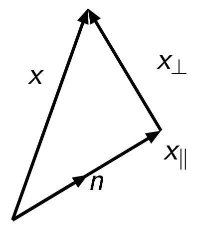
Sammanfattning 18

Linjär algebra – Symmetriska matriser
Vi beskriver n–dimensionella vektorer med kolonnmatriser och skalärprodukten som $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x^T y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$. Speciellt blir $|\mathbf{x}| = \sqrt{x^T x}$.

Definition x är vinkelrät mot y om $x^T y = 0$. Vi skriver $x \perp y$.

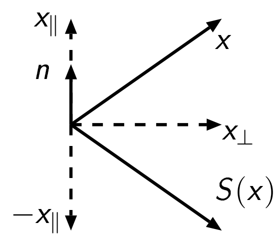
Sats (Pythagoras): $x \perp y \Rightarrow |x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2$. **Bevis**: $|x+y|^2 = (x+y)^T(x+y) = |x|^2 + |y|^2 + x^T y + y^T x = |x|^2 + |y|^2$.

Ex. 1 Projektioner:
Given en enhetsvektor n, dvs $n^T n = 1$, kan alla (icke-noll) vektorer entydigt delas upp i två komposanter, $x = x_\parallel + x_\perp$, där $x_\parallel = kn$. Bestäm k. **Lösning**:
$0 = n^T x_\perp = n^T(x - x_\parallel) = n^T x - k n^T n$, dvs $\boxed{k = n^T x}$.



Avbildningen $x \to P(x) = x_\parallel$ kallas **projektion** på n. För varje x gäller att $P(x) = nn^T x$, dvs $\boxed{P = nn^T}$.
$P^2 = P$ ty $P^2 = nn^T nn^T = nn^T = P$.
P har egenvärden 0 och 1 ty $P(x_\perp) = P(x - P(x)) = P(x) - P(x) = 0$ och $P(n) = n$.

Ex. 2 Spegling:
$S(x) = x_\perp - x_\parallel = x - 2x_\parallel = x - 2P(x)$, dvs
$S = I - 2P = I - 2nn^T$.
$S^2 = (I-2P)(I-2P) = I - 2P - 2P + 4P^2 = I$, dvs
S är sin egen invers.
Sats: $S = S^T$.
Bevis: $S^T = (I - 2nn^T)^T = I - 2(n^T)^T n^T = S$.



Definition: Matrisen Q är ortogonal om $Q^T Q = I$, dvs $Q^{-1} = Q^T$.

Ex. 3: S är ortogonal ty $SS = I = S^T S$.

Sats: Låt q_i, $i = 1, \cdots, n$ vara kolonnerna i en ortogonal matris, dvs $Q = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$. (a) Kolonnerna i Q motsvarar ortonormerade vektorer. (b) I kan skrivas som en summa av ortogonala projektioner längs enhetsvektorerna q_i.
Bevis: (a) $Q^T Q = I$, dvs $q_i^T q_i = 1$ och $q_i^T q_j = 0$ för $i \neq j$. (b) $QQ^T = q_1 q_1^T + q_2 q_2^T + \cdots + q_n q_n^T = I$, där $q_i q_i^T q_i q_i^T = q_i q_i^T$ och $q_i q_i^T q_j q_j^T = 0$, för $i \neq j$.

Ex. 4: Är $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ ortogonal? **Svar**: Nej ty $q_i^T q_i = 9$, nen $Q = \dfrac{1}{3} A$ är det.

Sats 6.9: A reell och symmetrisk samt $Az = \lambda z$, $z \neq 0 \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$. **Bevis**: $Az = \lambda z \Rightarrow \overline{A}\overline{z} = \overline{\lambda}\overline{z} = A\overline{z}$. Därmed $z^T A \overline{z} = \overline{\lambda} z^T \overline{z}$. Också $(Az)^T \overline{z} = z^T A^T \overline{z} = z^T A \overline{z} = \lambda z^T \overline{z}$. Eftersom $z^T \overline{z} = |z|^2 \neq 0$, så är $\overline{\lambda} = \lambda$. Notera att eftersom A och λ är reella, så kan egenvektorn z väljas reell.

Sats 6.10: Om A är reell och symmetrisk så är alla reella egenvektorer tillhörande olika egenvärden ortogonala. **Bevis**: Ta $\lambda \neq \mu$ och $Az = \lambda z$, $Av = \mu v$. Så är $\mu z^T v = z^T Av = (A^T z)^T v = (Az)^T v = \lambda z^T v$. $\lambda \neq \mu \Rightarrow z^T v = 0$.

Sats 6.11 (Spektralsatsen): Om A är reell och symmetrisk så finns det en ortogonalmatris Q som diagonaliserar A, dvs $Q^{-1}AQ = Q^T AQ = D$. Beviset är lättast om alla egenvärden är olika. I så fall är A diagonaliserbar och S är ortogonal pga **Sats 6.10**. Omvänt så innebär det att $\boxed{A = QDQ^T = \lambda_1 q_1 q_1^T + \lambda_2 q_2 q_2^T + \cdots + \lambda_n q_n q_n^T}$.

Ex. 5: Finn Q som diagonaliserar $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Lösning: $\det(\lambda I - A) = (\lambda - 9)^2(\lambda + 9)$, dvs egenvärden är $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = -9$. Ur $(9I - A)z = 0$ fås $2z_1 + z_2 - 2z_3 = 0$. Två egenvektorer ligger i denna plan och den tredje ligger längs normalen pga **Sats 6.10**, dvs $q_3 = \frac{1}{3}(1, 1, -2)^T$. Alla vektorer i planet duger som egenvektorer, vi väljer $q_1 = \frac{1}{3}(1, 2, 2)^T$ och därmed blir $q_2 = q_3 \times q_1 = \frac{1}{3}(2, -2, 1)^T$.
