Laplacetransform

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t) dt \qquad \alpha < Re(s) < \beta$$

Växande eller avtagande potential avgörs av realdelen för s.

Skalning

$$\mathscr{L}(f(at)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(at) dt = \frac{a}{a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s}{a}(at)} f(at) dt \overset{z=at}{=}$$

$$\overset{z=at}{=} \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s}{a}z} f(z) dz = \frac{1}{|a|} [\mathcal{L}(f)] (\frac{s}{a}, \alpha < Re(\frac{s}{a}) < \beta$$

$$a \in \mathcal{R}, a \neq 0$$

$$\mathscr{L}\left(e^{at} f(t)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} e^{at} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t) dt = \mathscr{L}(f)(s-a)$$

$$\alpha < Re(s-a)\beta$$

$$\mathscr{L}(t \cdot f(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} t f(t) dt \frac{d}{ds} \mathscr{L}(f)(s) = \frac{d}{ds} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} (-t) f(t) dt$$

Förskjutning

$$\mathscr{L}(f(t-t_0)) = e^{-st_0} \mathscr{L}(f)$$

$$\mathscr{L}(f') = s\mathscr{L}(f)$$

$$\mathscr{L}(\theta) = \frac{1}{s}, \qquad Re(s) > 0$$

$$\mathscr{L}\left(e^{7t}\theta\right) = \frac{1}{s-7}, \qquad Re(s-7) > 0$$

$$\mathscr{L}(\cos t\theta(t)) = \mathscr{L}\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\theta(t)\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-i} + \frac{1}{s+i}\right] = \frac{s}{s^2+1}, \qquad Re(s) > 0$$

$$\mathscr{L}\left(e^{-t^2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} e^{-t^2} dt = e^{s^2/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t+s/2)^2} dt = \sqrt{\pi} e^{s^2/4}$$

$$e^{-(t^2+st)} = e^{-(t^2+st+s^2/4-s^2/4} = e^{s^2/4} \cdot e^{(t+s/2)^2}$$

Sats 14.5 (står inte så här i boken...)

Om konvergensstrimlan för $\mathscr{L}(f)$ innehåller den imaginära axeln så är $\mathscr{L}(f) = \hat{f}\left(\frac{s}{i}\right)$, givet att $\mathscr{L}(f)$ är hel analytisk.

Övning 14.9

$$f(t) = sin(t) \cdot (\theta(t) - \theta(t - 2\pi))$$

Definitionen ger då

$$\mathscr{L}(f) = \int_0^{2\pi} e^{-st} \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right) dt = \frac{1}{2i} \left[\frac{e^{-(s-i)t}}{-(s-i)} - \frac{e^{-(s+i)t}}{-(s+i)} \right]_0^{2\pi} = \frac{1 - e^{-2\pi s}}{1 + s^2}$$

Invers laplacetransform

$$\mathscr{L}(f) \overset{s=\sigma+i\omega}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sigma+i\omega)t} f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \left(e^{-\sigma t} f(t)\right) dt = \hat{f}\left(e^{-\sigma t} f(t)\right)$$

Med denna likheten och formeln för Invers Fouriertransform:

$$e^{-\sigma t} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \mathscr{L}(f)(\sigma + i\omega) d\omega$$

Detta ger oss **Invers Laplacetransform** enligt

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\sigma+i\omega)t} \mathscr{L}(f)(\sigma + i\omega) d\omega *$$

Gäller för valfritt σ i definitionsstrimlan.

Sats 14.11

Om $\mathscr{L} = \dfrac{Q(s)}{P(s)}$ där Q och P är polynom.

Där $\mathrm{grad}(P) \geq 1 + \mathrm{grad}(Q)$. Då är

$$f(t) = \begin{cases} \sum\limits_{Re(s)<\sigma} \mathrm{Res}\left(e^{st} \frac{Q(s)}{P(s)}\right), & t > 0 \\ -\sum\limits_{Re(s)>\sigma} \mathrm{Res}\left(e^{st} \frac{Q(s)}{P(s)}\right), & t < 0 \end{cases}$$

Där σ beskriver det reella värdet för integralen i definitionsstrimlan.

Bevis finns i boken.

Exempel 4

$$\mathscr{L}(f) = \frac{4}{4 - s^2}, \qquad -s < Re(s) < 2$$

Funktionen har poler i $s \pm 2$. Det är dessa två värden som definierar definitionsstrimlan.

$$\begin{cases} \sum\limits_{s=-2} \text{Res}\left(\frac{4e^{st}}{4-s^2}\right) & t > 0 \to \text{Res}\left(\frac{4e^{(-2)t}}{-2(-2)}\right) = e^{-2t} \\ -\sum\limits_{s+2} \text{Res}\left(\frac{4e^{st}}{4-s^2}\right) & t < 0 \to \text{Res}\left(\frac{4e^{(2)t}}{-2(2)}\right) = e^{2t} \end{cases}$$

om $e^{-\sigma t}U$ är en Fouriertransformation av en distribution för $\alpha < \sigma < \beta$.

Då är $\mathscr{L}(U)(\sigma + i\omega) = \hat{f}(e^{-\sigma t}U)(\sigma, \omega)$.

$$\mathscr{L}\left(a_n\delta^{(n)} + a_{n-1}\delta^{(n-1)} + \ldots + a_0\delta\right) = a_nS^n + a_{n-1}S^{n-1} + \ldots + a_0$$

Vad händer om $\mathscr{L} = \dfrac{R(s)}{P(s)} = \underbrace{P_1(s)}_{\text{invers via } \delta} + \underbrace{\dfrac{Q(s)}{P(s)}}_{\text{invers via sats 14.11}}$,

där grad$(Q) <$ grad(P).

Exempel 6

$$
\begin{aligned}
\theta(t) &\overset{\mathscr{L}}{\to} \frac{1}{2} \qquad \sigma > 0 \\
e^{at}\theta(t) &\overset{\mathscr{L}}{\to} \frac{1}{s-a} \qquad \sigma > Re(a) \\
te^{at}\theta(t) &\overset{\mathscr{L}}{\to} -\frac{d}{ds}\frac{1}{s-a} = \frac{1}{(s-a)^2}, \qquad \sigma > Re(a) \\
t^k e^{at}\theta(t) &\overset{\mathscr{L}}{\to} \frac{K!}{(s-a)^{k+1}} \qquad \sigma > Re(a)
\end{aligned}
$$

Där $Re(s) = \sigma$.

Problemlösning

Om vi har $\mathscr{L}(f) = \frac{Q(s)}{P(s)}$ som i Sats 14.11. Då har vi att:

f för $t > 0$ bestäms av poler till **vänster** om definitionsstrimlan.

f för $t < 0$ bestäms av poler till **höger** om definitionsstrimlan.

Om **f** är **kausal** är definitionsstrimlan över höger halvplan.

Om **f** är **antikausal** är definitionsstrimlan över vänster halvplan.

Om **f** är **integrerbar** så finns imaginära axeln i strimlans inre.

Om **f** är **begränsad** så finns den imaginära axeln i strimlans inre **eller** på randen.

Exempel

Bestäm

a en kausal lösning till

b en integrerbar lösning till

$$y' - y = \delta$$

Lösning:

$$sY(s) - Y(s) = 1 \to Y(s) = \frac{1}{s-1} \begin{cases} \textbf{a} \ \hat{y} = \frac{1}{s-1}, Re(s) > 1 \to e^t\theta(t) \text{kausal, obegränsad, ej integrerbar} \\ \textbf{b} \ \hat{y} = \frac{1}{s-1}, Re(s) < 1 \to e^t\left(\theta(t) - 1\right) \end{cases}$$