David Wessman, Lund, 30 oktober 2014
Statistisk Termodynamik - Kapitel 7

Sammanfattning av Gunnar Ohléns bok *Statistisk Termodynamik*.

1 Elektromagnetisk strålning

Strålning som träffar en kropp kan **absorberas**, **reflekteras** eller **emitteras**. Här antar vi att kroppar inte är transparenta $\Rightarrow$ ingen transmission sker.

1.1 Definition av svart kropp

En svart kropp ***absorberar*** *all strålning som träffar kroppen.*

Vid jämvikt så strålar en svart kropp ut lika mycket energi som den mottar från omgivningen. Den utstrålade effekten ges av **Stefan-Boltzmanns lag** (T^4-lagen, A är kroppens area, $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2K^4}$:

$$P = A\sigma T^4$$

1.2 Plancks strålningslag

För att få ett samband mellan **temperatur** och **utstrålad effekt** så studera strålning inne i ett hålrum.

M.h.a. ett resonemang kring andra huvudsatsen så varierar inte strålningsfältet på formen av hålrummet - så länge väggarnas temperatur är samma.

Fotoner är **masslösa**, växelverkar **inte** med varandra, har två **polarisationstillstånd**, $E = hf$, inte oförstörbara - de både **skapas** och **förstörs** och till sist så är fotoner inte glada för att följa **Pauliprincipen**(de skippar den).

I ett kubiskt rätblock med speglande insidor är endast fotontillstånd som är **stående vågor med noder på väggarna** tillåtna. Med kantlängden L kan våglängden då anta värden där $\lambda = \frac{2L}{n}$.
I en dimension får vi $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda} = \frac{hcn}{2L}$, i tre dimensioner blir det:

$$\epsilon_{\bar{n}} = \frac{hc}{2L}\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

För att beräkna **tillståndssumman** i varje enskilt energitillstånd måste man tänka på att fotonerna inte följer Pauliprincipen - det kan vara obegränsat många fotoner i varje tillstånd, de växelverkar inte - den totala energin i ett visst tillstånd blir produkten av antalet fotoner i tillståndet gånger tillståndets energi. Därmed kan vi ställa upp **tillståndssumman**:

$$E(r) = r\epsilon_{\bar{n}}$$

$$Z = \sum_{r=0}^{\infty} e^{-r\epsilon_{\bar{n}}\beta} = \sum_{r=0}^{\infty} \left(e^{-\epsilon_{\bar{n}}\beta}\right)^r = \frac{1}{1 - e^{-\epsilon_{\bar{n}}\beta}} = Z(\beta)$$

Där **r** är antalet fotoner i tillståndet vid energin **E**. I sista steget utnyttjas att serien blir en geometrisk serie.

Det termiska medelvärdet av fotonenergin i betraktat tillstånd ges av:

$$E_{medel} = -\frac{1}{Z}\frac{\delta Z}{\delta B} = -(1 - e^{-\epsilon_{\bar{n}}}) \cdot \frac{(-1)\left(-e^{-\epsilon_{\bar{n}}}\right)(\varepsilon_{\bar{n}})}{(1 - e^{-\epsilon\beta})^2} = \frac{\varepsilon_{\bar{n}}}{e^{\epsilon_{\bar{n}}\beta} - 1}$$

Den totala energin ges då av:

$$U = 2\sum_{\bar{n}} \epsilon_{\bar{n}} \frac{1}{e^{\epsilon_{\bar{n}}-1}} = 2\sum_{n_1}^{\infty}\sum_{n_2}^{\infty}\sum_{n_3}^{\infty} \frac{hc\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}{2L} \frac{1}{e^{\frac{hcn\beta}{2L}} - 1}$$

Där faktor 2 kommer från att fotonerna har två polarisationstillstånd i varje nod. Genom att approximera summorna med integraler och med $n = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$ får vi:

$$\begin{aligned}
U &= 2 \iiint\limits_{\substack{0<n_1<\infty \\ 0<n_2<\infty \\ 0<n_3<\infty}} \frac{hcn}{2L} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hcn}{2LkT}} - 1} dn_1 dn_2 dn_3 \\
&= \int_0^\infty dn \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \cdot n^2 sin(\theta) \frac{hcm}{2L} \frac{1}{e^{\frac{hcn}{2LkT}} - 1} \\
&= \int_0^\infty dn \frac{\pi hcn^3}{4L} \frac{1}{e^{\frac{hcn}{2LkT}} - 1} \\
&= V \int_0^\infty \frac{8\pi}{h^3c^3} \frac{\varepsilon^3}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1} d\varepsilon \\
u(\varepsilon)d\varepsilon &= \frac{8\pi}{h^3c^3} \frac{\varepsilon^3}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1} d\varepsilon
\end{aligned}$$

Först byter vi till **sfäriska koordinater** enligt flerdim, sedan blir $\int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{\pi}{2}$ och $\int_0^{\pi/2} sin(\theta)d\theta = 1$.
Genom att byta **integrationsvariabel** till fotonenergin: $\varepsilon = \frac{hcn}{2L}$ samt att utnyttjar att $V = L^3$ som är lådans volym.
Det slutgiltiga uttrycket beskriver **energitätheten** i gasen - alltså att per **volymsenhet** så finns totalt **energin**$u(\varepsilon)d\varepsilon$ hos de fotoner som har energi mellan ε och $\varepsilon + d\varepsilon$.

Detta är **Plancks strålningslag**.

1.3 Temperaturberoendet av fotongasens energi

Utifrån:

$$U = V \int_0^\infty \frac{8\pi}{h^3c^3} \frac{\varepsilon^3}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1} d\varepsilon$$

Med variabelbytet $x = \dfrac{\varepsilon}{kT}$:

$$U = V \frac{8\pi(kT)^4}{h^3c^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} d\varepsilon = V \frac{8\pi(kT)^4}{h^3c^3} \cdot \frac{\pi^4}{15} = V \frac{8\pi^5(kT)^4}{15h^3c^3}$$

Detta beskriver det **strålningsfält** som finns inuti ett hålrum.

1.4 Approximering av en svartkropp

Med ovan vunna kunskaper tillämpar vi strålningsfältet inuti en låda som har ett litet hål. Eftersom att alla fotoner som träffar hålet kommer in i lådan, absorberas, så fungerar håret som en svartkropp.

För att beräkna intensiteten resonerar vi som så att alla de fotoner som kommer ut ur hålet, de måste ha befunnit sig i en halvsfäriskt skal runt hålet en kort tid innan. För att ta reda på den totala energin i området så måste vi veta hur står volymen är. Om vi tittar mot hålet så säger vi att längs den horisontella axeln så går $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, alltså från mitten ut till ena sidan. För att få med varje del av hela sfären låter vi också halvsfären vid varje vinkel θ roteras hela varvet runt den axeln som går rakt in (om vi tittar mot hålet) genom att låta $0 < \varphi < 2\pi$. Tjockleken på området som bestäms av vinklarna sätts som ljusets hastighet gånger en kort tid, $c \cdot dt$.

Detta gör att volymen på området vi studerar, då radien är R, blir:

$$Rd\theta \cdot Rsin(\theta)d\theta d\varphi \cdot cdt$$
$$U_{tot} = \frac{U}{V} \cdot Rd\theta \cdot Rsin(\theta)d\theta d\varphi \cdot cdt$$

Då kan vi räkna ut hur mycket energi som totalt finns i varje litet område närmast hålet inne i lådan. Men strålningen rör sig på alla håll och det är långt ifrån alla som träffar hålet. För att ta reda på sannolikheten att de faktiskt träffar rätt måste vi fundera på vad fotonerna *ser* när de tittar på hålet.

Ritar man upp trigonometrin så får man en triangel där *längden* på hålet är hypotenusan och vinkeln till den katet som är vinkelrät mot området blir θ. Alltså är den area som faktiskt syns av fotonerna $A \cdot cos(\theta)$, där A är hålets area.

För att räkna med vilka som faktiskt träffar helt rätt måste vi då ta den skenbara arean och dela den med arean av en sfär med radien R.

$$P_{flykt} = \frac{A \cdot cos(\theta)}{4\pi R^2}$$

Genom att sätta ihop sannolikheten för flykt med volymen av våra indelade områden kan vi få ett uttryck för energiströmmen. Men för att räkna med all energi närmast hålet i lådan måste vi integrera över vinklarna också:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} Rd\varphi \int_0^{\pi/2} Rd\theta \cdot \frac{A \cdot cos(\theta)}{4\pi R^2} \cdot \frac{U}{V} \cdot cdt \cdot sin(\theta) \\
&= 2\pi \cdot \frac{A}{4\pi} \cdot \frac{U}{V} cdt \int_0^{\pi/2} cos(\theta) sin(\theta) d\theta = \frac{A}{4} \cdot \frac{U}{V} \cdot cdt \\
&= A \cdot dt \cdot \frac{c}{4} \cdot \frac{8\pi^5 (kT)^4}{15 h^3 c^3} \\
&= A \cdot dt \cdot \sigma T^4
\end{aligned}$$

I står här för den totala energiströmmen igenom hålet. Genom att dividera med Arean och dt så får vi uttrycket i **effekt per areaenhet**:

$$\frac{P}{A} = \sigma T^4$$

1.5 Wiens strålningslag

Anger den våglängd vid vilken svartkroppsstrålningen har sitt maximum. Förskjuts mot kortare våglängder när temperaturen ökar:

$$\lambda_{max} = \frac{2.898 \cdot 10^{-3} m \cdot K}{T}$$

1.6 Spektralfördelning

$$\begin{aligned}
I(\varepsilon, T) &= C \frac{\varepsilon^3}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1} \\
I(\lambda, T) &= D \cdot \frac{1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}
\end{aligned}$$