Låt **överföringsfunktionen** $H(s) = \dfrac{1}{4 + (s + \frac{1}{10})^2}$.
För vilka ω är **amplitudfunktionen** $A(\omega)$ störst?

Snabbt svar: Ungefär närmast **polerna** i **H(s)**.

Polerna till **H(s)** ligger i $s = \frac{1}{10} \pm 2i$, alltså blir $\omega = \pm 2$.

$$A(\omega) = |H(i\omega)| = \left| \frac{1}{4 + (i\omega + \frac{1}{10})^2} \right|$$

Detta är standardkomplexmatematik och svaret blir:

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(4.01 - \omega^2 + \frac{\omega}{25}}} \Rightarrow \text{Vi har max där} \frac{d}{dw}(\sqrt{(4.01 - \omega^2} + \frac{\omega}{25}) = 0$$

$$\text{dvs } w^2 = 3.99$$

H(s) har poler i $s = \pm 21 - \frac{1}{10}$ Detta är sats 12.5 i boken.

> **Sats 12.5**:
>
> Låt **S** vara ett linjärt, tidsinvariant och stabilt system, med frekvensfunktionen $H(\mathbf{S})$.
>
> Om **insignalen** $\omega(t)$ är periodisk med perioden $\mathbf{T} = \frac{2\pi}{\Omega}$ så blir även **utsignalen** $y(t)$ periodisk med perioden $\mathbf{T}$. Då ges sambanden mellan **Fourierkoefficienterna** för insignal och utsignal är
>
> $$c_k(y) = c_k(\mathbf{S}\omega) = H(ik\Omega)c_k(\omega)$$

Detta är sats 12.5 från anteckningarna.

> **Sats 12.5**:
>
> Låt **S** vara ett linjärt, tidsinvariant och stabilt system, med frekvensfunktionen $H(\mathbf{S})$.
>
> Om **insignalen** $\omega(t)$ är periodisk med perioden $\mathbf{T} = \frac{2\pi}{\Omega}$ så blir även **utsignalen** $y(t)$ periodisk med perioden $\mathbf{T}$.

Troliggörs av:

Om alla serier konvergerar

$$\omega(t) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} c_k(\omega)\mathrm{e}^{ik\Omega t} \xrightarrow{s} y(t) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} c_k(\omega)H(ik\Omega)\mathrm{e}^{ik\Omega t} =$$
$$= \sum_{s=-\infty}^{\infty} c_k(\omega)A(k\Omega)\mathrm{e}^{i(k\Omega t+\phi(k\Omega))}$$

Notera: alla frekvenser i utsignalen har sitt ursprung i insignalen.

Övning 12.18 och 12.3 hittas i övningar för kapitel 12.

Kapitel 13: Fouriertransformation

Enligt definition är

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-s\tau}h(\tau)d\tau$$

eller

$$H(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\omega\tau}h(\tau)d\tau$$

Definition: Fouriertransformation

$$\hat{f} \equiv (\mathbf{F}f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\omega\tau}f(\tau)d\tau$$

Exempel 1:

$$f(t) = \theta(t+a) - \theta(t-a)$$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}(\theta(t+a) - \theta(t-a))dt = \int_{-a}^{a} e^{-i\omega t}dt = \begin{cases} 2a, & \omega = 0 \\ \left[\dfrac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\right]_{-a}^{a} = \dfrac{sin\,(\omega a)}{\omega a}, & \omega \neq 0 \end{cases}$$

Exempel 2:

$$f(t) = \mathrm{e}^{-t^2} \qquad \rightarrow$$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t - t^2} dt = \int_{-a}^{a} e^{-(t^2 + i\omega t + \frac{\omega^2}{4} + \frac{\omega^2}{4})} dt = e^{-\frac{\omega^2}{4}} \int_{-a}^{a} e^{-(t + \frac{i\omega}{2})^2} dt = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

(Se sammanfattning 9 samt s.277 i **gamla** Flerdimensionell analys.)

Exempel 3:

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2} \qquad \rightarrow$$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-i\omega t}}{1+t^2} dt = \left[\begin{array}{c} \text{Residylkakyl} \\ \\ \textbf{Sats 13.3} \\ \\ \text{Funktionsteori (1997)} \end{array} \right] = \begin{cases} 2\pi i \underset{z=i}{Res}(\dfrac{\mathrm{e}^{-i\omega z}}{1+z^2}),\ \omega \leq 0 \\ -2\pi i \underset{z=-i}{Res}(\dfrac{\mathrm{e}^{-i\omega z}}{1+z^2}),\ \omega \geq 0 \end{cases} =$$

$$= [\text{Regel 4}] = \begin{cases} \pi\, \mathrm{e}^{\omega},\ \omega \neq 0 \\ \\ \pi\, \mathrm{e}^{-\omega},\ \omega \geq 0 \end{cases} = \pi \mathrm{e}^{-|\omega|}$$

Exempel 4:

$$f(t) = e^{-|t|} \qquad \rightarrow \qquad \hat{f}(\omega) = \int_{infty}^{\infty} e^{-i\omega t - |t|} = \int_{-\infty}^{0} e^{-i\omega t + t} + \int_{0}^{\infty} e^{-i\omega t - t} =$$

$$= \left[\frac{e^{t(1-i\omega)}}{1-i\omega} \right]_{-\infty}^{0} - \left[\frac{e^{-t(1-i\omega)}}{1+i\omega} \right]_{0}^{\infty} = \frac{1}{1-i\omega} + \frac{1}{1+i\omega} = \frac{2}{1+\omega^2}$$

Obs! Det finns olika saker som bär namnet *Fourier*, t.ex. för periodiska funktioner $f(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)\mathrm{e}^{ikt}$, där $c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-ikt} f(t) dt$

Räknelagar

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \overset{F}{\rightarrow} c_1 \hat{f}_1(\omega) + c_2 \hat{f}_2(\omega) \tag{1}$$

$$f(at) \overset{F}{\rightarrow} \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right) \tag{2}$$

$$f(t - t_0) \overset{F}{\rightarrow} e^{-i\omega t_0} \hat{f}(\omega) \tag{3}$$

$$e^{i\omega_0 t} f(t) \overset{F}{\rightarrow} \hat{f}(\omega - \omega_0 \tag{4}$$

$$\overline{f(t)} \overset{F}{\rightarrow} \overline{\hat{f}(-\omega)} \tag{5}$$

$$\frac{df}{dt} \overset{F}{\rightarrow} i\omega \hat{f}(\omega) \tag{6}$$

$$t f(t) \overset{F}{\rightarrow} i \frac{d}{d\omega} \hat{f}(\omega) \tag{7}$$

Bevis av (2): Variabelsubstitution. EN följd är att jämna funktioner har jämn **Fouriertransform** och udda funktioner har udda fouriertransform (använd $a = -1$).

Bevis av (6): Om både f, $f' \in \mathbf{L}_1$, så måste $f(t)$ ha gränsvärde noll vid $\pm\infty$. Detta och partiell integration fullföljer beviset. Se s.256-258 samt övningshäftet.

Exempel 5:

$$f(t) = \mathrm{e}^{-2(t-7)^2}$$

$$\mathrm{e}^{-t^2} \overset{F}{\rightarrow} \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\omega^2/4}$$

$$\mathrm{e}^{-2t^2} = \mathrm{e}^{-(\sqrt{2}t)^2} \overset{F}{\rightarrow} \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-(\omega/\sqrt{2})^2/4} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-\omega^2/8}$$

$$\mathrm{e}^{-2(t-7)^2} \overset{F}{\rightarrow} \mathrm{e}^{-i7\omega}\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\omega^2/4}$$

Övning 13.10 hittar ni i övningar för kapitel 13.