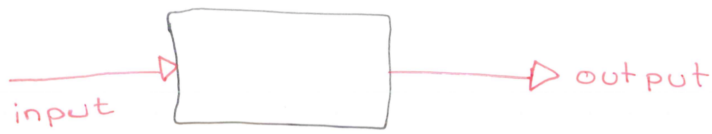
1 Repetition - Övning 3.8

Spåret av en matris definieras som:

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n}$$

$$y \cdot z = 0 \qquad y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \ldots \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A \cdot y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Vi vill definiera när ett system kan ta emot **input** och leverera **output** utan att systemet störs eller förstörs. Inre parametrar ska inte påverka outputen olika, den ska bara bero på inputen. Vi definierar ett systems **stabilitet**.

Ingenting i naturen kan växa obegränsat, t.ex. *bakterietillväxt* i en petriskål växer kraftigt och stannar sedan av när föda tar slut. Slutsats kan dras att människor inte är onda men är orsaken till mammutars utrotning (typ).

Spektralradie av matrisen A

$$\sigma(A) = \max_{1 \leq k \leq n} Re(\lambda_k)$$

$$x(t) = c_1 S_1 e^{\lambda_1 t} + \ldots + c_n S_n e^{\lambda_n t}$$

$$\sigma(A) < 0 \Rightarrow x(t) \to 0$$

$$\sigma(A) > 0 \Rightarrow x(t) \to +\infty$$

$$\sigma(A) = 0 \Rightarrow \neq 0$$

Om den sista termen börjar växa obegränsat så blir påverkan från termerna innan obetydliga.

Definition - Stabilitet för diagonaliserbart system $\dot{x} = Ax$

$$\textbf{stabilit} \Leftrightarrow \sigma(A) < 0$$

$$\textbf{neutraltstabilit} \Leftrightarrow \sigma(A) = 0$$

$$\textbf{instabilit} \Leftrightarrow \sigma(A) > 0$$

O A ej är diagonaliserbar får vi ett polynom till ... och villkoren ändras.

Definition - Stabilitet för godtyckligt system $\dot{x} = Ax$

$$\sigma(A) < 0 \Leftrightarrow \textbf{stabilt}$$

$$\sigma(A) = 0 \Leftrightarrow \textbf{stabilt} eller \textbf{instabilt}$$

$$\sigma(A) > 0 \Leftrightarrow \textbf{instabilt}$$

$$x(k) = c_1 S_1 \lambda_1^k + \ldots + c_n S_n \lambda_n^k$$

alla λ har $|\lambda| < 1 \Rightarrow x(t) \to 0$

några alla λ har $|\lambda| > 1 \Rightarrow x(t) \to \infty$

alla λ har $|\lambda| = 1$? begränsad

$max_k |\lambda_k| \geq$

1.1 Exempel 1

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \lambda_k = -1, +i, -i$$

$$x(t) = c_1 e^{-t} S_1 + c_2 e^{it} S_2 + c_3 e^{-it} S_3$$

Systemet är neutralt stabilt.

1.2 Exempel 2

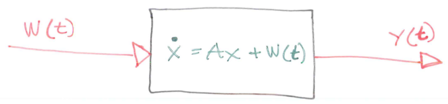
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \lambda_k = -1, 0(dubbelt) \to \begin{cases} x_1(t) = c_2 t + c_1 \\ x_2(t) = c_2 \\ x_3(t) = c_3 e^{-t} \end{cases}$$

Systemet blir instabilt.

1.3 Exempel 3

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \lambda_k = -1(dubbelt), 0 \to \begin{cases} x_1(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-t} \\ x_2(t) = c_2 e^{-t} \\ x_3(t) = c_3 \end{cases}$$

Systemet blir neutralt stabilt.



2 Insignalstabilt

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B \cdot W(t) \\ y = Cx(t) + D \cdot W(t) \end{cases}$$

Ett system med begränsad insignal och begränsad utsignal. System som vi vill använda i produkter ska vara insignalstabilt. Detta löser man genom att bygga ihop de produkten med inre delar där de inre variablerna ger ett system med dessa egenskaper.

$$\dot{X} = AX + f(t) \tag{1}$$

$$X(t) = X_h + X_p$$

$$X_h = e^{At} X_0 \qquad \textbf{eller} \qquad X_h = c_1 S_1 e^{\lambda_1 t} + \ldots + c_n S_n e^{\lambda_n t}$$

Sats 4.5

a om $\dot{x} = Ax$ och f är begränsad då $t \geq t_0$, så varje lösning till ekvation 1 begränsda då $t \geq t_0$.

Bevis

$$\dot{x} + Ax = f$$

$$e^{At}\dot{x} + e^{At}Ax = e^{At}f$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{At}x(t)\right) = e^{At}f$$

$$e^{At}x(t) - x(0) = \int\limits_0^t e^{As}f(s)ds$$

$$x(t) = e^{-At}x(0)0e^{-At}\int\limits_0^t e^{As}f(s)ds$$

2.1 Exempel - övning 4.6

$$x_p = te^{\lambda t}Z$$

$$\dot{x} = Ax + e^{\lambda t}Z, z \neq 0, AZ = \lambda Z$$

Insättning ger:

$$\dot{x_p} = e^{\lambda t}Z + \lambda te^{\lambda t}Z = te^{\lambda t}\lambda Z + e^{\lambda t}Z = te^{\lambda t}AZ + e^{\lambda t}Z$$

$$Ax_p + e^{\lambda t}Z = A\left(te^{\lambda t}Z\right) + e^{\lambda t}Z$$

2.2 Exempel - övning 4.7

Om A är neutralt stabilt, så finns ett egenvärde $\lambda = i\omega$ med egenvektor Z.

Det ger insignalen:

$$f = e^{i\omega t}Z$$

som är begränsad. Partikulärlösning ges av

$$te^{i\omega t}Z$$

vilket är en obegränsad funktion.

2.3 Fråga

Om insignalen är av typen $e^{sT}, s\epsilon C$, när är $x(t)$ av samma typ?

HÄNGDE ITNE RIKTIGT MED...

Sats 4.6

$$f(t) = e^{st}f$$

där f är en konstant vektor och S inte är ett egenvärde av A så har systemet $\dot{x} = Ax + f(t)$ följande partikulärlösning:

$$x_p = (sI - A)^{-1}fe^{st}$$

Bevis:

Stoppa in lösningen i ekvationen, blunda och hoppas att det löser sig. Gör det inte det? Börja om.

Hoppas på att $x_p(t) = Ke^{st}$, hur ska vektorn K då se ut för att det inte ska bli fel?

$$sIKe^{st} = AKe^{st} + e^{st}f$$

$$\Leftrightarrow (sI - A)K = F \qquad \rightarrow \qquad K = (sI - A)^{-1}f$$

Där **K** kallas för en **resolvent matris**.

Denna lösningen gäller när **s** inte är ett egenvärde.

3 Resonans

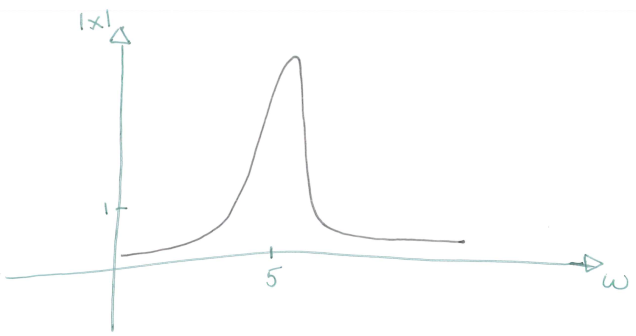
$$A = \begin{bmatrix} -0.1 & -5 \\ 5 & -0.1 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_{1,2} = -0.1 \pm i5$$

$$\dot{x} = Ax + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{i\omega t}$$

$$x_p = (i\omega - A)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{i\omega t}$$

För ett radiosystem vill vi ha resonans för den frekvens som vi ställer in oss på.

I ett mekaniskt system vill man **inte** ha resonans för då kan det gå sönder.



4 Peer instruction

Hade jag försökt göra detta i Zimbabwe hade det inte fungerat. Men här går det, så vi gör det. Så istället för att smsa era flickvänner(eller godtycklig vän)*, så smsar ni mig.*