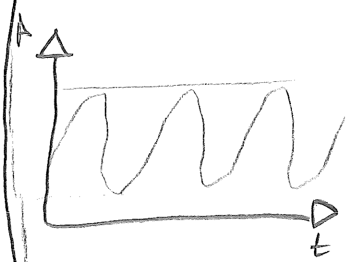
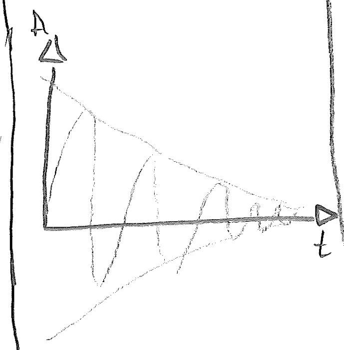
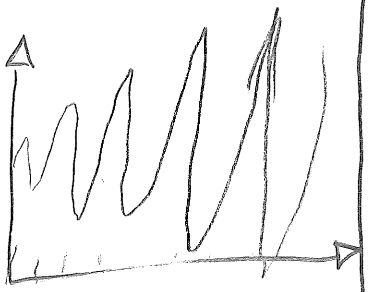
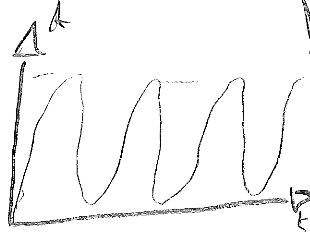
FÖRELÄSNING 4

"Vi behöver inte lösa alla diffekvationer, eftersom vi har färdiga standardlösningar"

Fyra typer

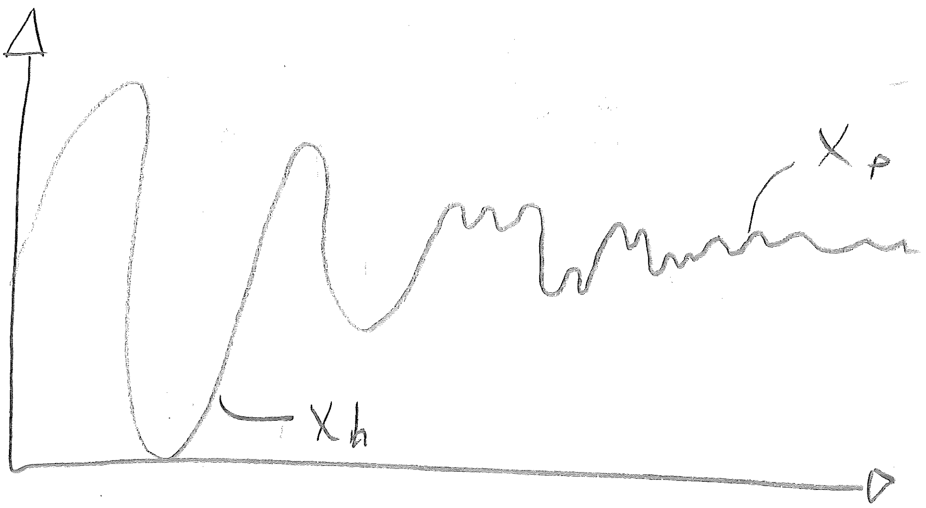
Fria		Påtvingade	
odämpad	dämpad		dämpad
energin bevaras konst. Amp. 	energi minskar minsk. amp 	 teoretiskt gränsfall	 Möjligt att vi har samma Amplitud hela tiden trots friktion

Påtvingad svängning

Rörelseekvationen: $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cdot \sin(\omega t)$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + \underbrace{\frac{c}{m}}_{2z\omega_n}\dot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_n^2}x = \frac{F_0}{m}\sin(\omega t)$$ (standardekvationen)

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + 2z\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m}\sin(\omega t) \quad , \quad x = x_h + x_p$$



homogena x_h är avklingande (dör ut)

partikulära x_p är bestående (steady state)

Påtvingad odämpad ($c=0$)

dämpningskonstanten

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m}\cdot\sin(\omega t)$$

Ansats: $x_p = X\cdot\sin(\omega t)$

$$\Rightarrow \dot{x}_p = X\cos(\omega t)\,\omega$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_p = -X\omega^2\sin(\omega t)$$

Insättning : $-X\omega^2\cdot\sin(\omega t) + \omega_n^2\cdot X\cdot\sin(\omega t) = \frac{F_0}{m}\sin(\omega t)$

stryk sinus : ①

$$\boxed{X = \frac{F_0/k}{1-(\omega/\omega_n)^2}}$$

— Amplitud

se s. 279 Formelsamlingen

Då $\omega \to \omega_n$ går $X \to \infty \Rightarrow$ RESONANS

Dämpad påtvingad svängning ($c \neq 0$)

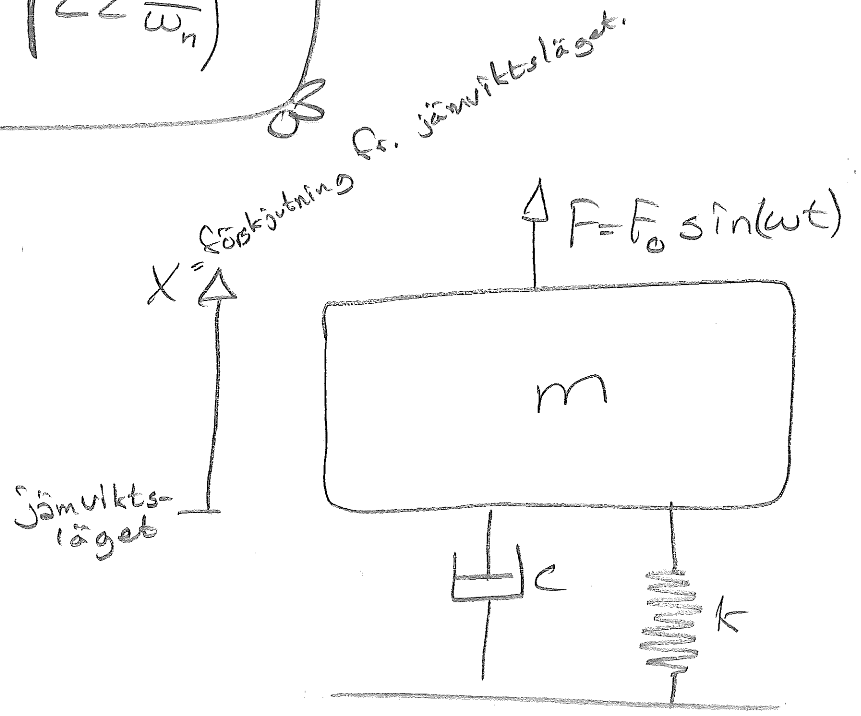
$$\boxed{\ddot{x} + 2z\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m}\sin(\omega t)}$$

Ansats: $x_p = \bar{X}\sin(\omega t - \phi)$, $\tan\phi = \dfrac{2z\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$

Derivera & sätt in

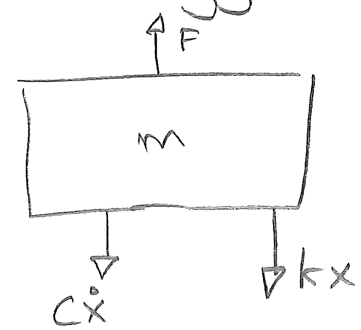
(2) $$\boxed{\bar{X} = \frac{F_0/k}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2z\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}}$$ Amplitud!

Formelsamlingen



Exempel

frilägg



Ta ej med statiska krafter, du behöver ej.

$$-c\dot{x} - kx + F_0\sin\omega t = m\ddot{x}$$

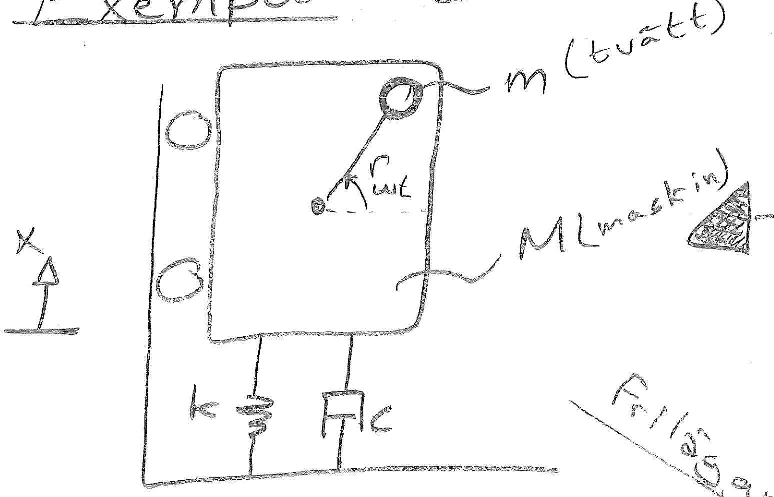
$$\Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + kx = \frac{F_0}{m}\sin(\omega t)$$

$$\frac{c}{m} = 2z\omega_n$$

$$\frac{k}{m} = \omega_n^2$$

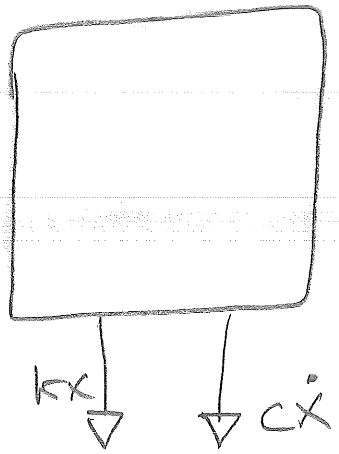
jmf med standardekvation (2)

Exempel $\boxed{12.8}$



Matematisk modell av en tvätt-maskin

Friläggning



$$\boxed{M_{total} = M + m}$$

$$x_m = \underbrace{x}_{\text{maskinens förskjutning}} + \underbrace{r\sin(\omega t)}_{\text{cirkelrörelsen}}$$

cirkelrörelsen utgör <u>ingen yttre kraft</u>!

$$(M+m)\ddot{x}_G = -kx - c\dot{x} \qquad (x\text{-led})$$

$$\Leftrightarrow -kx - cx = M\ddot{x} + m\ddot{x}_m$$

$$\Leftrightarrow -kx - cx = M\ddot{x} + m\ddot{x} - mr\omega^2\sin\omega t$$

$$\Leftrightarrow (M+m)\ddot{x} + c\dot{x} + kx = mr\omega^2\sin\omega t$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + \underbrace{\frac{c}{M+m}}_{2\zeta\omega_n}\dot{x} + \underbrace{\frac{k}{M+m}}_{\omega_n^2}x = \underbrace{\frac{mr\omega^2}{M+m}}_{\frac{F_0}{m_{tot}}}\sin(\omega t)$$

* identifiera med standardekvationen *