämna och udda lösningar och studeras var för sig

Jämna: ϕ kontinuerlig i b

$$C_1 \cos(kb) = a_1 e^{-Kb} \quad (1)$$

ϕ' kontinuerlig i b

$$-kC_1 \sin(kb) = -K a_1 e^{-Kb} \quad (2)$$

$$\frac{(2)}{(1)} = k\tan(kb) = K$$

$$\tan(kb) = \frac{K}{k}$$

$$\tan\left(\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0+E)}\cdot b\right) = \frac{\sqrt{-E}}{\sqrt{V_0+E}}$$

Udda $= \sqrt{\frac{E+V_0}{(-E)}}$

"Extra"

Vågfunktion för
Två identiska partiklar!

$$\Psi(\bar{r}_1, \bar{r}_2) = \underbrace{\Psi(1,2) = \Psi(2,1)}_{\text{beskriver samma tillstånd}}$$

Permutation av partiklar

$$\rho(2,1) = \rho(1,2) = |\Psi(1,2)|^2 = |\Psi(2,1)|^2$$

2 möjligheter vid permutation

$\Psi(1,2) = \Psi(2,1)$ eller $\Psi(1,2) = -\Psi(2,1)$

Symmetrisk
+
Bosoner foton, Higgs
W, Z

antisymmetriskt
−
Fermioner e^-, e^+, n, p

SPIN - STATISTISKT TEOREM

2 fermioner = 1 boson

Fermioner har antisymmetriskt Ψ ALLTID

har en
inre frihetsgrad

$S_z = \frac{1}{2}\hbar$ (K)

↑ Spinn upp $+\frac{1}{2}\hbar$

↓ Spinn ned $-\frac{1}{2}\hbar$

enklast beskriret som en extra frihetsgrad

Bosoner har symmetriskt Ψ ALLTID

Inre frihetsgrad
heltaligt spinn

$S = 0$

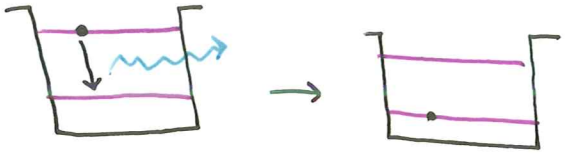
$S = 1, 2 \ldots$

Direkt konsekvens

PAULI-PRINCIPEN

Två fermioner kan inte ha alla sina kvanttal identiska.

Ljusutsändning



Spontan emission

Absorption

Hoppar ned igen

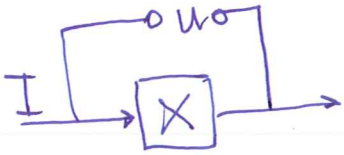
Stimulerad emission

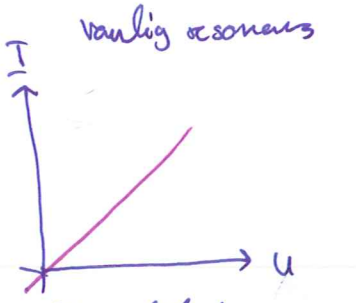
Fält, Potentialer mm i vakuum...
och halvledare och metaller.

På nanoskalan gäller ej ohms lag.

Laboration 1

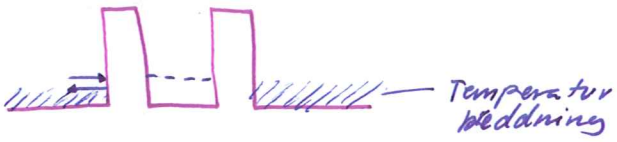
Resonant tunneling



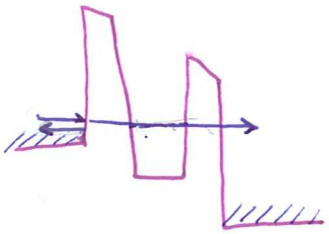


Men det kommer vi inte få! :(

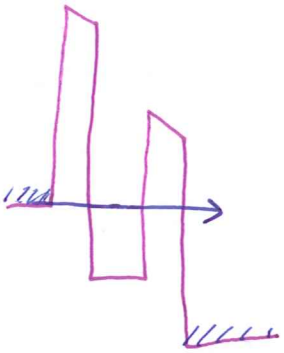
A



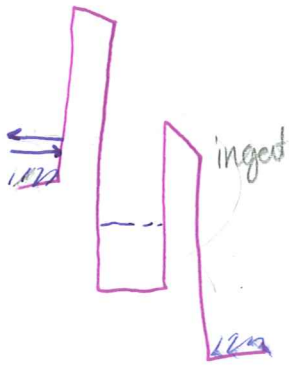
B



C

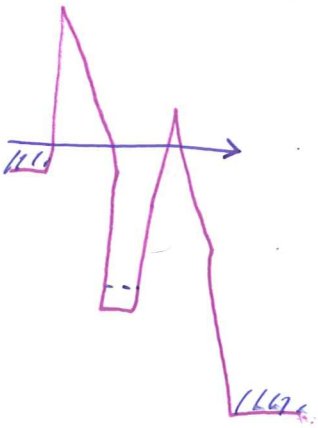


D



Ser stor barriär

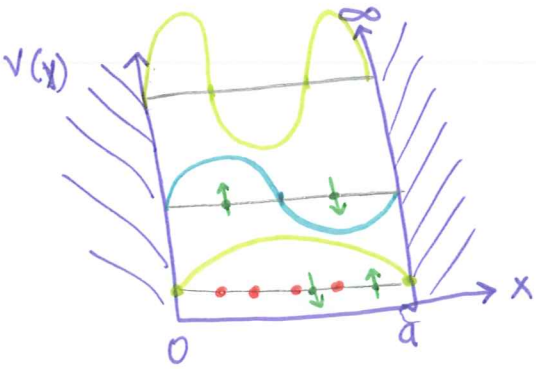
E



Sista innan kontrollen

	Fermioner	Bosoner
	$\Psi(2,1) = -\Psi(1,2)$	
	antisymmetriskt	symmetriskt
Spinn	$\frac{1}{2}\hbar$	$1\hbar$

Pauliprincipen: fermioner kan inte ha samma kvanttal



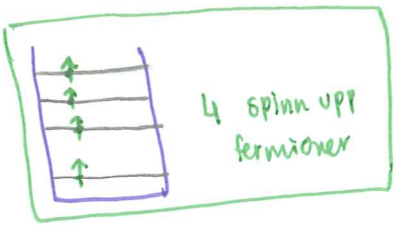
E_n

$\psi(a) = 0$

$|\psi(x)|^2 = \rho$ (sannolikhets fördelningen)

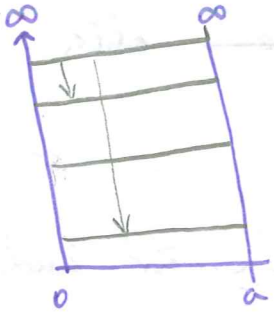
4 fermioner ●
4 bosoner ●

Hur de placerar sig ♡



URVALSREGLER

Vilka övergångar är tillåtna



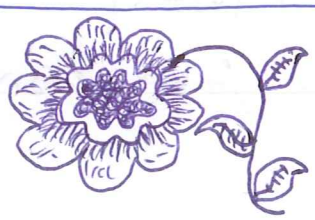
"Dipolövergångar"

Jämn får inte hoppa till jämn

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \phi^*_{slut} \cdot \hat{x} \cdot \phi_{initial}\, dx}_{\text{jämn} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \neq 0}$$

"Dipoloperator"

Sammanfattning ☆



- Planck – kvantiserade energier
- Fotoelektrisk effekt – kvatiserigarna sägs
  - utträdes arbete olika för olika metaller

$\boxed{h = 6.626 \cdot 10^{-34}\ Js}$

- Kvantiserad strålning – fotoner – partiklar inte bara som en våg. Tester med spalter
- De Broglie $\boxed{\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}}$
- Heisenberg's obestämdhetsrelation rörelsemängd – plats.
- Kvantmekanik bygger på postulat. inte bevis
- veta vad som är Hamilton operatorn
- kolla olika fall som en våg rör sig vid potentialsprång
- Passningsvillkor!
- Tunneleffekten