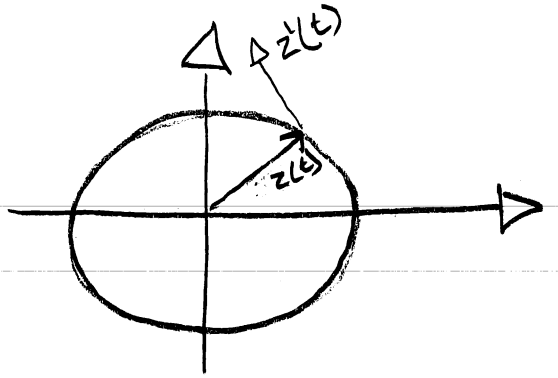
FÖRELÄSNING 3

$\mathbb{C}$ kan identifieras med $\mathbb{R}^2$

Komplexa funktioner

Ex Med komplexa tal kan enhetscirkeln skrivas:



$$z(t) = \cos t + i \sin(t)$$

$$\Leftrightarrow z(t) = e^{it}$$

Tangentriktningen $z'(t)$ ges av

$$z'(t) = ie^{it}$$

Ex Funktionen f given av $\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$

är en funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Denna kan uppfattas som e funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$(x,y) = x + iy = z$; $(u,v) = u + iv = w$

Då är $w = u + iv = (x^2+y^2) + i2xy = (x+iy)^2 = z^2$

Dvs. $f(z) = z^2$

Ex Låt $f(z)=e^z$. Bestäm $u(x,y)$ och $v(x,y)$

så att
$$u(x,y)=\mathrm{Re}(f(x))$$
$$v(x,y)=\mathrm{Im}(f(x))$$

$$e^z=e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)=\underbrace{e^x\cos y}_{u(x,y)}+i\underbrace{e^x\sin y}_{v(x,y)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} u(x,y)&=e^x\cos y\\ v(x,y)&=e^x\sin y\end{aligned}}$$

Gränsvärden av komplexa funktioner som i flerdimensionell analys.

$f(z)=u(x,y)+v(x,y)\cdot i$, $z_0=x_0+iy_0$ och $w=A+iB$.

$$\lim_{z\to z_0} f(x)=A+iB \Leftrightarrow \begin{cases}\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=A\\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=B\end{cases}$$

Def f sägs vara komplext deriverbart i z om

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$ existerar.

$$f'(z)=\frac{df}{dz}=\frac{du}{dz}=Df \qquad h\in\mathbb{C}$$

Ex $f(z) = z$

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{z+h-z}{h} = \frac{h}{h} = 1 \quad \text{då } h \to 0$$

(för alla h)

Ex $f(z) = \bar{z} = a - bi$

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{\overline{z+h} - \bar{z}}{h} = \frac{\bar{z} + \bar{h} - \bar{z}}{h} = \frac{\bar{h}}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\bar{h}}{h} = \begin{cases} 1 & \text{om } h \in \mathbb{R} \\ -1 & \text{om } h = il,\ l \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$\boxed{f \text{ är } \underline{\text{ej}} \text{ komplext deriverbar!}}$

Derivationsregler för produkter, kvot, invers etc är samma som i endim. Slå upp själv och kolla igenom.

$$g(z) = z^n \implies g'(z) = n \cdot z^{n-1}$$

osv

osv

osv

⋮

Def Om f är komplext deriverbar för alla z i en öppen mängd Ω, $\Omega \in \mathbb{C}$ så kallas f holomorf i Ω.

SATS Cauchy-Riemanns kriterium

Funktionen $f(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ är **komplext deriverbar** i $z = x + iy$

omm u och v är differentierbara funktioner av (x,y) samt att:

$$\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases}$$

Då gäller att

$$f'(z) = u'_x + i v'_x = \frac{1}{i}(u'_y + i v'_y) = v'_y - i u'_y$$

Bevis (fuskbevis)

$h = l$, $l \in \mathbb{R}$ $\quad \dfrac{f(z+h) - f(z)}{h} =$

$$= \frac{u(x+l,y) - u(x,y)}{l} + i \frac{v(x+l,y) - v(x,y)}{h} =$$

$$= u'_x + i \cdot v'_x$$

$h = ik, \; k \in \mathbb{R}$

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{ik} = \frac{u(x,y+k)-u(x,y)}{ik} + i\,\frac{v(x,y+k)-v(x,y)}{ik} =$$

$$= \frac{1}{i}\left(u'_y + i \cdot v'_y\right) = \boxed{v'_y - i u'_y}$$

Eftersom f är deriverbar om gränsvärdet existerar följer att

$$u'_x + i v'_x = v'_y - i u'_y \Rightarrow \begin{cases} u'_x = v'_y \\ v'_x = -u'_y \end{cases}$$

"Beviset" "bevisat".

<u>Bevis</u> (på riktigt)

f är komplext deriverbar med $f'(z) = a+ib$ då

$f(z+h) - f(z) = (a+ib)h + |h| \cdot \rho(h)$ där $\lim_{h \to 0} \rho(h) = 0$.

Låt $h = l + ik$, $\rho(h) = \rho(k,l) = \rho_1(k,l) + \rho_2(k,l)$

$$f(x+h) - f(z) = \left(u(x+l, y+k) - u(x,y)\right) + i\left(v(x+l, y+h) - v(x,y)\right)$$

$$= (a+ib)(l+ik) + \sqrt{k^2+l^2}\cdot\left(\varrho_1(l,k) + i\varrho_2(l,k)\right)$$

$$U(x+l, y+k) - U(x,y) = al - bk + \sqrt{k^2+l^2}\,\varrho_1(l,k)$$

$$V(x+l, y+k) - V(x,y) = bl + ak + \sqrt{k^2+l^2}\,\varrho(l,k)$$

$h \to 0 \Rightarrow l \to 0$ & $k \to 0$

$$\Rightarrow \quad a = U'_x \qquad\qquad b = V'_x$$

$$-b = U'_y \quad \text{och} \quad a = V'_y$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} U'_x = V'_x \\ U'_y = -V'_y \end{cases} \qquad \#$$

Ex Låt $f(z) = e^z = u + iv$

$u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$

$$\begin{cases} u'_x = e^x \cos y = v'_y \\ u'_y = -e^x \sin y = -v'_y \end{cases}$$

Alltså C.R. och $f'(z) = u'_x + i v'_x =$

$= e^x \cos y + i e^x \sin y = \boxed{e^z}$

Dvs $\frac{d}{dz} e^z = e^z$ för alla $z \in \mathbb{C}$

TERMINOLOGI

En funktion kallas <u>hel</u> om den är komplext deriverbar överallt. (hel = holo = entire)

DEF

En funktion kallas harmonisk i D om $u''_{xx}(x,y) + u''_{yy}(x,y) = 0$ för alla (x,y) i D.

SATS f är holomorf $(f = u + iv) \Rightarrow$

$\Rightarrow u$ och v är harmoniska

Bevis

C.R säger: $\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_y \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} u''_{xx} = v''_{xy} \\ u''_{yy} = -v''_{yx} \end{matrix}$

$$\Rightarrow u''_{xx} + v''_{yy} = u''_{xy} - v''_{yx} = 0 \Rightarrow \boxed{u''_{xx} + u''_{yy} = 0}$$

#

EXEMPEL Bestäm de tal $a > 0$ för vilka

$u(x,y) = e^{ax} \cdot \sin(2y)$ är realdelen av en holomorf funktion $w = f(z)$. Bestäm f.

$u''_{xx} + u''_{yy} = 0$ $\quad u'_x = ae^{ax}\sin 2y$, $u''_{xx} = a^2 e^{ax}\sin 2y$

$u'_y = 2ae^{ax}\cos 2y$, $u''_{yy} = -2^2 e^{ax}\sin 2y$

Ställ upp ekvationerna

$a^2 = 4 \Rightarrow \boxed{a = \pm 2}$

$\Rightarrow u(x,y) = e^{2x}\sin 2y$, sedan använd C.R osv

osv

osv

KNEP Lägg märke till att $f(z) = f(x+iy) =$

$= e^{2x}\sin(2y) - ie^{2x}\cos 2y + iK$

så är:

$f(x+i0) = -ie^{2x} + iK$

$$\boxed{\text{svaret är: } f(z) = -ie^{2z} + iK}$$

Konformitet

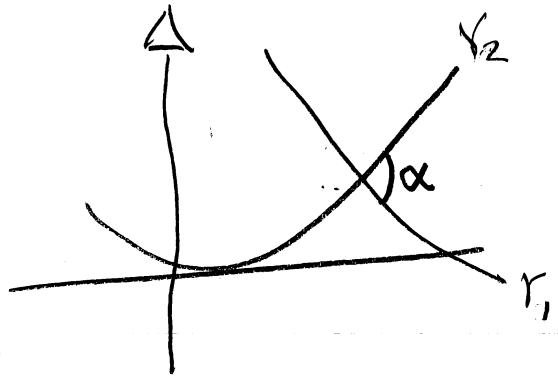
Låt f vara komplext deriverbar (holomorf) nära z_0 med $f'(z_0) \neq 0$.

Låt vidare γ_1 & γ_2 vara två kurvor med parametriseringar:

$z = z_1(t)$, $z = z_2(t)$. Antag att kurvorna skär varandra i z_0.

dvs. $z_1(t_1) = z_2(t_2) = z_0$

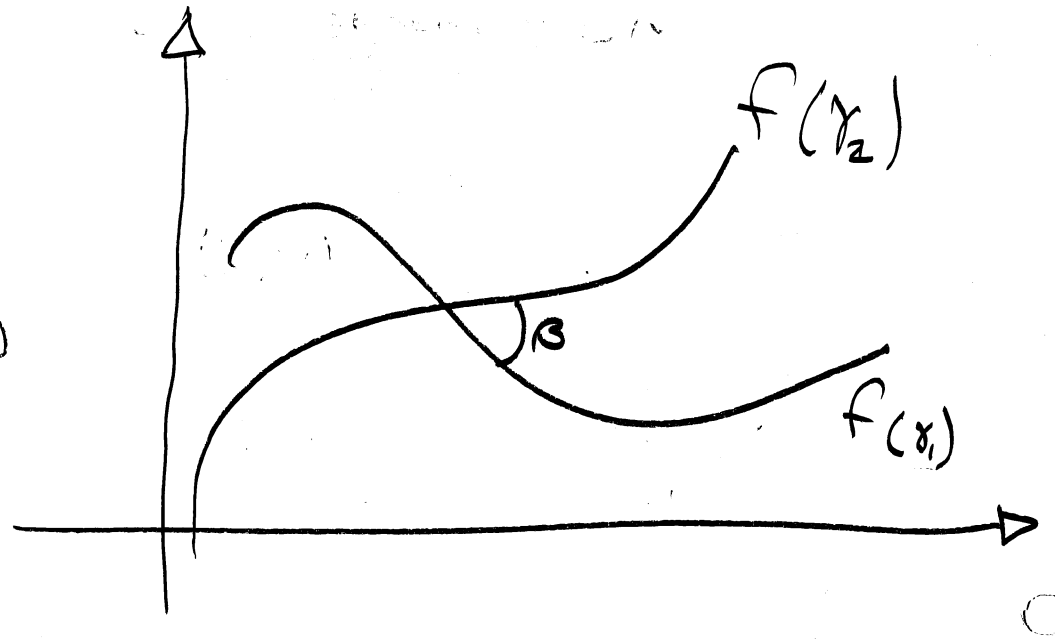
α är vinkeln mellan kurvornas tangent-riktningar.



$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \arg(z_2'(t_2)) - \arg(z_1'(t_1))}$$

$w = f(z)$

$\boxed{\text{Vinkeln bevaras!}}$



Låt β beteckna vinkeln mellan tangent-riktningarna för $f(\gamma_1)$ & $f(\gamma_2)$.

$$\boxed{\beta} = \arg\left(\frac{d}{dt}\left(f(z_2(t))\right)_{t=t_2}\right) - \arg\left(\frac{d}{dt}\left(f(z_1(t))\right)_{t=t_1}\right) =$$

$$= \arg\left(f'(z_2(t_2)) \cdot z_2'(t)\right) - \arg\left(f'(z_1(t_1)) \cdot z_1'(t_1)\right) =$$

$$= \arg\left(f'(z_0) \cdot z_2'(t_2)\right) - \arg\left(f'(z_0) \cdot z'(t_1)\right) =$$

$$= \left(\arg(f'(z_0)) + \arg(z_2'(t_2))\right) - \left(\arg(f'(z_0)) + \arg(z_1'(t_1))\right) =$$

$$= \arg(z_2'(t_2)) - \arg(z_1'(t_1)) = \boxed{\alpha}$$

#ezpz