# 1 Kapitel 2

## 1.1 E2

Tre hantverkare, en snickare en rörmokare och en elektriker ska utföra arbeten på varandras (och sina egna) hus. Värdet på arbetet för respektive hus ska vara lika med 10 dagslöner för ägaren av huset. Därmed behöver inga pengar byta händer och arbetet är *vitt*.

Den första matrisen beskriver antalet timmar som läggs ner i varje hus av varje hantverkare. Kolumn 1 är snickaren, kolumn 2 är rörmokaren och kolumn 3 är elektrikern. Rad 1 är snickarens hus, rad 2 är rörmokarens hus och rad 3 är elektrikers hus.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} DLS \\ DLR \\ DLE \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} DLS \\ DLR \\ DLE \end{bmatrix}$$

Frågan kan representera: $\bar{A} \cdot \bar{x} = 10\bar{x} \qquad A(x) = 10(x)$

Då blir detta ett egenvärdesproblem.

## 1.2 Egenvektorer och egenvärden

Vi har en **kvadratisk matris A** och en **vektor** $z \neq 0$ sådan att:

$$Az = \lambda z$$

Så kallas z för **egenvektor** till matrisen A med **egenvärde** $\lambda$.

$Az = \lambda I z = \bar{0}$ Ger oss **systemmatrisen**: $(A - \lambda I)z = 0$.

Då determinanten $det(A - \lambda I) = 0$ så har systemmatrisen lösningar skilda från den triviala lösningen $z = 0$.

Vi definierar det karakteristiska polynomet $P_\lambda$:

$$P_\lambda(A) = det(A - \lambda I) = 0$$

$(\lambda I - A \Leftrightarrow A - \lambda I)$

Då **kvadratmatrisen A** är **n x n** så är $P_\lambda$ ett polynom av grad n uttryckt i $\lambda$. Enligt huvudsatsen har vi därför n lösningar.

När vi har bestämt **egenvärden** där determinanten är 0 så löser vi:

$$(A - \lambda_i I)z_i = 0$$

### 1.3 Exempel 1

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 13 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda + 3 & -6 \\ -6 & \lambda - 13 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow P_\lambda(A) = (\lambda + 3)(\lambda - 13) - 36 = \lambda^2 - 10\lambda - 75$$

$$\lambda_1 = 15 \qquad \lambda_2 = -5$$

Summan av egenvärdena är lika med **diagonalen i avbildningsmatrisen**.

Produkten av egenvärdena är lika med **determinanten av avbildningsmatrisen**.

$\boldsymbol{\lambda_1 = 15}$ ger

$$\begin{bmatrix} 18 & -6 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow z_1 = c \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad c \neq 0$$

$\boldsymbol{\lambda_2 = -5}$ ger

$$\begin{bmatrix} -2 & -6 \\ -6 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow z_2 = c \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad c \neq 0$$

## 1.4 Exempel 2 - differensekvation

$$x_{n+1} = -3x_n + 6y_n$$

$$y_{n+1} = 6x_n + 13y_n$$

$$x_0 = 1, y_0 = 23$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_n$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 23 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_1 = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_0$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_2 = A^2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_0$$

$$\vdots$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_n = A^n \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_0$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 23 \end{bmatrix} = 7 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Det ger oss att:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_n = A^n \left( 7 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Allmänt om **A** är en n x n-matris med n st linjärt oberoende egenvektorer ($S_1$ , ..., $S_n$) får vi differensekvationen:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{k+1} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_k \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

**Steg 1** skriv om:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_0 = c_1 S_1 + \ldots + c_n S_n$$

**Steg 2**:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_k = c_1 \lambda_1^k S_1 + \ldots + c_n \lambda_n^k S_n$$

Det intressanta är att man kan göra motsvarande för en differentialekvation.

# 2 Exponentialen av en matris

$$\dot{X} = AX, \qquad X(0) = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

**A** har **n st** linjärt oberoende egenvektorer ($S_1$ ... $S_n$).

$$\begin{cases} AS_1 = \lambda_1 S_1 \\ \quad\vdots \\ AS_n = \lambda_n S_n \end{cases} \rightarrow AS = SD, \qquad S^{-1}AS = D$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}, \qquad S = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_n \end{bmatrix}$$

Där S är inverterbar Detta ger oss:

$$S^{-1}\dot{X} = S^{-1}AX$$

$$S^{-1}\dot{X} = S^{-1}ASS^{-1}X = DS^{-1}X = DZ$$

$$Z = S^{-1}X$$

$$\dot{Z} = DZ$$

Den sista ekvationen kan då delas upp i:

$$\begin{bmatrix} \dot{Z}_1 = \lambda_1 Z_1 \\ \vdots \\ \dot{Z}_n = \lambda_n Z_n \end{bmatrix}$$

Lösningarna blir då:

$$\begin{bmatrix} z_1(t) = z_1(0)e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ z_n(t) = z_n(0)e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Vidare får vi att

$$Z(t) = \begin{bmatrix} Z_1(t) \\ \vdots \\ Z_n(t) \end{bmatrix} \to X(t) = SZ(t)$$

Expontentialen av en matris

$$X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} S_1 + \ldots c_n e^{\lambda_1 t} S_n$$

$$X(t) = e^{At} X(0)$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \to \qquad e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{At}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} A^n t^{n-1} \frac{n}{n!} = A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^{n-1} \cdot t^{n-1}}{(n-1)!} = (m = n-1) = A \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m \cdot t^m}{(m)!} = A \cdot e^{At}$$

För att invertera en **2x2-matris** snabbt:

$$S = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Om vi vet att deteminanten för matrisen är skild från noll kan vi säga att:

$$S^{-1} = \frac{1}{det(S)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

## 2.1 Exempel

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c_1 = \frac{3}{10} \qquad c_2 = \frac{1}{10}$$

Då kan vi, med tidigare härledd formel, räkna ut exponentialen:

$$X(t) = \frac{3}{10} e^{15t} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{10} e^{-5t} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X_1(t) = \frac{3}{10}\left(e^{15t} - e^{-5t}\right) \qquad X_2(t) = \frac{1}{10}\left(9e^{15t} + e^{-5t}\right)$$

## 2.2 Exempel

$$\dot{X} = AX + \begin{bmatrix} 2 \\ \\ -4 \end{bmatrix} \qquad X(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 15, S_1 = c \begin{bmatrix} 1 \\ \\ 3 \end{bmatrix} \\ \\ \lambda_2 = -5, S_2 = c \begin{bmatrix} -3 \\ \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$Z = S^{-1}X \qquad \dot{Z} = S^{-1}\dot{X}ASS^{-1}X + S^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\dot{Z} = DZ + \begin{bmatrix} -1 \\ \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{Z}_1 = 15Z_1 - 1 \rightarrow Z_1(t) = \frac{1}{15}0\alpha_1 e^{15t} \\ \\ \dot{Z}_2 = -5Z_2 - 1 \rightarrow Z_2(t) = \frac{-1}{5}0\alpha_2 e^{-5t} \end{cases}$$

$$Z_1(t) = \frac{14e^{15t}+1}{15} \qquad Z_2(t) = \frac{-1-4e^{-5t}}{5}$$

För att invertera en 2x2-matris så ser man först att den går att invertera om determinanten är 0. Max skriver ner något

För att beräkna exponentialen till en icke-homogen matris så får används den härledda formeln + en partikulärlösningen likt ovan. *Ingenting är underst,* *jag la allting överst* = *Ingenting är svårt, allting är lätt* - Koppling från Mamma Mu Om man skriver *kommunikation* på tavlan, så läser ni bara krummelurer, det är lite paradoxalt, eller hur?