# Föreläsning 5

## Exempel

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \dots = \frac{1}{2}$$

Konvergerar serien?

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \to \boxed{\frac{1}{2}} \text{ då } n \to \infty$$

Serien är alltså konvergent med summan $\frac{1}{2}$.

1. Bilda den ändliga summan $S_n$
2. Försök beräkna $S_n$
3. Undersök gränsvärdet $\lim_{n\to\infty}$ av $S_n$. Om det finns så kallas serien konvergent, annars divergent.

## DEFINITION

Serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots$ sägs vara konvergent med summan $S_n$ om

$S = \lim_{n\to\infty} S_n$ där $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_n$

## Exempel

Är serien $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$ konvergent?

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(k+1)+-k} = \boxed{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}$$

teleskopsumma!

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_n = \sqrt{n+1} - 0 \to \infty \quad \text{då} \quad n \to \infty$$

Serien divergen trots att $a_n \to 0$.

## Geometriska serier

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} ar^k = a\,\frac{r^{n+1}-1}{r-1} \quad \text{om} \quad r \neq 1.$$

Om $|r|<1$ så $r^n \to 0$ da $n \to \infty$

**SATS**

Låt $a \neq 0$. Den geometriska serien $\sum_{k=0}^{\infty} ar^k$

är konvergent med summa $S = \frac{a}{1-r}$ om $|r|<1$

och divergent om $|r| \geq 1$.

## Exempel

Låt $x$ vara reellt.

Konvergerar $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{2^k}$ ?

Geometrisk serie med $a=1$ och

$r = \frac{e^{ix}}{2}$ $\quad |r| = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ KONVERGENT!

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{2^k} = 1 \cdot \frac{1}{1 - \frac{e^{ix}}{2}} = \boxed{\frac{2}{2 - e^{ix}}}$$

## Exempel

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{2^k} = ?$$

$$\frac{\cos(kx)}{2^k} = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{ikx}}{2^k}\right)$$

både realdel & imaginärdel

$$\boxed{\frac{4 - 2(\cos x - i\sin x)}{5 - 4\cos x}}$$

$$\Rightarrow \sum \frac{\cos(kx)}{2^k} = \frac{4 - 2\cos x}{5 - 4\cos x}$$

## SATS

$a_k \not\to 0$ då $k \to \infty$

$\Rightarrow$ Serien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ är divergent!

## Bevis

Antag att serien är konvergent med summa $s$.

$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ :

Då gäller att $S_n \to s$ då $n \to \infty$.

Därmed gäller det att $a_n = S_n - S_{n-1}$

$a_n = S_n - S_{n-1} \to s - s = 0$ då $n \to \infty$ #

Alltså: För att serien ska konvergera måste an gå mot noll då n går mot oändligheten.

Är serien $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{1/k}$ konvergent?

Nej för $2^{1/k} \to 1$ då $k \to \infty$

<u>LEMMA</u>

Låt $a_n \geq 0$, $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Då gäller

serien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ är konvergent $\Leftrightarrow$ summafoljden $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ är begränsad.

<u>Motivering</u>

Uppenbart att $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ är icke-avtagande.
En icke-avtagande talföljd har ett gränsvärde omm den är begränsad.

<u>SATS</u> (Jämförelsekriterium)

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq a_k \leq b_k \text{ för alla } k. \\ \sum_{k=0}^{n} b_k \text{ är konvergent} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k \text{ är konvergent.}$$

## Bevis

$$B = \sum_{k=0}^{n} b_k \text{ är ändlig.}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad (\text{alla element} \geq 0)$$

$$0 \leq S_n = \sum_{k=0}^{n} \leq \sum_{k=0}^{n} b_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k = B$$

Alltså är $\langle S_n \rangle_{n=0}^{\infty}$ begränsad.

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_n \text{ är konvergent.} \quad \#$$

## Exempel

Konvergerar $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sin(2^{-k})\right) \sin^2(2^k)$ ?

$0 \leq \sin(2^k) \leq 1$ och $\sin(2^{-k}) \to 0$ då $k \to \infty$

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(2^{-k}) \cdot \sin^2(2^k) \leq \sum_{k=0}^{n} \sin(2^{-k}) \cdot 1 \leq \sum 2^{-k} = \sum \frac{1}{2^k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \sin 2^{-k} \cdot \sin^2 2^k \text{ är konvergent}}$$

Konvergent!

## SATS

Antag att $\begin{cases} a_k \geq 0 \\ b_k > 0 \\ \lim\limits_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k} = A \quad , \quad A > 0 \end{cases}$

Då är serierna $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ och $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ antingen båda konvergenta eller båda divergenta.

## EXEMPEL

Konvergerar $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (1 - \cos(2^{-k}))$ ?

*Termerna går mot $1 - 1 = 0$ då $k \to \infty$*

Taylorutveckling $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^4 B(x)$

$B(x)$ begr. nära $x = 0$.

$$0 \leq a_k = 1 - \cos(2^{-k}) = \left(1 - \left(1 - \frac{2^{-2k}}{2} + 2^{-4k} B(2^{-k})\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2^{-2k} - 2^{-4k} \cdot B(2^{-k})$$

$0 < b_k = 2^{-2k}$. Då blir $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k} = \frac{1}{2} > 0$

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^{-2k}$ är konvergent $\Rightarrow$ $\boxed{\sum\limits_{k=0}^{\infty} (1 - \cos(2^{-k})) \text{ konvergent}}$

## SATS (Cauchys integralkriterium)

Låt $f(x) \geq 0$ och avtagande.

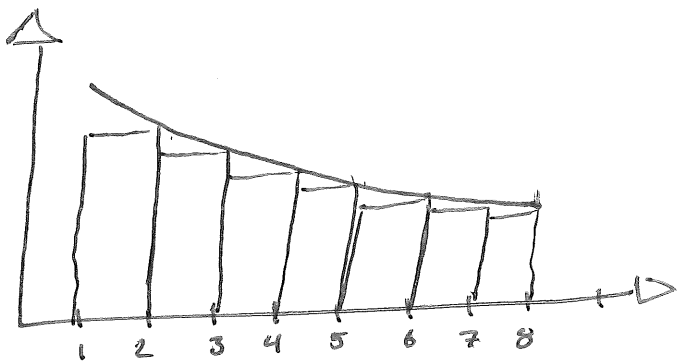
Då är integralen $\int_1^\infty f(x)\,dx$ och

serien $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ antingen båda konvergenta

eller båda divergenta.

## Bevis

Både $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ och $\int_1^n f(x)$ är icke-avtagande.




Jämför areorna!

$$f(2)+f(3)+\ldots+f(n) = \sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq \int_1^\infty f(x)\,dx.$$

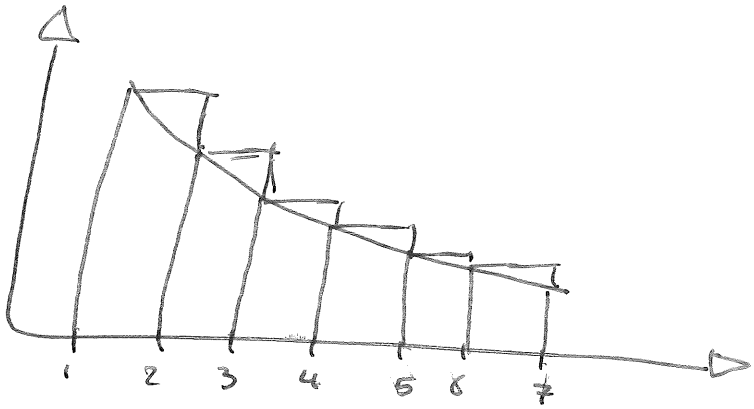
Alltså gäller: $s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) = f(1) + \sum_{k=2}^{n} \leq f(1) + \int_1^\infty f(x)\,dx$

Om integralen $\int_1^\infty f(x)\,dx$ är konvergent så är

$\langle s_n \rangle_{n=1}^{\infty}$ övre begränsad $\Rightarrow \sum f(k)$ är konvergent.

Antag att $\sum_{k=1}^{\infty}$ är konvergent

$\boxed{\text{Jämför Areor}}$ $\Longrightarrow$




$$\int_1^n f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \leq S$$

$$\Rightarrow \int_1^{\infty} f(x)\,dx \text{ är konvergent.}$$

---

<u>EXEMPEL</u>

Eftersom $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx$ är konvergent precis

då $\alpha > 1$.

Alltså är serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ konvergent

precis då $\alpha > 1$

## EXEMPEL

Konvergerar $\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{k}\right)$ ?

$0 \leq a_n = \sin\left(\frac{1}{k}\right)$

$0 \leq b_k = \frac{1}{k}$

Då är $\lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k} = 1 > 0$ eftersom $a_k$ & $b_k$ bete sig på samma sätt för stora $k$.

Eftersom $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ är divergent.

$\Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{k}\right) \text{ är divergent}}$