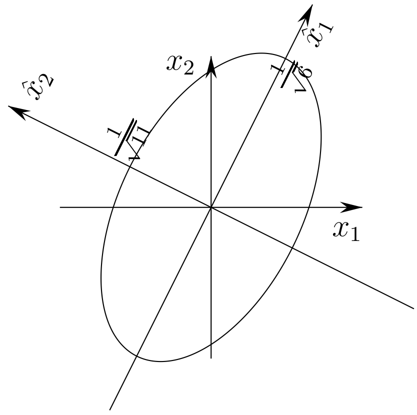
# Sammanfattning 20

**Ex. 8**: Tolka $10x_1^2 - 4x_1x_2 + 7x_2^2 = 1$. Formen studerades i slutet av förra föreläsningen via egenvärden och egenvektorer: $\mathsf{K} = \mathsf{QDQ}^T$ och $\mathsf{D} = \mathsf{Q}^T\mathsf{KQ}$, där $\mathsf{Q} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ och $\mathsf{D} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$. Låt $\mathsf{x} = \mathsf{Q}\hat{\mathsf{x}}$. Då gäller $\mathsf{x}^T\mathsf{Kx} = 1 = (\mathsf{Q}\hat{\mathsf{x}})^T\mathsf{K}(\mathsf{Q}\hat{\mathsf{x}}) = \hat{\mathsf{x}}^T\mathsf{D}\hat{\mathsf{x}} = 1 = 6\hat{x}_1^2 + 11\hat{x}_2^2$ dvs ekvationen beskriver en ellips längs axlarna $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$.




**Övn 7.18**: Bestäm största och minsta värdet av $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2$, under bivillkoret $g : x_1^2 + x_2^2 = 1$. **Lösning**: $f = \mathsf{x}^T\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\mathsf{x} = \mathsf{x}^T\mathsf{Kx}$.

$\det(\lambda \mathsf{I} - \mathsf{K}) = (\lambda - 2)(\lambda + 3)$ och $\mathsf{Q} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Om $\mathsf{x} = \mathsf{Q}\hat{\mathsf{x}}$ så är

$f = \mathsf{x}^T\mathsf{Kx} = (\mathsf{Q}\hat{\mathsf{x}})^T\mathsf{KQ}\hat{\mathsf{x}} = \hat{\mathsf{x}}^T\mathsf{D}\hat{\mathsf{x}} = 2\hat{x}_1^2 - 3\hat{x}_2^2$, ty $\mathsf{D} = \mathsf{Q}^T\mathsf{KQ} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Bivillkoret blir $1 = \mathsf{x}^T\mathsf{x} = (\mathsf{Q}\hat{\mathsf{x}})^T\mathsf{Q}\hat{\mathsf{x}} = \hat{\mathsf{x}}^T\hat{\mathsf{x}}$. Största värdet uppnås då $\hat{x}_1$ är störst och minsta värdet då $\hat{x}_2$ är störst. **Svar**: 2 och $-3$.