Föreläsning 4

$$z = x + iy = \sqrt{x^2+y^2} \cdot e^{i\theta + 2\pi i k} \quad , k \in \mathbb{Z}$$

$\arg(z)$ (alla möjliga vinklar)

$\mathrm{Arg}(z)$ (en <u>entydig</u> vinkel)

Kompleka elementära funktioner

Polynom $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z^1 + a_0$

Från deriveringsreglerna följer att p är komplext deriverbar överallt. Dvs: p är en <u>hel</u> funktion.

Rationella funktioner

$$f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}$$

f är holomorf överallt förutom då $P(z) = 0$ (poler).

Exempel

$f(z) = \frac{z}{z^2+1}$ är holomorf i $\{z, z \in \mathbb{C}, z \neq \pm i\}$

Exponentialfunktioner

För $z = x+iy$ gäller att $e^z = e^x \cdot e^{iy}$.

Dvs $\begin{cases} |e^z| = e^x \\ \arg(e^z) = y + 2\pi k = \operatorname{Im}(z) + 2\pi k \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$

Vidare gäller att:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}, \quad (e^z)^n = e^{zn}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

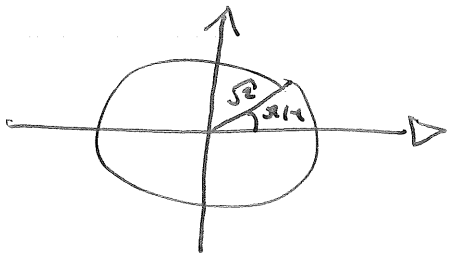
Exempel

Bestäm alla z sådana att $e^z = 0$.

Eftersom $|e^z| = e^x = e^{\operatorname{Re}(z)} = 0$ saknar lösning.

Ingen annan lösning?

Exempel



$$e^z = 1+i$$

$$e^z = e^x \cdot e^{iy} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi i} \quad , n \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^x = \sqrt{2} \\ y = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = \ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln 2 \\ y = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{cases}}$$

Exempel

$$e^z = w \Leftrightarrow \begin{cases} |e^z| = |w| \\ \arg(e^z) = \arg(w) + 2\pi k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln|w| \\ y = \arg(w) + 2\pi k \end{cases}$$

Exempel

Trigonometriska funktioner

Vi använder Eulers formler:

$$\begin{cases} \cos(z) = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \\ \sin(z) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \end{cases}$$

Från derivationsreglerna följer att dessa är holomorfa överallt (hela)

<u>Exempel</u> (dubbla vinkeln)

$$\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$$

$$HL: 2\sin(z)\cos(z) = 2\left(\frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)\right)\left(\frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2i}\left(e^{2iz} + e^{iz+iz} - e^{-iz}\cdot e^{iz} - e^{-iz-iz}\right) = \frac{e^{2iz} - e^{-2iz}}{2i} =$$

$$= \sin(2z) = VL \quad \#$$

Exempel

Finn alla komplexa tal z sådana att $\sin(z) = 0$

$$\sin(z) = 0 \iff \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \iff e^{2iz} - 1 = 0$$

$$\iff e^{2iz} = 1$$

$$2iz = \underbrace{\ln|1|}_{\text{Realdel} = 0} + \underbrace{i(0 + 2\pi k)}_{\text{Imaginärdel.}}$$

$$\iff 2iz = 2\pi i k \iff \boxed{z = \pi k}$$

(fungerar som vanligt)

Exempel

Betrakta $\cos(iy) = \dfrac{e^{iiy} + e^{-iiy}}{2} = \dfrac{e^{y} + e^{-y}}{2} =$

$= \cosh(y) \longrightarrow \infty$ då $y \longrightarrow \pm\infty$

$\Rightarrow \cos(z)$ är <u>EJ</u> begränsad!

(Fungerar INTE precis som vanligt)

Exempel

Bestäm alla $z \in \mathbb{C}$ sådana att:

$\boxed{\cos(z) = -2}$ (inga reella lösningar)

$$\cos(z) = -2 \iff \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = -2$$

$$\iff e^{2iz} + 1 = 4e^{iz} \quad , \quad e^{iz} = t$$

$$\Rightarrow t^2 + 4t + 1 = 0 \iff (t+2)^2 + 1 - 4 = 0$$

$$\iff \boxed{t = -2 \pm \sqrt{3}}$$

$$\begin{cases} e^{iz_1} = t_1 \\ e^{iz_2} = t_2 \end{cases} \iff \begin{cases} iz_1 = \ln|-2+\sqrt{3}| + i(\pi + 2\pi k) \\ iz_2 = \ln|-2-\sqrt{3}| + i(\pi + 2\pi k) \end{cases}$$

$$\iff \boxed{\begin{cases} z_1 = \pi + 2\pi k - i\ln|2-\sqrt{3}| \\ z_2 = \pi + 2\pi k - i\ln|2+\sqrt{3}| \end{cases}}$$

Det börjar bli lite besvärligt.

Logaritmer

"invers" till e^z. Men $e^w = z$, $z \neq 0$ har lösningar:

$w = \ln|z| + i(\arg(z) + 2\pi k)$, k heltal $\Rightarrow$ $\boxed{\text{EJ ENTYDIGT}}$

Vi måste lägga villkor på argument för $e^{\log(z)} = z$

Dessa kallas för olika <u>grenar</u> av logaritmfunktioner. En gren är en odefinierad väg från origo till oändligheten.

Exempel

Välj argumentet så att $-\pi < \mathrm{Arg}(z) < \pi$.

Detta ger en gren som ej är definierad då $\mathrm{Re}(z) = x \leq 0$ samt $\mathrm{Im}(z) = 0$.

$$\mathrm{Log}(z) = \mathrm{Log}_p(z) = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}(z)$$

Definition

$\mathrm{Log}_p(z)$ kallas för principalgrenen.

Exempel

$\mathrm{Log}_p(i) = \ln|1| + i\frac{\pi}{2}$, $\mathrm{Log}_p(-i) = \ln|1| - i\frac{\pi}{2}$

$$\mathrm{Log}_p(-1+i) = \ln\sqrt{2} + i\frac{3\pi}{2}$$

$\mathrm{Log}_p(1) = \ln 1 + i0 = 0$

$\mathrm{Log}_p(-1) = \ln 1 + ???$ EJ DEFINIERAD

Lägg märke till att: $i(-1+i) = -1-i$

men $\mathrm{Log}_p(-1-i) \neq \mathrm{Log}_p(i) + \mathrm{Log}_p(-1+i)$

Det gäller ibland att $\mathrm{Log}(z_1 \cdot z_2) \neq \mathrm{Log}_p(z_1) + \mathrm{Log}_p(z_2)$

Vi kan inte använda logaritmlagarna som vi är vana att göra.

$$\mathrm{Log}_p(z^\alpha) \neq \alpha \mathrm{Log}_p(z)$$

$$\mathrm{Log}_p(i^3) = \mathrm{Log}_p(-i) \neq 3\mathrm{Log}(i)$$

<u>DEFINITION</u>

Den "naturliga" logaritmen ges av

$\mathrm{Log}_n(z) = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}_n(z)$, $0 < \mathrm{Arg}_n(z) < 2\pi$

<u>Exempel</u>

$\mathrm{Log}_n(i) = \ln|1| + i\frac{\pi}{2}$, $\mathrm{Log}_n(-i) = \ln 1 + i\frac{3\pi}{2}$

$\mathrm{Log}_n(-1+i) = \ln\sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4}$, $\mathrm{Log}_n(-1-i) = \ln\sqrt{2} + i\frac{5\pi}{4}$

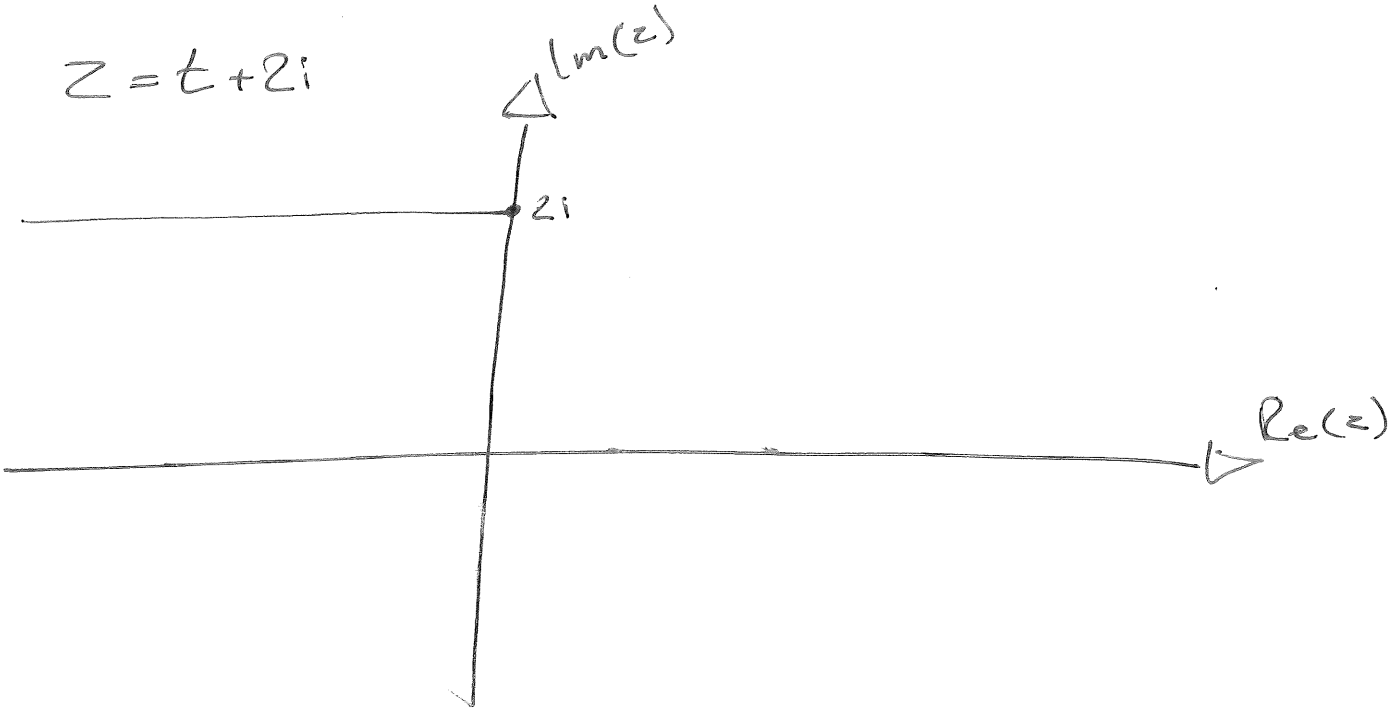
$\mathrm{Log}_n(1) =$ EJ DEF, $\mathrm{Log}_n(-1) = \ln 1 + i\pi$

Exempel

Låt $\mathrm{Log} = \mathrm{Log}_p$. Markera i $\mathbb{C}$ var $\mathrm{Log}_p(z-2i)$ ej är definierad

$z-2i=t$, $\mathrm{Log}_n(t)$ ej def. om $t \in \mathbb{R}$, $t \leq 0$.

$z = t+2i$



Potensfunktioner $w = z^\alpha$ def via $w = e^{\alpha \mathrm{Log}(z)}$

Olika grenar ger upphov till olika potens-funktioner.

Exempel

Välj principalgrenen. Bestäm i^i

$$i^i = e^{i\,\mathrm{Log}_0(i)} = e^{i(\ln 1 + i\frac{\pi}{2})} = e^{i(i\frac{\pi}{2})} = \boxed{e^{-\frac{\pi}{2}}}$$

Exempel

- $(-2i)^{1/2} = e^{1/2 \operatorname{Log}_p(-2i)} = e^{\frac{1}{2}(\ln 2 - i\pi \cdot \frac{1}{2})} =$

$= e^{\frac{1}{2}\ln 2 - i\pi\frac{1}{4}}$

- $(-1+i)^{1/2} = e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log}_p(-1+i)} = e^{\frac{1}{2}(\ln\sqrt{2} + \frac{3\pi}{4}i)} = \frac{1}{4}\ln 2 + i\frac{3\pi}{8}$

- $(-2i) = (-1+i)(-1+i)$, men $((-1+i)(-1+i))^{1/2} \neq$

$\neq (-1+i)^{1/2} \cdot (-1+i)^{1/2}$

Alltså gäller (ibland) $(z_1 \cdot z_2)^\alpha \neq z_1^\alpha \cdot z_2^\alpha$

Även $(z^\alpha)^\beta \neq z^{\alpha\beta}$

Om z är ett reellt tal gäller så klart lagarna...

SATS

Log ($=\operatorname{Log}_p$) är komplext deriverbar där den är definierbar.

$D(\operatorname{Log}(z)) = \frac{1}{z}$ (som vanligt)

Bevis på nästa sida

Bevis

Antag att $z = x+iy$ och $x > 0$.

$$f(z) = \mathrm{Log}_p(z) = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}(z) =$$

$$= \ln\left|\sqrt{x^2+y^2}\right| + i\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

$$\Rightarrow \quad u = \frac{1}{2}\ln|x^2+y^2|$$

Vi kontrollerar om Cauchy Riemanns ekv. uppfylls.

$$u'_x = \frac{1}{2}\,\frac{2x}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad u'_y = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$v'_x = -\frac{y}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$v'_y = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases}$$

$\Rightarrow$ C.R ekv. är uppfyllda!

$\Rightarrow f$ är komplext deriverbar.

$$f'(z) = u'_x + i v'_x = \frac{x}{x^2+y^2} + i\,\frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} =$$

$$= \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{z} \qquad \#$$