Tidsinvarianta system har svaret $h(t)$, dvs k(t,s) beror endast av $t - s$, alltså beror det på en variabel.

Sats: **S** är linjär och tidsinvariant, $h(t)$ impulssvar

$$\mathbf{S} \text{ är insignal-utsignalstabilt} \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt \ \textbf{konvergent}$$

Bevis

$\Leftarrow$ Om integralen är konvergent, skall bevisas att då $\omega(t)$ är begränsad så är även $y(t)$ begränsad.

$$\begin{aligned}
|y(t)| &\leq |\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\omega(\tau)d\tau| \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(t-\tau)\omega(\tau)|\,|d\tau| \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(t-\tau)|\,|\omega(\tau)|\,|d\tau| \\
&\leq c \int_{-\infty}^{\infty} |h(t-\tau)|\,|d\tau| \\
&\leq c \int_{\infty}^{-\infty} |h(s)|\,(-ds) \\
&= c \int_{-\infty}^{\infty} |h(s)|\,ds
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$: $|y(t)|$ är bergänsad även för specialfallet:

$$\omega(t) = \begin{cases} 1 \text{ om } h(-t) > 0 \\ \\ -1 \text{ om } h(-t) < 0 \end{cases}$$

$$|y(0)| = |\int\limits_{\infty}^{-\infty} h(-\tau)\omega(\tau)\, d\tau|$$

$$= \int\limits_{\infty}^{-\infty} |h(-\tau)|\, d\tau \textbf{ konvergent}$$

1 Exempel

1.1 Exempel 1 - Filter

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} \theta(t)$$

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{RC} e^{-t/RC} dt = 1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(t) dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt$$

1.2 Exempel 2

$$S(\omega(x)) = y(t) = \frac{d\omega}{dt}$$

Är **INTE** insignal-utsignalstabil.

Det beror på att insignalen $\omega(t) = sin(t^2)$ är begränsad,

medan utsignalen $y(t) = 2tcos(t^2)$ ej är begränsad.

2 Kausalt system

Definition: Ett system kallas **kausalt** om

$$\omega_1(t) = \omega_2(t) \text{ för alla } t < a$$

då är svaret för första fallet:

$$y_1(t) = S(\omega_1(t)) = S(\omega_2(t)) = y_2(t)$$

för alla $t < a$.

Sats: **S** är linjärt och tidsinvariant

$$S \text{ kausalt} \Leftrightarrow h(t) \text{ är en kausal funktion.}$$

Alltså är $h(t) = 0$ för $t < 0$.

Bevis

$\Leftarrow$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\omega(\tau)d\tau$$

Antag att $\omega(\tau) = 0$ för $\tau < 0$. Om dessutom $h(t) = 0$ för $t < 0$.

$$y(t<0) = \int_{0}^{\infty} h(t-\tau)\omega(\tau)d\tau = 0$$

$\Rightarrow$ står in anteckningar.

För $D = 0$ är ett generellt linjärt tidskontinuerligt system är

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BW \\ Y = CX \end{cases}$$

Sats 9.3 ger oss att

$$\textbf{S är kausalt} \Rightarrow h(t) = Ce^{At}B\,\theta(t)$$

i så fall får vi en generell formel:

$$y(t) = C\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}BW(\tau)d\tau$$

Om insignalen är noll för $t < t_0$ så kan vi skriva:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} Ce^{A(t-\tau)}BW(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} Ce^{A(t-\tau)}B\theta(t-\tau)w(\tau)d\tau$$

3 Exempel 9.18

En harmonisk oscillator.

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{1}{m}w(t) \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = p \\ \dot{p} = -\frac{k}{m}x + \frac{1}{m}w(t) \end{cases}$$

Detta kan skriva som till:

$$\begin{bmatrix} x \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

$$h(t) = Ce^{At}B\theta(t)$$

Vi fortsätter med:

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}$$

$$A^0 = I \qquad A^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} \qquad A^2 = -\frac{k}{m}I$$

$$A^3 = -\frac{k}{m}A \qquad A^4 = \left(\frac{k}{m}\right)^2 I$$

Vi sammanfattar som:

$$A^{2n} = \left(-\frac{k}{m}\right)^n I \qquad A^{2n+1} = \left(-\frac{k}{m}\right)^n A$$

$$\begin{aligned} e^{At} &= \sum_{q=0}^{\infty} \frac{A^{2q} t^{2q}}{(2q)!} \qquad &+ \qquad \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^{2p+1} t^{2p+1}}{(2p+1)!} \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{k}{m}\right)^q t^{2q}}{(2q)!} I \qquad &+ \qquad \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{k}{m}\right)^p t^{2p+1}}{(2p+1)!} A \end{aligned}$$

MAX SKRIVER

$$e^{At} = \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) I + \sqrt{\frac{m}{k}} \sin\left(\frac{k}{m} t\right) A = \begin{bmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) & \sqrt{\frac{m}{k}} \sin\left(\frac{k}{m} t\right) \\ -\sqrt{\frac{m}{k}} \sin\left(\frac{k}{m} t\right) & \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) \end{bmatrix}$$

Detta ger os **impulssvaret** till:

$$h(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{At} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{w} \end{bmatrix} \theta(t) = \frac{1}{\sqrt{kn}} \sin\left(\sqrt{\frac{m}{k}} t\right) \theta(t)$$

Från h(t)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\omega(\tau) d\tau$$

$h \circledast w$ tidskontinuerlig

För tidsdiskreta $h(k)$

$$y(k) = \sum_{j=0}^{k} h(k-j)\omega(j)$$

$h \circledast w$ tidsdiskret

4 Faltning

4.1 Diskret faltning

$$z_k = (x \circledast y)_k = \sum_{j=0}^{k} x_{k-j} y_j, k \geq 0$$

För varje k måste en ny summa över j beräknas.

4.2 Kontinuerlig faltning

$$(f \circledast g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) g(\tau) d\tau$$