Samband insignal-utsignal

0.1 Lågpassfilter

$$y(t) = \int_t^{-\infty} \frac{1}{RC} e^{-\frac{t-\tau}{RC}} \omega(\tau) d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{RC} e^{-\frac{t-\tau}{RC}} \theta(t-\tau)\omega(\tau) d\tau$$

Gäller för Kausala system, där framtiden inte påverkar resultatet.

1 Diskreta fallet

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax_k + B\omega_k \\ y(k) = Cx_k + D\omega_k \end{cases} \rightarrow x(k) = A_k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} B\omega_j$$

1.1 Diskret enhetspuls

Normaliserad puls, kurvan får area 1.

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & \text{övriga k} \end{cases}$$

Var är systemets svar då insignalen är $\delta(k)$?

$$y(k) = CA^k x_0 + C\sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} B\omega_j + D\omega_k$$

Impulssvar

Svaret y(k) som fås då insignalen är δ och $x(0) = 0$.

$$h(k) = \begin{cases} D & k = 0 \\ CA^{k-1}B & k > 0 \end{cases}$$

Ger ett generellt svar för godtyckligt ω_k.

$$y(k) = \sum_{j=0}^{k} h(k-j)\omega_j$$

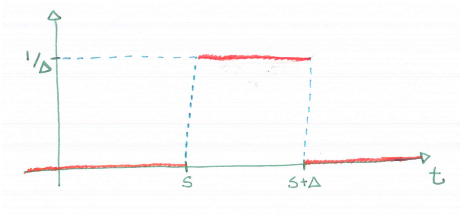
I alla situationer som jag har fantiserat om, då är D = 0.

Faltning mellan h och w definieras som:

$$h \circledast w = \sum_{j=0}^{k} h(k-j)\omega(j)$$

Heter convolution på engelska.

1.2 Rektangelpuls



$P_{\Delta}(t-s)$

1.3 Rektangelpulssvar

(Ett ännu längre ord är Rektangelpulssvarsberäknarkofta)

$K_{\Delta}(t,s)$

Vi behöver ett exempel för att beräkna ut den.

Impulssvar:

$$\lim_{\Delta \to 0^+} k_{delta}(t,s)$$

Ex.: lågpassfilter

$$k_\Delta(t,s) = \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{1}{RC} e^{-\frac{t-\tau}{RC}} p_\Delta(\tau,s)d\tau = \begin{cases} 0 & t < s \\ \int\limits_{s}^{t} \frac{1}{RC} e^{-\frac{t-s}{RC}} d\tau & s < t < s+\Delta \\ \int\limits_{s}^{s+\Delta} \frac{1}{RC\Delta} e^{-\frac{t-\tau}{RC}} d\tau & t > s+\Delta \end{cases}$$

$$\frac{e^{-t/RC}}{RC\Delta} \int\limits_{s}^{t} e^{\tau/RC} d\tau = \frac{e^{-t/RC}}{RC\Delta} \left[RCe^{\tau/RC}\right]_s^t = \frac{1}{\Delta}\left(1 - e^{-\frac{t-s}{RC}}\right)$$

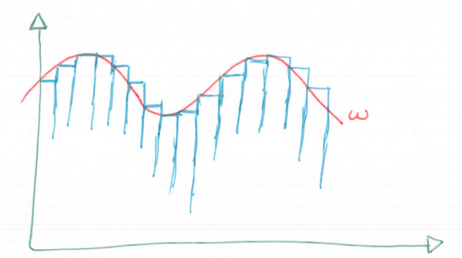
$$k(t,s) = \lim_{\Delta \to 0} k_\Delta(t,s) = \begin{cases} 0 & t < s \\ \frac{1}{RC} e^{-\frac{t-s}{RC}} & t > s \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{RC} e^{-\frac{t-s}{RC}} \theta(t-s) = k(t,s)$$

Gränsvärde - m.h.a serieutveckling

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{1 - e^{-\frac{\Delta}{RC}}}{\Delta} = \lim_{\Delta \to 0^+} \frac{1 - \left(1 - \frac{\Delta}{RC} + \Delta^2 B\right)}{\Delta}$$

Approximativ beräkning

Då man kan ta reda på ett impulssvar så kan man också beräkna systemets



svar på en insignal m.h.a.

$$S(\omega) \approx \sum_j \omega(j) k_{\Delta_j}(t,\tau_j)\Delta_j$$

2 Exempel

2.1 Exempel 1 - övning 9.8

$$k(t,\tau) = (t^2 - \tau^2)\theta(t-\tau)\text{Beräkna y(t) för} \begin{cases} a) & w(t = \theta(t) \\ b) & w(t) = \theta(t-1) \end{cases}$$

a)

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} (t^2 - \tau^2)\theta(t-\tau)\theta(\tau)d\tau = \\ &= \int_0^{\infty} (t^2 - \tau^2)\theta(t-\tau)1d\tau = \\ &= \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \int_0^t (t^2 - \tau^2)\cdot 1 \cdot 1d\tau & t > 0 \end{cases} \\ \int_0^t &(t^2 - \tau^2)d\tau = 2\frac{t^3}{3} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} (t^2 - \tau^2)\theta(t-\tau)\theta(\tau-1)d\tau = \\ &= \int_1^{\infty} (t^2 - \tau^2)\theta(t-\tau)d\tau = \\ &= \begin{cases} 0 & t < 1 \\ \int_1^t (t^2 - \tau^2)\cdot 1 \cdot 1d\tau & t > 0 \end{cases} \\ \int_1^t &(t^2 - \tau^2)\cdot 1 \cdot 1d\tau = \frac{1}{3}\left(2t^3 - 3t^2 + 1\right) \\ y(t) &= \frac{1}{3}\left(2t^3 - 3t^2 + 1\right)\theta(t-1) \end{aligned}$$

Systemet är alltså inte tidsinvariant!

3 Tidsinvarianta system

Systemet S är **tidsinvariant** om det för alla insignaler ω och alla tider a, gäller att:

$$y(t) = S(\omega(t)) \qquad \Leftrightarrow \qquad S(\omega(t-a)) = y(t-a)$$

Om systemet S är linjärt och tidsinvariant.

Impuls som insignal i tiden

$$\text{Impuls som insignal i tiden} s \to k(t,s)$$

$$\text{Impuls som insignal i tiden} 0 \to k(t,0)$$

Påstående:

för tidsinvarianta system är $k(t,s) \equiv k(t-s)$.

$$S(\omega(t)) = \int k(t,\tau)\omega(\tau)d\tau = \int K(t-\tau)\omega(\tau)d\tau$$

$$S(\omega(t-a)) = \int k(t,\tau)\omega(\tau-a)d\tau = \int K(t-a-(\tau-a)\omega(\tau-a)d\tau =$$

$$= [\tau - a = x] \int k(t-a-x)\omega(x)dx = S(\omega(t))$$

$$k(t,s) = h(t-s)$$

Då kan vi skriva om funktonen av två variabler till en funktion som beror på skillnaden mellan dem.