Sammanfattning 19

Kvadratiska former

Definition: $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \underbrace{x_i x_j}_{\text{grad } 2}$.

Ex. 1: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 8x_2x_3 + 7x_3^2$ är en kvadratisk form, men inte $x_1^2 - x_2$.

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x^T A x = x^T \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} x = x^T K x,$$

dvs kvadratiska former kan skrivas i matrisform, **entydigt** om matrisen är symmetrisk.

Definition: En kvadratisk form kallas (a) **Positiv definit** om $x^T K x > 0$ för alla $x \neq 0$, (b) **Positiv semidefinit** om $x^T K x \geq 0$ och likheten gäller för någon $x \neq 0$, (c) **Negativ definit**, (d) **Negativ semidefinit** på motsvarande sätt och (e) **Indefinit** om $x^T K x$ växlar tecken.

Ex. 2: Klassificera formen $f(x_1, x_2) = 10x_1^2 - 4x_1x_2 + 7x_2^2 = x^T \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} x$.

Metod 1: Spektralsatsen. $\det(\lambda I - K) = (\lambda - 6)(\lambda - 11)$, $Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ och $Q^T K Q = D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$. Det blir: $x^T K x = x^T Q Q^T K Q Q^T x = y^T D y$, där $y = Q^T x$ är nya koordinater i planet. I de nya koordinaterna är $f(y_1, y_2) = 6y_1^2 + 11y_2^2 \geq 0$ och $f = 0$ endast om $y_1 = 0 = y_2$ dvs endast om $x_1 = 0 = x_2$, ty $\det(Q) \neq 0$. Därmed är f positiv definit. Vi säger att Q *diagonaliserar* f.

Metod 2: Kvadratkomplettering. $f = 10(x_1^2 - \frac{2}{5}x_1x_2) + 7x_2^2 = 10((x_1 - \frac{1}{5}x_2)^2 - \frac{1}{25}x_2^2) + 7x_2^2$, dvs $f = 10(x_1 - \frac{1}{5}x_2)^2 + \frac{33}{5}x_2^2$. Vi har att $f \geq 0$ och att $f = 0$ endast om $x_2 = 0$ och $x_1 - \frac{1}{5}x_2 = 0$, dvs endast om $x_1 = 0 = x_2$. Därmed är f positiv definit.

Kvadratkomplettering:

(1) Gruppera alla termer med x_1	(2) Bryt ut koefficienten på x_1^2
(3) Kvadratkomplettera x_1	(4) Forstätt med x_2.

Ex. 3: $f(x_1, x_2) = 10x_1^2 - 4x_1x_2 + 7x_2^2 = 10(x_1 - \frac{1}{5}x_2)^2 + \frac{33}{5}x_2^2$.
Kvadratkomplettering genererar en ny koordinattransformation $z = Rx$, i detta fall:

$$\begin{cases} z_1 = x_1 - \frac{1}{5}x_2 \\ z_2 = x_2 \end{cases} \text{ och } R = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \; f = x^T K x = z^T \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & \frac{33}{5} \end{pmatrix} z = x^T \underbrace{R^T D_1 R}_{=K} x.$$

Sidestep: Den positiv definita matrisen K kan skrivas som $K = LL^T$ där $L = R^T \sqrt{D_1}$ är en vänstertriangulär matris. Detta kallas **Choleskyfaktorisering**.

Ex. 4: Lös systemet $\begin{cases} 10x_1 - 2x_2 = y_1 \\ -2x_1 + 7x_2 = y_2 \end{cases}$ med Gausselimination. **Lösning**:

$$\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]:=[2]+\frac{1}{5}[1]} \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 0 & \frac{33}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \text{ dvs}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 0 & \frac{33}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & \frac{33}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Sats: Om K är symmetrisk och inverterbar, faktorisering $R_1^T D_1 R_1$ via kvadratkomplettering och $R_2^T D_2 R_2$ via Gausselimination är likadana, där R_1, R_2 är högertriangulära matriser med pivåelement 1. **Bevis**: $K = R_1^T D_1 R_1 = R_2^T D_2 R_2$ dvs ${D_2}^{-1}({R_2}^{-1})^T R_1^T D_1 = R_2 {R_1}^{-1}$. Vänsterledet är en vänstertriangulär matris och högerleden är högertriangulär med ettor i diagonalen, dvs $R_2 {R_1}^{-1} = I$ och därmed $R_2 = R_1$, $D_2 = D_1$.

Ex. 5: $\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1=10} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{5} \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]:=[2]+2[1]=10} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{33}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2=\frac{33}{5}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ex. 6: Studera $f = x^T K x$, där $K = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{pmatrix}$. **Metod 1**: Diagonalisera (**Övn 6.29**) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 21$, dvs positiv definit. **Metod 2**: Kvadratkomplettering.
$f = 2(x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3) + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + 20x_3^2 =$
$2((x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{3}{2}x_3)^2-(\frac{x_2+3x_3}{2})^2)+2x_2^2+6x_2x_3+20x_3^2 = 2(x_1+\frac{x_2+3x_3}{2})^2+\frac{3}{2}{x_2}^2+3x_2x_3+\frac{31}{2}x_3^2 =$
$2(x_1 + \frac{x_2+3x_3}{2})^2 + \frac{3}{2}({x_2}^2 + 2x_2x_3) + \frac{31}{2}x_3^2 = 2(x_1 + \frac{x_2+3x_3}{2})^2 + \frac{3}{2}(x_2 + x_3)^2 + 14x_3^2.$

Koordinatbytet ges av $z = Rx$, där $R = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Samma R ger Gausselimination:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1=3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow[{[3]:=[3]-3[1]}]{[2]:=[2]-[1]} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{31}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2=\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{31}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{[3]:=[3]-\frac{3}{2}[2]}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3=14} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sats 7.4 (Sylvesters tröghetslag): Om en kvadratisk form $f = x^T K x$ kan diagonaliseras dels med transformationen $x = S\hat{x}$, dels med $x = S'\hat{x}'$, dvs $x^T K x = \hat{x}^T D \hat{x} = \hat{x}'^T D' \hat{x}'$, så har D, D' lika många positiva (negativa) diagonalelement.

Sats 7.6: Givet en symmetrisk och reell matris K och ett reellt tal σ, då är antalet egenvärden av K som är större (resp mindre) än σ lika med antalet positiva (resp negativa) pivåelement vid Gausselimination av $K - \sigma I$.

Ex. 7: Hur många egenvärden har $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{pmatrix}$ i $0 < \lambda < 4$? **Lösning**:

$$K - 4I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & 46 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1=-2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & 16 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & \frac{9}{2} & \frac{41}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2=-\frac{3}{2}}$$
$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & \frac{9}{2} & \frac{41}{2} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 34 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3=34} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Så har K två egenvärden som är < 4 och ett som är > 4. Fallet $\sigma = 0$ har vi redan gjort, K är positiv definit och alla pivåelement är positiva. **Svar**: K har 2 egenvärden i $[0, 4]$.