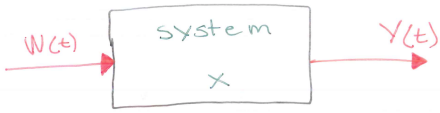
**Samband insignal-utsignal Det ingår i kursen att hitta kursens hemsida**, all information finns där!




$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B\omega(t) \\ y(t) = Cx(t) + D\omega(t) \end{cases}, x(0) = x_0$$

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + B\omega_k \\ y_k = Cx_k + D\omega_k \end{cases}, x(0) = x_0$$

$$x_k = A^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} B\omega_j, \qquad (k = 1, 2, 3...)$$

$$x_{k+1} = A^{k+1} x_0 + \sum_{j=0}^{k} A^{k-j} B\omega_j =$$

$$= AA^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j} B\omega_j + B\omega_k =$$

$$= AA^k x_0 + A\sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} B\omega_j + B\omega_k =$$

$$= A(A^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1} B\omega_j) + B\omega_k$$

**Om vi bara sätter in och räknar som formeln säger:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \omega_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x^k = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

**Detta är en matris som används genom hela kursen**, vi vet att egenvärdena

med tillhörande egenvektorer är:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 5; & S_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \lambda_2 = -1; & S_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow = 2\sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\sum_{j=0}^{k-1} 5^{k-1-j} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(5^k - 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} x_k - \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \end{bmatrix} 2^k \to x_k = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} \left[ - \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \end{bmatrix} 2^j \right]$$

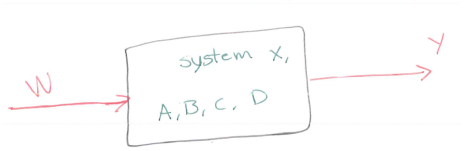
$$x(0) = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= 25^k \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 4(-1)^k \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \sum_{j=0}^{k-1} 2^j(-1) \left( 4 \cdot 5^{k-1-j} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 2(-1)^{k+j} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \left( \frac{2}{3}5^k + \frac{4}{3}2^k \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \left( \frac{10}{3}(-1)^k + \frac{2}{3}2^k \right) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

**Detta står inte i boken, bara i tilläggsmaterialet, typ. Kan hha hört fel också.**

# 1 Insignal- och utsignalsrelationer

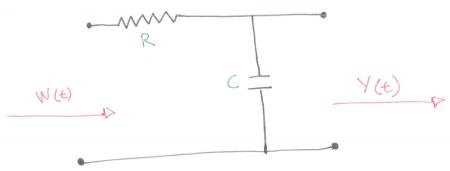



$$\sum_{k=0}^{N} r^k = 1 + r + r^2 + ... + r^N$$

$$r\sum_{k=0}^{N} r^k = r + r^2 + r^3 + ... + r^{N+1}$$

$$(r-1)\sum_{k=0}^{N} r^k = r^{N+1} - 1 \Rightarrow \qquad \boldsymbol{\sum_{k=0}^{N} r^k = \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r}}$$

*"Det här var nog också Gauss och han var väl ungefär åtta när han kom på det.."*




$$w(t) \to y(t) = (Sw)(t)$$

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{RC}y = \frac{1}{RC}w, y(t_0) = \textit{en känd vektor}$$

$$y(t) = e^{-(t-t_0/RC}y(0) + \frac{1}{RC}\int_{t_0}^{t} e^{\frac{t-\tau}{RC}} w(\tau)d\tau$$

Om man bortser från att *transienten* (övergående effekten) får vi:

$$y(t) = \frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t-\tau}{RC}} w(\tau)d\tau$$

## 2 Linjära system

**Linjära system**

Ett system $S$ kallas *linjärt* om för alla möjliga konstanter $c_1$ och $c_2$,

$S(c_1\omega_1(t) + c_2\omega_2(t)) = c_1S(\omega_1(t)) + c_2S(\omega_2(t)) = Y(t)$

för alla tillåtna insignaler $\omega_1(t), \omega_2(t)$

Till en viss gräns så fungerar linjäriteten utmärkt för vissa system, men sedan så spricker de. **Exempel**: Lägg i några få bakterier i en petriskål så fördubblas de snabbt. Lägger man in $10^{10}$ så kommer massor att fö av plats- och matbrist så systemet fungerar inte linjärt och antalet fördubblas inte lika fort som för några få bakterier. Det är skillnad på skrivbordsingenjör och verkstadsingenjör, se upp när du blir befodrad och glöm ej skillnaden! *Man måste skjuta upp kompetensnivån*

**Alternativ definition av linjärt system**

$$\begin{cases} S(\omega_1 + \omega_2) & = S(\omega_1) + S(\omega_2) \\ S(c\omega_1) & = cS(\omega_1) \end{cases}$$

Om $W(t) = 0$ och systemet är linjärt så är $Y(t) = S(\omega) = 0$.

## 2.1 Exempel 2

Om insignalen är:

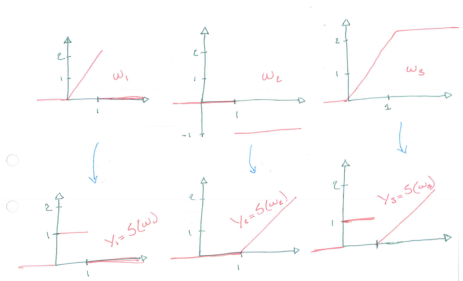
$$c_1\omega_1(t) + c_2\omega_2(t) \rightarrow$$

$$\rightarrow y(t) = \int_0^t \tau_2(c_1\omega_1(t) + c_2\omega_2(t))d\tau =$$

$$= c_1 \int_0^t \tau_2\omega_1(\tau)d\tau + c_2 \int_0^t \tau^2\omega_2(\tau)d\tau$$

Så ser vi att:

$$y(t) = c_1S(\omega_1) + c_2S(\omega_2)$$




$$\omega_3 = \omega_1 - 2\omega_2$$

Om S är linjärt så måste även:

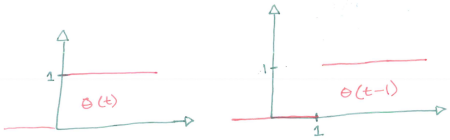
$$y_3 = y_1 - 2y_2$$

Från figurerna ser vi att detta **ej** är linjärt.

**Heavisides stegfunktion** $\theta$ (noll för negativa tider och ett för positiva tider)

$$\begin{cases} 0 & \text{om} \quad t < 0 \\ 1 & \text{om} \quad t > 0 \end{cases}$$

Där $t = 0$ har vi ett språng




Med heavisidesfunktioner kan man beskriva alla styckvis definierade funktioner. Vi bryr oss inte om värdet i språnget eftersom punkter inte påverkar integraler.

$$w_1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2t & 0 \leq t < 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$

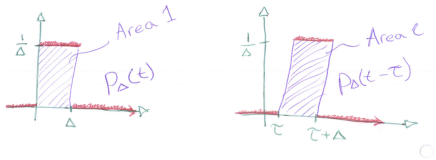
$$w_1(t) = 2t\left(\theta(t) - \theta(t-1)\right)$$

**Enhetspuls**

*Enhetspulsen* vid tiden 0 och bredden $\Delta$: $\mathbf{p_\Delta(t) = \frac{1}{\Delta}(\theta(t) - \theta(t - \Delta))}$

Integralen i exempel 1 kan skrivas:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{RC} e^{-(t-\tau)/RC} \omega(\tau)\theta(t-\tau)d\tau$$




*f(t)* kallas **kausal** om $f(t) = 0$ då $t < 0$.

$\theta(t)f(t)$ kallas den **kausala avskärningen** av $f$.

*Kaus* på latin betyder anledning, man vill ha ett kausalt system. TV:n ska inte sättas igång förrän man tryckt på knappen.