15-10-2014

FÖRELASNING 15

Såhär får man 6.0 på Tenta 2007-04-12

1 Konvergent eller divergent?

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{3^k}$ är $\boxed{\text{konvergent}}$

Kvot kriteriet

$$\frac{\frac{(k+1)^3}{3^{k+1}}}{\frac{k^3}{3^k}} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} = \left(1-\frac{1}{k}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} \to \frac{1}{3} \text{ då } k \to \infty$$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{k^3}{3^k}\right)$ $\boxed{\text{divergent}}$ då termerna $\not\to 0$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{\sin\frac{1}{k}}{k}$

$$\begin{cases} \frac{\sin\frac{1}{k}}{k} \text{ är avtagande} \\ \lim_{k\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{k}}{k} = 0 \end{cases}$$

Leibniz $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Konvergent}}$

Alternativ

$$\left| (-1)^k \frac{\sin\left(\frac{1}{k}\right)}{k} \right| = \frac{\sin\frac{1}{k}}{k} \leq \frac{1}{k^2} \Rightarrow \text{abs konv.} \Rightarrow \boxed{\text{konvergent}}$$

d) Jmf. med integralen.

e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^{1/k}}{k} > \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent $\Rightarrow$ $\boxed{\text{divergent}}$

$\boxed{2}$ För vilka positiva heltal n, m kan $U(x,y) = x^n - y^m$ vara realdelen av en analytisk funktion $f(x+iy) = U(x,y) + iV(x,y)$?

Bestäm i dessa fall $f(z)$ om $f(1) = 1+2i$

$\boxed{\text{Harmonisk}: \Delta U = U''_{xx} + U''_{yy} = 0}$ (laplaceoperator)

* Vi deriverar U två gånger *

$$\Delta U = n(n-1)x^{n-2} - m(m-1)y^{m-2} = 0$$

Har lösningar

$$\boxed{\begin{matrix} m = n = 2 \\ m = n = 1 \end{matrix}}$$ $\leftarrow$ Vi tittar på dessa två fall.

$m = n = 1$ (med C.R ekv)

$U = x - y$

$U'_x = 1 = V'_y \Rightarrow V = y + g(x)$

$-U'_y = 1 = V'_x = g'(x) \Rightarrow g(x) = x + C$

$$f(x+iy) = \underbrace{(x-y)}_{U} + i\underbrace{(x+y+C)}_{V}$$

Vi vill ha en funktion av z.

trick: $f(x+i0) = x + ix + iC \Rightarrow \boxed{f(z) = (1+i)z + iC}$

$f(1) = (1+i)1 + iC = 1 + 2i \Rightarrow \underline{C = 1}$

$\Rightarrow \boxed{f(z) = (1+i)z + i}$

$\underline{m = n = 2}$

$u = x^2 + y^2$

$u'_x = 2x = v'_y \Rightarrow v = 2xy + g(x)$

$-u'_y = 2y = v'_x = 2y + g'(x) \Rightarrow g(x) = C$

$f(x+iy) = \underbrace{(x^2+y^2)}_{u} + i\underbrace{(2xy + C)}_{v}$

$f(x+i0) = x^2 + iC \Rightarrow \boxed{f(z) = z^2 + iC}$

$f(1) = 1 + iC = 1 + 2i \Rightarrow \underline{C = 2}$

$\Rightarrow \boxed{f(z) = z^2 + 2i}$

3

a) Bestäm alla rötter till ekvationen $13 + 5\cos z = 0$

Vi använder eulers formler

$$13 + 5\,\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0 \quad , \quad \left[w = e^{iz}\right]$$

$$\Rightarrow 26 + 5(w + w^{-1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 5w^2 + 26w + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow w^2 + \frac{26}{5}w + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(w + \frac{13}{5}\right)^2 - \frac{13^2}{5^2} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(w + \frac{13}{5}\right)^2 = \frac{169 - 25}{25} = \frac{144}{25} = \frac{12^2}{5^2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{w = -\frac{13}{5} \pm \frac{12}{5}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} w_1 = -5 \\ w_2 = -\frac{1}{5} \end{array}}$$

$$e^{iz_1} = w_1 = -5 \Rightarrow iz_1 = \ln 5 + i(\pi + 2\pi k)$$

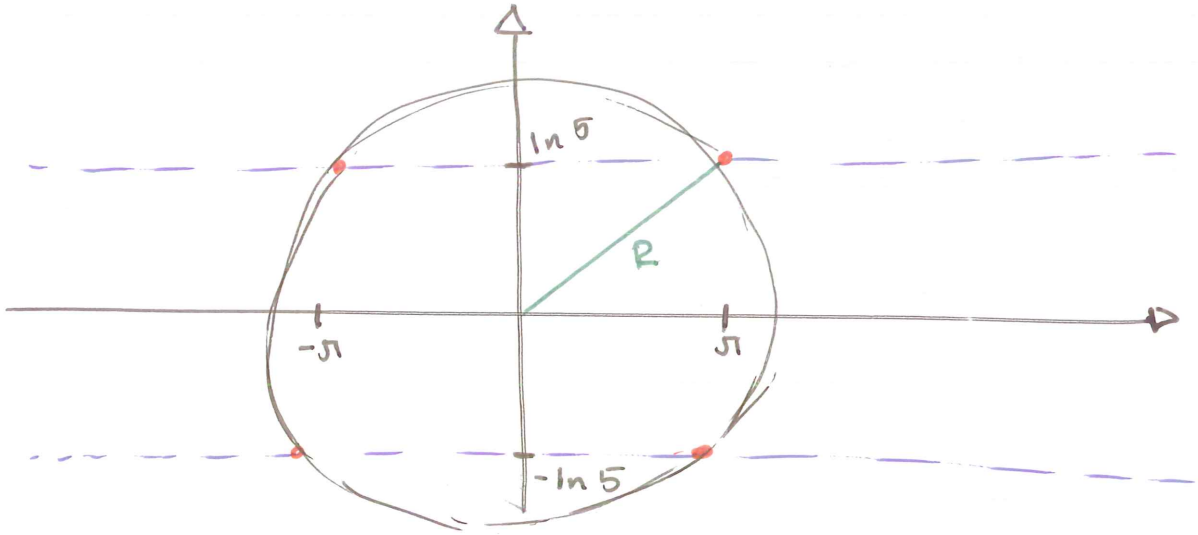
$$e^{iz_2} = w_2 = -\frac{1}{5} \Rightarrow iz_2 = -\ln 5 + i(\pi + 2\pi k)$$

$$\Rightarrow \boxed{z = \pm i \ln 5 + (\pi + 2\pi k)}$$

b) Funktionen $f = \frac{1}{13 + 5\cos t}$ är analytisk i en omgivning av $z = 0$. Då kan f' utvecklas i en potensserie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ kring origo. Vad är konvergensradien?

R = avstånd mellan origo & närmsta pol.

(ty termvis derivation påverkar ej R).



$$\boxed{R = \sqrt{(\ln 5)^2 + \pi^2}}$$

c) Bestäm a_0 och a_1 i potensserien i b).

$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &= f'(0) \\ a_1 &= f''(0) \end{aligned}}$$

formelsamling: $\boxed{c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}}$

$k = 0$ och 1 eftersom potensserien är derivatan.

$\boxed{4}$ Låt en talföljd a_n ha sambandet:

$$a_{n-2} = p a_{n-1} + q a_n, \quad a_0 = A, \; a_1 = B$$

$$0 < p < \frac{1}{2}, \quad 0 < q < \frac{1}{2}.$$

Visa att potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ har en konvergensradie $R > 1$.

$$a_{n+2} - p a_{n+1} - q a_n = 0$$

$$p(r) = r^2 - pr - q = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(r - \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} - q$$

$$\Leftrightarrow \boxed{r = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}}$$

$$\boxed{a_n = C r_1^n + C_2 r_2^n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = C \sum_{n=0}^{\infty} r_1^n \cdot z^n + D \sum_{n=0}^{\infty} r_2^n \cdot z^n$$

Krav för konvergens: $\boxed{|r_1 z| < 1, \; |r_2 z| < 1}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} |z| < \frac{1}{|r_1|} \\ |z| < \frac{1}{|r_2|} \end{array}} \qquad R = \min\left(\frac{1}{|r_1|}, \frac{1}{|r_2|}\right).$$

$$\sqrt{\frac{p^2}{4} + q} < \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \quad 0 < r_1 < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = 1$$

$$-\frac{3}{4} < r_2 < 0$$

Detta betyder att:

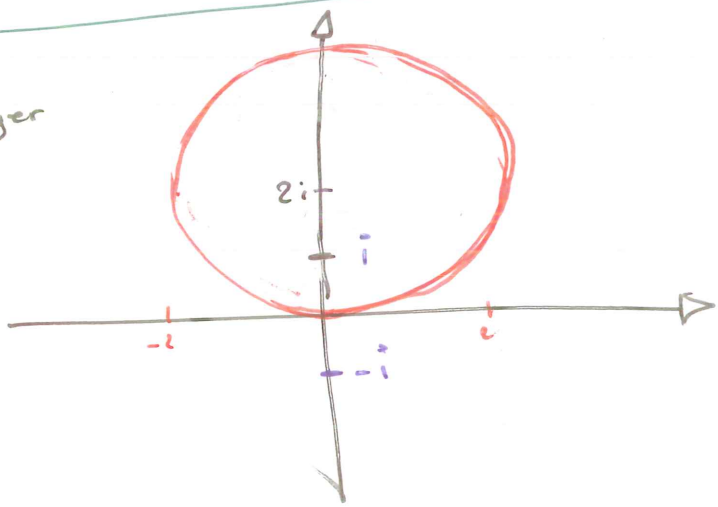
$|r_1| < 1$ och $|r_2| < 1$

$$\Rightarrow \boxed{R = \min\left(\frac{1}{|r_1|}, \frac{1}{|r_2|}\right) > 1}$$

#

$\boxed{5}$ a) Beräkna $I = \int_{|z-2i|=2} \frac{\cos(z)}{z^2+1}\,dz$ (positiv orient.)

Endast residyn i ligger innanför.



$$\Rightarrow I = \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{\cos z}{z^2+1} =$$

$$= 2\pi i \left.\frac{\cos z}{2z}\right|_{z=i} =$$

$$= \pi i \frac{e^{ii}+e^{-ii}}{2i} = \pi \frac{e^{-1}+e^{1}}{2} = \boxed{\pi \cosh(1)}$$

b) Beräkna integralen $I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{k+\sin\theta}\,d\theta$, $k > 1$.

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dt = \int_\alpha^\beta f(z(t)) \cdot z'(t)\,dt}$$

Använd denna regel baklänges!

$$\gamma : e^{i\theta}, \quad \theta : 0 \to 2\pi$$

$$z'(\theta) = ie^{i\theta}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{k + \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}} \cdot \frac{ie^{i\theta}\,d\theta}{ie^{i\theta}} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{kie^{i\theta} + \frac{(e^{i\theta})^2 - 1}{2}} \cdot \frac{ie^{i\theta}}{1}\,d\theta =$$

$$= \int_{|z|=1} \frac{2}{z^2 - 1 + 2ikz}\,dz, \quad k < 1.$$

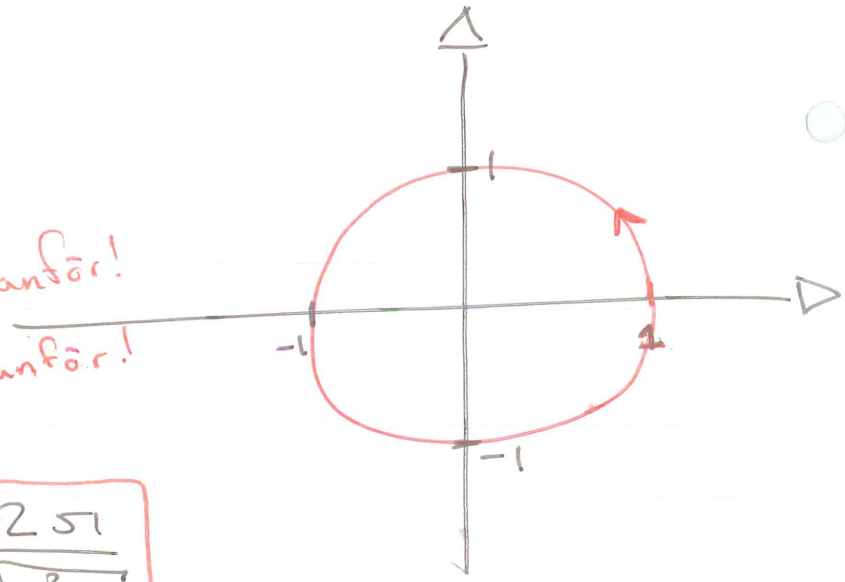
* Vi har överfört funktionen till en komplex integral som vi kan bestämma mha residykalkyl. *

Nollställen

$$z = -ik \pm i\sqrt{k^2-1}$$

$$\cancel{z_1 = -i(k + \sqrt{k^2-1})}$$ utanför!

$$z_2 = -i(k - \sqrt{k^2-1})$$ innanför!



$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2 - 1 + 2ikz} = \operatorname*{Res}_{z=z_2} \frac{1}{z^2 - 1 + 2ik} = \boxed{\frac{2\pi}{\sqrt{k^2-1}}}$$

6 Den 2π-periodiska funktionen f ges av:

$$f(t)=\begin{cases} \pi & \text{då } 0<t<1 \\ 0 & \text{då } 1<t<2\pi-1 \\ \pi & \text{då } 2\pi-1<t<2\pi \end{cases}$$

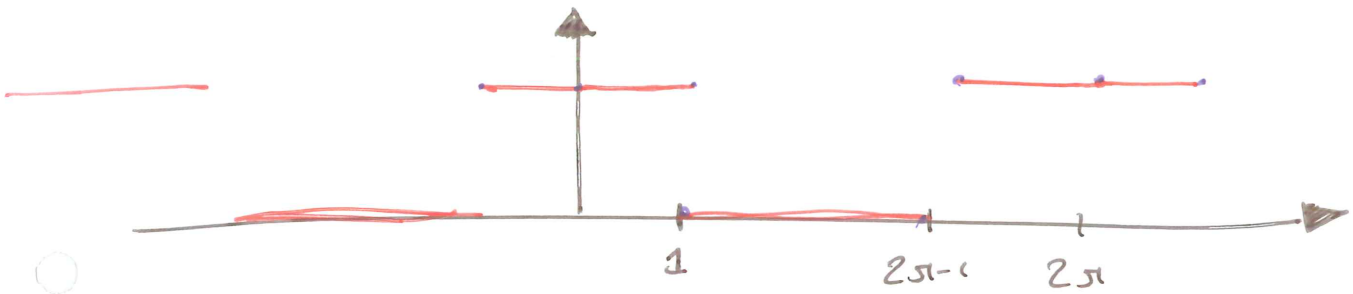
och har

en trigonometrisk fourierserie:

$$1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^2(k)}{k^2}\cos(kt).$$

NÄSTAN SAMMA SOM INL-UPPGIFT.

a) $\boxed{\text{Beräkna } \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^2(kt)}{k^2}}$



$$a_k=\frac{2\sin k}{k}$$

b) $\boxed{\text{Konvergerar serien likformigt?}}$

Kontinuerliga termer $U_k(t)=\frac{2\sin k}{k}\cos(kt)$

Men ej kontinuerlig seriesumma

SATS: $\left.\begin{array}{l}\sum_k U_k \text{ konv. likform.} \\ U_k \text{ är kontinuerl.}\end{array}\right\} \sum_k U_k(t) \text{ är kont.}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Ej likf. konv!}}$

c) Seriesumman approximeras med $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k^2}$. Uppskatta felet.

$$\left| \frac{\pi - 1}{2} - \sum_{k=1}^{100} \frac{\sin^2 k}{k^2} \right| = \left| \sum_{k=101}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k^2} \right| <$$

$$\leq \sum_{k=101}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \int_{100}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{100}^{\infty} = \boxed{\frac{1}{100}}$$