**Sats 10.1**

Givet att faltningen existerar så gäller:

$$f * g = g * f$$

$$f * (g + h) = f * g + f * h$$

$$f * (g * h) = (f * g) * h$$

$$T_a(f * g) = (T_a f) * g = f * (T_a g)$$

$$\frac{d}{dt}(f * g) = \frac{df}{dt} * g + f * \frac{df}{dt}$$

**Bevis av första räknelagen:**

$$\mathbf{f} * \mathbf{g} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau = [t - \tau = x] = \int\limits_{\infty}^{-\infty} g(t-x)f(x)(-dx) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \mathbf{g} * \mathbf{f}$$

**Bevis av tredje räknelagen:**

$$\mathbf{f} * (\mathbf{g} * \mathbf{h}) = (f * g) * h = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)[g * h](\tau)d\tau =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\tau-\sigma)h(\sigma)d\sigma d\tau =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\sigma)( \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)g(\tau-\sigma)d\tau)d\sigma = [x = \tau - \sigma] =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t-\sigma-x)g(x)dxd\sigma =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\sigma)[f * g](t-\sigma)d\sigma = (\mathbf{f} * \mathbf{g}) * \mathbf{h}$$

**En följd av sats 10.1:**

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau = [t - \tau = x] = \int_{\infty}^{-\infty} f(x)g(t-x)(-1)dx = g * f$$

**Definition av absolut integrerbarhet**

$f \in L_1$ kallas *absolut integrerbar* om $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)|d\tau$ är konvergent.

Alla funktioner kan inte faltas. För att funktionen ska kunna faltas så måste följande kriterier uppfyllas:

$f \in L_1$ och $g \in L_1 \Rightarrow (f * g) \in L_1$.

$f \in L_1$ och $g$ är begreänsad $\Rightarrow (f * g)$ är begränsad.

$f$ är kausal och $g$ är kausal $\Rightarrow (f * g)$ är kausal.

$T_a$ kallas *translationsoperatorn* och fungerar på följande sätt:

$$T_a(f(t)) = f(t-a)$$

**Exempel 1**

$$(\theta * \theta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t-\tau)\theta(\tau)d\tau = \int_{0}^{\infty} \theta(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{t} 1d\tau = t\theta(t)$$

Förr eller senare måste man räkna någon integral, men förenkla integralerna så mycket som möjligt först, man vet att $\theta(\tau) = 0$ för $\theta < 0$ så man kan skriva integralen från noll till oändligheten. Vi vet också att

$$\theta(t-\tau) = \begin{cases} 0 \quad \text{om} \quad t < 0 \\ \int\limits_0^t 1d\tau = t \quad \text{om} \quad t > 0 \end{cases}$$

**Notera:** $f, g$ är kausala $\Longrightarrow f * g = \theta(t) \int\limits_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$, alltså samma mönster som i exempel 1!

**Exempel 2**

Vi har två stycken rektangelpulser:

$$\begin{cases} f(t) = \theta(t) - \theta(t-1) \\ g(t) = \theta(t-1) - \theta(t-3) \end{cases}$$

**Faltningen** kan beräknas direkt med definitionen *eller* via förskjutningsregeln:

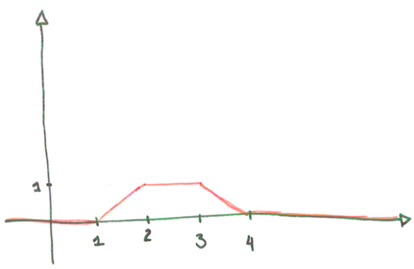
$$\begin{cases} f = (1 - T_1)\theta(t) = \theta(t) - T_1\theta(t) \\ g = (T_1 - T_3)\theta(t) = T_1\theta(t) = T_1\theta(t) - T_3\theta(t) \end{cases}$$

$$(\theta - T_1\theta) * (T_1\theta - T_3\theta) =$$

$$= \theta * T_1\theta - \theta * T_3\theta - (T_1\theta) * (T_1\theta) + (T_1\theta) * (T_3\theta) =$$

$$= (T_1 - T_2 - T_3 + T_4)(\theta * \theta) =$$

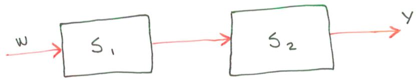
$$= (t-1)\theta(t-1) - (t-2)\theta(t-2) - (t-3)\theta(t-3) + (t-4)\theta(t-4)$$




Nu räknade han övningsuppgift 10.8, se övningsuppgifter *Kapitel 10*.

**Sats 10.4** (s. 193)

$\mathbf{S_1}$ och $\mathbf{S_2}$ är linjära och tidsinvarianta system med impulssvar $h_1$ respektive $h_2$. Sammansättningen $\mathbf{S} = \mathbf{S_2} \circ \mathbf{S_1}$ har impulssvar $h = h - 2 * h_1$




**Bevis:**

Givet att sammansättningsregeln håller (t.ex. för kausala system):

$$\mathbf{S}\omega = \mathbf{S_2}(\mathbf{S_1}\omega) = \mathbf{S_2}(h_1 * \omega) = h_2 * (h_1 * \omega) = (h_2 * h_1) * \omega$$

**Definition av stegsvar**

Stegsvaret definieras som svaret ett system ger då insignalen är $\theta(t)$

$$(S\theta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\theta(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t-\tau)h(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau$$

**Sats 10.5**

$$\frac{d\mathbf{S}\theta}{dt} = h(t)$$

Nu gör han uppgift 10.15, se övningsuppgifter Kapitel 10.