Övning 13.12 hittas i övningar kapitel 13.

Sats 13.3

$$f \in L_1 \Rightarrow \begin{cases} a) \quad \hat{f}(\omega) \quad \text{är kontinuerlig och bergänsad.} \\ \\ b) \quad \hat{f}(\omega) \underset{\omega\to\infty}{\to} 0 \end{cases}$$

Bevis:

$$a) \qquad \left|\hat{f}(\omega)\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{-i\omega t} f(t)\right| dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt \leq \|f\|.$$

$b)$Se s.266, successiv approximation via trappfunktioner.

Notera:

Om $D^n f \in L_1$, så är $F(D^n f) = (i\omega)^n \hat{f}(\omega)$ **begränsad**.
Därmed $\left|\hat{f}(\omega)\right| \leq \dfrac{C}{|\omega|^n}$.

Fouriers inversionsformel

Fouriers inversionsformel.

$$f \in L_1 \Rightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \mathrm{e}^{i\omega t} d\omega$$

Notera: inversionsformeln och tabellen, läs tabellen i omvänd ordning.

Bevis s.266-267. Då $f \in L_1$ alltså då

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

I så fall är $\left|\hat{f}(w)\right|$ begränsad, kontinuerlig och

$$\hat{f}(\omega) \rightarrow \text{ då } |\omega| \rightarrow \infty$$

Om

$$f(t) \xrightarrow{F} \hat{f}(\omega) \xrightarrow{F} 2\pi f(-t)$$

$$(F) f(\hat{\omega}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \hat{f} d\omega$$

$$= 2/pi \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(-t)} \hat{f}(w)$$

Exempel 1

$$F\left(\mathrm{e}^{-|t|}\right) = \frac{2}{1+\omega^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2\mathrm{e}^{i\omega t}}{1+\omega^2} d\omega = \mathrm{e}^{-|t|}$$

Notera att:

$$f(t) \xrightarrow{F} \hat{f}(\omega) \xrightarrow{F} 2\pi f(-t)$$

eftersom (m.h.a inversionsformeln)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\hat{f}(\omega)d\omega = 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(-t)}\hat{f}(\omega)d\omega = 2\pi f(-t)$$

Så om man läser tabellen åt andra hållet, byter $t \to -t$ och multiplicerar med 2π så är även detta en **Fouriertransform**.

Exempel 2

Bestäm

$$F\left(\frac{\sin t}{t}\right)$$

Se tabellen

$$\theta(t+1) - \theta(t-1) \qquad \overset{F}{\to} \qquad 2\frac{\sin\omega}{\omega} \qquad \overset{F}{\to} \qquad 2\pi\left(\theta(1-t) - \theta(-1-t)\right)$$

Alltså

$$F\left(\frac{\sin t}{t}\right) = \pi\left(\theta(\omega+1) - \theta(\omega-1)\right)$$

Exempel 3

Finn en Fouriertransformerbar lösning till

$$y' + y = e^{-2t}\theta(t) = e^{-2t}\theta(2t)$$

Transformera ekvationen: (regel 16 och skalning)

$$(1+i\omega)\hat{y} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+i(\omega/2} = \frac{1}{2+i\omega}$$

Alltså

$$y(t) = F^{-1}\left(\frac{1}{(1+i\omega)(2+i\omega)}\right) F^{-1}\left(\frac{1}{1+i\omega} - \frac{1}{2+i\omega}\right) = e^{-t}\theta(t) - e^{-2t}\theta(2t)$$
$$= \left(e^{-t} - e^{-2t}\theta(2t)\right)$$

Sats 13.5 Faltningssatsen

$$F(f*g) = F(f)\cdot F(g)$$

$$f*g = f^{-1}(F(f)\cdot F(g)1$$

Exempel 4

$$\begin{cases} f(t) = e^{-t}\theta(t) \\ g(t) = e^{-t}\theta(t) \end{cases}$$

Beräkna $f*g \to$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-\tau)}\theta(t-\tau)e^{-2\tau}\theta(\tau)d\tau = \int_{0}^{\infty} e^{-(t-\tau)e^{-2\tau}\theta(t-\tau}d\tau = \theta(t)\int_{0}^{t} e^{-(t-2)}e^{-2\tau}d\tau$$

$$= \theta(t)e^{-t}\int_{0}^{t} e^{-\tau}d\tau = \theta(t)e^{-t}\left[e^{-\tau}\right]_0^t = \theta(t)e^{-t}\left(1-e^{-t}\right) f^{-1}\left(\frac{1}{1+i\omega}\cdot\frac{1}{2+i\omega}\right) = f^{-1}\left(\frac{1}{1+i\omega}-\frac{1}{2+i\omega}\right) =$$

$$g(t) = e^{-2t}\theta 2t \qquad \xrightarrow{f} \qquad n$$

Parsevals formel

Om $f, g \in L^2$ dvs

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f|dt < \infty$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)}g(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(\omega)}g(\hat{\omega})d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\hat{g}(\omega)d\omega dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)}e^{i\omega t}dt\hat{g}(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}$$

Specialfall $f = g$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(\omega)\right|^2 d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f| dt < \infty$$

Exempel - Parseval

$$\int_{0}^{\infty} e^{-t} \frac{\sin t}{t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-t}\theta(t)}_{f(t)} \underbrace{\frac{\sin t}{t}}_{g(t)} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\frac{1}{1+i\omega}} \pi \left[\theta(\omega 0 1) - \theta(\omega - 1)\right] d\omega$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{1}{1-i\omega} d\omega = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{1+i\omega}{1+\omega^2} d\omega = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+\omega^2} d\omega 0 i \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{\omega}{1+\omega^2} d\omega$$

$$= \frac{1}{2} \left[arctan(1) - arctan(-1)\right] = \frac{\pi}{4}$$

$$\mathscr{F}\left(2\frac{\sin t}{t}\right) = 2\pi \left[\theta(-t+1) - \theta(-1-1)\right] = 2\pi \left[\theta(t+1) - \theta(t-1)\right]$$

Fourier & distributioner

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} g(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(\omega)} \hat{g}(\omega) d\omega =$$

$$= \begin{cases} \hat{f}(\omega) = \overline{\phi(\omega)} \\ w\pi f(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \overline{\phi(\omega)} d\omega = \overline{\hat{\phi}(-t)} \\ \overline{f(t)} = \frac{1}{2\pi} \phi(\hat{t}) \end{cases} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{g(t)}^{\text{distribution}} \underbrace{\phi(\hat{t})}_{\text{testfunktion}} = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\hat{g}(\omega)}_{\text{Fouriertransformation är en distribution}} \phi(\omega) d\omega$$

$$\mathcal{S} = \{\phi \in \mathcal{C}^{\infty} \text{ och } t^{Kd^n \phi(t)} \text{ begränsad } \}$$

Tempererad distribution är en linjär och kontinuerlig avbildning från $\mathcal{S}$ till de komplexa talen.

Fouriertransformen $\hat{U}$ är en tempererad distribution via

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(\hat{\omega}) \phi(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} U(t) \phi(\hat{t}) dt$$

Kallas för Tempererade distributioner. De är linjära och kontinuerliga samt avbildar $\mathcal{S} \to \mathbb{C}$.