1 Diagonalisering av matriser

Kan alla matriser diagonaliseras? Nej, det kan de inte.

Exempel:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_2, \\ \dot{x_2} = x_2 \end{cases} \Rightarrow x_2(t) = c_2 e^t \qquad och \qquad \dot{x}_1 - x_1 = 2c_2 e^t.$$

Integrerande faktor: e^{-t}

$$e^{-t}\dot{x_1} - e^{-t}x_1 = \frac{d}{dt}(e^{-t}x_1) = 2c_2 \qquad \Rightarrow \qquad x_1(t) = (c_1 + 2c_2 t)e^t.$$

Vi försöker lösa ekvationssystemet på samma sätt som i kapitel 3, genom att diagonalisera $\mathbf{A}$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ har endast ett egenvärde $\lambda = 1$ och egenvektorer $\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $s \neq 0$.

Matrisen gick inte att diagonalisera, men ekvationssystemet har ändå en lösning. Vi måste alltså lära oss att hantera icke diagonaliserbara matriser.

$x(t) = e^{At}x$ löser differentialekvationen $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x = 0 \end{cases}$

Detta bevisas med oändliga summor i kapitel 5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!}$

Sats 3.9 - Diagonaliserbar matris

$$\begin{cases} \mathbf{A} \text{ är av typen} n \times n \\ \text{alla egenvärden till } \mathbf{A} \text{ är olika} \end{cases} \Rightarrow \quad \mathbf{A} \text{ är diagonaliserbar} \tag{1}$$

Bevis (för n=3):

Vi ska visa att **A** har tre linjärt oberoende egenvektorer. Till varje egenvärde kan man välja en egenvektor, så låt oss bilda $\mathbf{Q} = a_1\mathbf{S}_1 + a_2\mathbf{S}_2 + a_3\mathbf{S}_3$, en linjärkombination av dessa som är lika med nollvektorn $\mathbf{0}$. Vi skall visa att detta bara inträffar om koefficienterna a_1, a_2, a_3 alla är lika med noll.

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} = \mathbf{0} &\Rightarrow (\lambda_1\mathbf{I} - \mathbf{A})(\lambda_2\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{Q} = \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow \quad & a_3(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)\mathbf{S}_3 = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Detta kräver att $a_3 = 0$. På motsvarande sätt bevisas att även a_1, a_2 är noll.

Det som alla studenter i världshistoriens historia har haft stora problem med är omvändningen av sats 3.9.

Vad händer om jag misslyckas med att hitta n-st olika egenvärden?

Svar: Vi vet inte.

1. Matrisen kan vara diagonaliserbar ändå, ex. identitetsmatrisen har 1 egenvärde men n-st egenvektorer.

2. Behöver inte vara diagonaliserbar, ex. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Kom ihåg:

Olika egenvärden $\Rightarrow$ diagonaliserbar.

Multipla egenvärden $\Rightarrow$ **inget kan fastställas**.

$< n$ st egen**vektorer** $\Rightarrow$ ej diagonaliserbar.

Vissa matriser som till exempel $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ kan diagonaliseras medan andra som $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ inte kan det, men de har ändå **samma egenvärde och karakteristiska polynom!**

Exempel

Lös ekvationen:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Lösning: $\det(\lambda I - A) = (\lambda - 2)^2 + 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda_{1,2} = 2 \pm i.$

$\lambda_{1,2}$ är inte reell, skillnad? Ingen. Fortsätt som vanligt.

Eftersom matrisen är på formen 2×2 och vi har två olika egenvärden så är den diagonaliserbar med egenvektorer

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} c, \qquad c \neq 0$$

Notera att

$\overline{\mathbf{AS_1}} = \overline{\lambda_1 \mathbf{S}_1} = A\overline{S_1} = \lambda_2 \mathbf{S}_1$

Det vill säga att:

$$\mathbf{S}_2 = \overline{\mathbf{S_1}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

Därmed är $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{(2+i)t}\mathbf{S}_1 + c_2 e^{(2-i)t}\mathbf{S}_2$.

För alla egenvektorer (speciellt komplexa) så gäller att om S_1 är en egenvektor så är $S_2 = \overline{S_1}$

Komponentvis fås:

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{2t}(C \cos t + D \sin t) \text{ och } \mathbf{x}_2(t) = e^{2t}(D \cos t - C \sin t)$$

2 Olika användbara matrisegenskaper

Sats 3.12

$$B = S^{-1}AS \qquad \Rightarrow \qquad p_B(\lambda) = p_A(\lambda).$$

Bevis:

$$
\begin{aligned}
p_B(\lambda) &= \det(\lambda I - B) = \\
&= \det(\lambda I - S^{-1}AS) = \\
&= \det(\lambda S^{-1}S - S^{-1}AS) = \\
&= \det(S^{-1}(\lambda I - A)S) = \\
&= \det(S^{-1}\det(\lambda I - A)\det(S) = \\
&= p_A(\lambda).
\end{aligned}
$$

Följdsatser:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \tag{2}$$

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tag{3}$$

Övning 3.6:

$Az = \lambda z \Rightarrow$ z är egenvektor av $(aI + bA)$, vad är egenvärden?

$(aI + bA)z = aIz + bAz = (a + b\lambda)z.$

Övning 3.7 a)

$Az = \lambda z \Rightarrow A^2 z = \lambda^2 z$

Bevis:

$A^2 z = A(Az) = A(\lambda z) = \lambda Az = \lambda^2 z$

Men detta fungerar **inte** åt andra hållet om **A** är en *elak* matris.

Övning 3.7 b)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$A^2 \text{ har egenvärden } 0, 1 \text{ och egenvärden: } \begin{cases} 0 \Rightarrow S_1 = (1,0,0) \\ 1 \Rightarrow S_2 = (1,1,0), S_3 = (-1,0,1) \end{cases}$$

$$A \text{ har egenvärden } 0, 1, -1 \text{ och egenvärden: } \begin{cases} 0 \Rightarrow S_1 = (1,0,0) \\ 1 \Rightarrow S_2 = (1,1,0) \\ -1 \Rightarrow S_3 = (0,1,1) \end{cases}$$

Övning 3.8

Vi har en matris **A** sådan att $\mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ **A** har $(n-1)$ linjärt oberoende egenvektorer med egenvärde noll.

Låt y vara en vektor sådan att:

$y \cdot z = \mathbf{0}$ Det vill säga $y_1 + y_2 + ... + y_n = 0$

Jag har $(n-1)$ vektorer av den typ som uppfyller detta.

Jag vet inte vad **Ay** är, men jag vet att:

$Ay = c_1X_1 + c_2X_2 + ...c_nz \qquad \Rightarrow \qquad (Ay)z = yc_n$

Här tappade han bort sig och bestämde han sig för att **A** är symmetrisk.