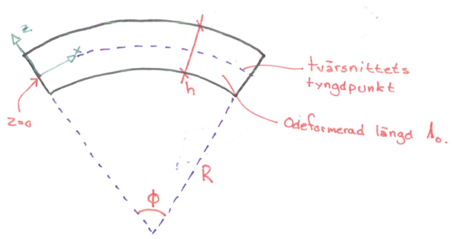
Böjning

Betrakta en böjd balk med längden l. Krökningsradien är R och balken upptar vinkeln θ enligt figuren. Balkens ovansida töjs och undersidan komprimeras. Den fiber som ej töjs kallas medellinjen. Här är $z = 0$ och $\epsilon = 0$. Avståndet från krökningscentrum är R. Den sträckta längden vid z är $l = (R+z)\theta$. Ursprunglig



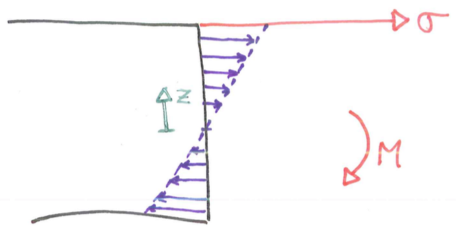
längd är över hela tvärsnittet $l_0 = R\theta$. Töjningen $\epsilon(t)$ ges av

$$\epsilon(t) = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{(R+z)\theta - R\theta}{R\theta} = \frac{z}{R}$$

Spänningen $\sigma_x(t)$ ges av

$$\sigma_x = \frac{zE}{R}$$

Antag att tvärsnittet har en bredd $b(z)$ och höjden h. Bidrag från segment med



höjden dz längs z-axeln, till momentet dM är

$$dM = \sigma_x z b(z) dz = \frac{E}{R} z^2 b(z) dz$$

Hela momentet är

$$M = \frac{E}{R} \int_h z^2 b(z) dz = \frac{E}{R} I_y$$

där $I_y = \int_h z^2 b(z) dz$ är tvärsnittets yttröghetsmoment runt y-axeln.

För ett rektangulärt tvärsnitt är

$$I = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 b dz = \frac{bh^3}{12}$$

Yttertröghetsmomentet för flera andra tvärsnitt hittar man i TEFYMA (formelsamlingen, finns att köpa på KFS och är typ halvbra, lite sämre än gröngölingsboken) eller liknande. Några konstruktionsbalkar tas upp i kursens formelsamling.

Spänningen i tvärsnittet ges av

$$\sigma_x(z) = \frac{E}{R} z = \frac{M}{I_y} z$$

Maximal spänning uppnås på största avstånd från medellinjen[1].

$$\sigma_{max} = \frac{M}{w_b}$$

där $w_b = \frac{I_y}{|z|_{max}}$ För ett *rektangulärt* tvärsnitt är

figur3

$$z_{max} = \frac{h}{2} \qquad \text{dvs} \qquad w_b = \frac{bh^2}{6}$$

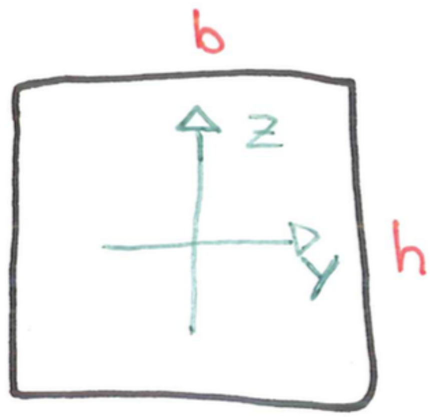
[1] Medellinjen bildas av tvärsnittets tyngdpunkter

Deformation

Betrakta ett segment med längden dx. Antag att krökningsradien är R enligt figuren. Balkens form ges av förskjutningen $w(x)$ i z-led. Balkens lutning $\Phi(x)$ ges av

$$\Phi(x) = \arctan(\frac{dw}{dx}) \approx \frac{dw}{dx}$$

figur4 Segmentet upptar vinkeln θ sett från balkens krökningscentrum- Figuren



ger att $\theta = \Phi(x) - \Phi(x + dx)$.

Vidare gäller att$\theta R = dx$ och därför är:

$$[\Phi(x) - \Phi(x + dx)]R = dx$$
$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{R} = \frac{\Phi(x) - \Phi(x + dx)}{dx} \rightarrow -\frac{d\Phi}{dx} = -\frac{d^2w}{dx^2} \text{ när } dx \rightarrow 0$$

Enligt tidigare är $\frac{1}{R} = \frac{M}{EI_y}$. Eliminering av R ger oss den *elastiska linjens ekvation.*

Den elastiska linjens ekvation

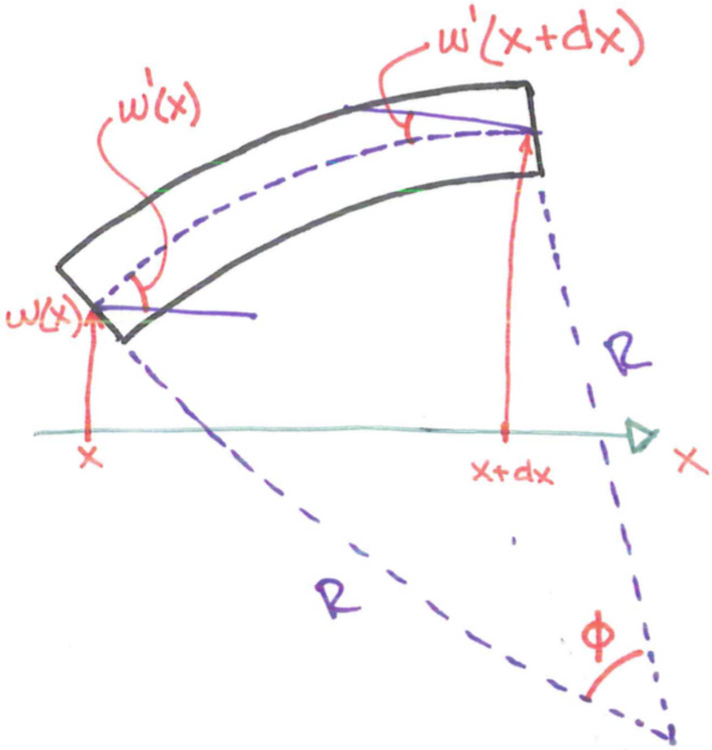
$$\frac{M}{EI} = -w''$$

Jämvikt:

Betrakta följande balk

figur5

Riktningar definierade så att q verkar i positiv z-led, T verkar; positiv z-led i



änden med normalen i positiv x-led. Momentet vrider i samma ände i positiv y-led.

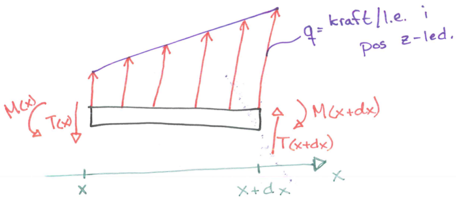
Alternativt: T tippar balken moturs och M välver balken uppåt. Gäller i båda ändar.

Kraftjämvikt ger

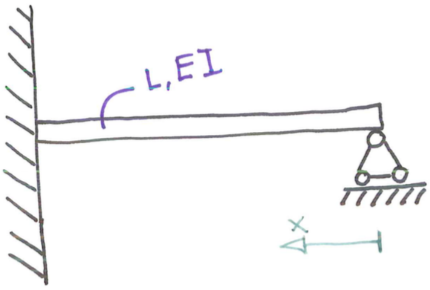
$$\begin{cases} \uparrow & T(x+dx) - T(x) + q(z+\xi dx) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{q = -\frac{dT}{dx}} \\ \curvearrowright x & M(x+dx) - M(x) - T(x)dx - \overbrace{\underbrace{q(x+\xi}_{\text{utbredd last}}\ dx)}^{\text{kraft}}\ \underbrace{\xi dx}_{\text{hävarm}} = 0 \\ dx \to 0 & \dfrac{M(x+dx) - M(x)}{dx} - T(x) = 0, \qquad T(x) = M'(x) \end{cases}$$

Exastiska linjens ekvation

$$q(x) = -\frac{dT}{dx} = -\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2w}{dx^2}\right)$$



Exempel: Konsolbalk



Balken är stilla i den högra änden men sitter inte fast, det ger oss **(1)** och **(2)** som då medför **(3)**.

I balkens vänstra infästning kan balken inte flyttas, därav **(4)** och då den inte kan vridas får vi **(5)**.

$$W(0) = 0 \tag{1}$$

$$M(0) = 0 \Rightarrow \tag{2}$$

$$\Rightarrow W''(0) = 0 \tag{3}$$

$$W(L) = 0 \tag{4}$$

$$W'(L) = 0 \tag{5}$$

Den utbredda lasten ovanpå balken blir:

$$q = k(x - L)$$

Enligt formelsamling gäller:

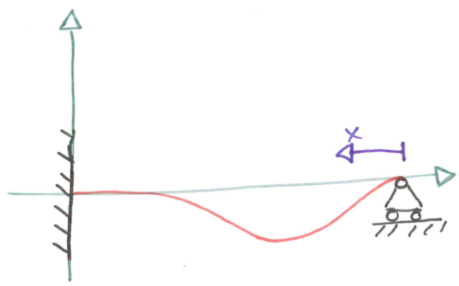
$$q = \frac{d^2}{dx^2} EI \frac{d^2 w}{dx^2}$$

då **q** är definierat i negativ z-led blir:

$$-k(L-x) = \frac{d^2}{dx}\left(EI\frac{d^2w}{dx^2}\right) = EI\frac{d^4w}{dx^4}$$
$$\frac{d^4w}{dx^4} = -\frac{k}{EI}(L-x)$$
$$\frac{d^3w}{dx^3} = -\frac{k}{EI}(L-x)^2\,\frac{1}{2} + A$$
$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{k}{EI}(L-x)^3\,\frac{1}{6} + Ax + B$$
$$\frac{dw}{dx} = -\frac{k}{EI}(L-x)^4\,\frac{1}{24} + A\frac{x^2}{2} + Bx + C$$
$$w = -\frac{k}{EI}(L-x)^5\,\frac{1}{120} + A\frac{x^3}{6} + B\frac{x^2}{2} + Cx + D$$

Wolfram Alpha ger då:

$$\begin{cases} W(0) = 0 \qquad W(0) = -\frac{kL^5}{120EI} + D \Rightarrow D\frac{kL^5}{120EI} \\ W''(0) = 0 \qquad W''(0) = -\frac{kL^3}{6EI} + B = 0 \Rightarrow B = \frac{kl^3}{6EI} \\ W'(L) = 0, W(L) = 0 \qquad \Rightarrow W(x) = \frac{kL^5}{120EI}\frac{x}{L}\left(\frac{x}{L}-1\right)^2\left(\frac{x}{L}+1\right)^2 \end{cases}$$



1 Kursens tre delar

Deformation $\Longrightarrow$ Töjningar $/epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}...$

Belastning $\Longrightarrow$ Spänning $\sigma_x, \sigma, y, \tau_{xy}$

Linjärt elastiskt material $\Longrightarrow$ Dragning

Viskoelastiska material $\Longrightarrow$ Dragning