Exempel

$$y' + \frac{1}{RC}y = \frac{1}{RC}\omega$$

Vi söker impulssvaret:

$$\frac{d}{dt}(e^{\frac{t}{RC}y}) = e^{\frac{t}{RC}}y' + \frac{1}{RC}e^{\frac{t}{RC}}y = \frac{1}{RC}e^{\frac{t}{RC}}\delta(t)$$

$$\frac{d}{dt}(e^{\frac{t}{RC}}y) = \frac{1}{RC}\delta$$

$$e^{\frac{t}{RC}}y(t) = \frac{1}{RC}\theta(t) + C \qquad \text{C=0 eftersom kausal lösning sökes}$$

$$y(t') = \frac{1}{RC}e^{\frac{-t}{RC}}\theta(t')$$

En följd U_n av distributioner konvergerar i distributionsmening till U då $n \to \infty$ om alla testfunktioner Φ i D, $< U_n, \Phi > \to < U, \Phi >$ då $n \to \infty$

Definition: $\sum_{k=1}^{\infty} U_k$ konvergerar mot S om

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k \underset{n\to\infty}{\to} S$$

i distributionsmening. Vi kan då för alla **testfunktioner** skriva

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(t)\Phi(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} U_k(t)\Phi(t)dt$$

Finessen är att derivatan av **S** alltid kan beräknas termvis:

$$< S', \Phi > = - < S, \Phi' > = -\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} U_k(t)\Phi' dt = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} U_k'(t)\Phi(t)dt$$

Dvs

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} U_k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} U_k'$$

Sats 11.7

Definition: Translationsoperatorn $T_a U$ är distributionen som har samma effekt som U på $T_{-a}\Phi$.

$$< T_a U, \Phi >= \int_{-\infty}^{\infty} U(t-a)\Phi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} U(\tau)\Phi(\tau + a)d\tau =< U, T_{-a}\Phi >$$

Definition: U är periodisk om

$$T_a U = U$$

Diracs staket figur1

Exempel

$$U = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-k)$$

Är en periodisk distribution.

Definition: U är periodisk om

$$U(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\Omega t}, \qquad c_k = \frac{1}{T} \int_{\text{period}} U(t) e^{ik\Omega t} dt$$

$$T\Omega = 2\pi$$

Derivering av periodiska funktioner är då enkelt:

$$U' = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{ik\Omega c_k e^{ik\Omega t}}_{c_{k(U')}}$$

Övning 11.22

Figur finns i lösningar för Kapitel 11.

Lösning:

Bestäm f', f'' i distributionsmening. Bestäm Fourierserien för **f**.

$$f(t) \text{ har inga språng } \rightarrow$$

$$f'(t) = \begin{cases} \frac{2}{T} & (-T/2, 0) \\ -\frac{2}{T} & (-T/2, 0) \\ \quad\vdots & \\ \text{upprepa periodiskt} & \end{cases}$$

$$f'' = \underbrace{0}_{\text{punktvis derivata}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik2\pi t/T}$$

Där koefficienten $\mathbf{c_k}$

$$c_k = \frac{1}{T} \int\limits_{-T/4}^{3T/4} \{\frac{-}{4}\delta(t) + \frac{4}{T}\delta(t - \frac{T}{2})\} e^{-ik2\pi t/T} dt =$$

$$= \frac{4}{T^2}\left[-\mathrm{e}^{-ik2\pi(0)/T} + \mathrm{e}^{-ik2\pi\frac{T}{2T}}\right] = \frac{4}{T^2}\left[(-1)^k - 1\right]$$

$$c_k(f'') = ik\frac{2\pi}{T} \cdot c_k(f') = -k^2\left(\frac{2^2\pi^2}{T^2}\right) \cdot c_k(f)$$

Vi kan nu uttrycka Fourierserien **f** som:

$$c_k(f) = \frac{4}{T^2}\left[(-1)^k - 1\right](-1)\left(\frac{T}{2\pi k}\right)^2 = \frac{1 - (-1)^k}{\pi^2 k^2}$$

$$f = c_0(f) + \sum_{k \neq 0}\left(\frac{1 - (-1)^k}{2\pi}\right)\mathrm{e}^{ik2\pi t/T}$$

Definition:

$$\Phi \circledast u = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t-\tau)U(\tau)d\tau$$

$$\Phi \circledast \delta = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t-\tau)\delta(\tau)d\tau = \Phi(t)$$

$$\Phi \circledast \delta' = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t-\tau)\delta'(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi'(t-\tau)\delta(\tau)d\tau = \Phi'(t)$$

Definition: $U \circledast V$ är definierad om:

- om någon av **U** eller **V** har kompakt stöd.
- om både **U** och **V** är kausala.

Sats 11.8 räknelagar

$$U \circledast V = V \circledast U$$

$$U \circledast (V+W) = U \circledast V + U \circledast W$$

$$U \circledast (V \circledast W) = (U \circledast V) \circledast W$$

$$\delta \circledast U = U$$

$$\frac{d}{dt}(U \circledast V) = \frac{du}{dt} \circledast V = U \circledast \frac{dV}{dt}$$

Kapitel 12

Låt $w(t) = e^{st}, s \in \mathbf{C}$

$$S(w) = h * w = w * h$$

dvs

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{s(t-\tau)} h(\tau) d\tau = e^{st} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s\tau} h(\tau) d\tau}_{H(s),\text{ överföringsfunktion}}$$

$$H(s) = \frac{S(e^{st}}{e^{st}}$$

Om $s = iw$ (imaginärt)

$$H(iw) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iw\tau} h(\tau) d\tau \qquad \textbf{Frekvensfunktion}$$

$$H(iw) = A(w) e^{i\phi(w)} \qquad |H(iw)| = A(w) \qquad \textbf{amplitudfunktion}$$

där $\phi(w)$ är en **fasfunktion**.

Exempel - lågpassfilter

$$\begin{cases} h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} \theta(t) \\ w(t) = e^{st} \end{cases} \quad S(e^{st}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{s(t-\tau)} \frac{1}{RC} e^{-\tau/RC} \theta(\tau) d\tau$$

$$= e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\tau(s+1/RC)}}{RC} \theta(\tau) d\tau =$$

$$= e^{st} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{RC} e^{-/tau(s+1/RC)} d\tau =$$

$$= e^{st} \left[\frac{(-1)e^{-\tau(s+1/RC}}{1+RCS} \right]_0^{\infty} = e^{st} \frac{1}{1+RCS}$$

För filter då $Re(s) > \frac{-1}{RC}$

$$H(S) = \frac{1}{1+RCS}, \qquad A(w) = |\frac{1}{1+RCwi}|$$

$$A(w) = |\frac{1-RCwi}{1+R^2C^2w^2}| = \frac{\sqrt{1+(RC2)^2}}{1+(RCw^2}$$

Sats 12.2 Ett linjärt och tidsinvariant system:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y, + a_0 y = b_m w^{(n)} + \ldots b_1 w' b_0 w$$

Har en överföringsfunktion

$$H(S) = \frac{b_m S^m + \ldots + b_1 S + b_0}{S^n + a_{n-1}S^{n-1} + \ldots + a_1 S + a_0}$$

Bevis:

Sätt in $w = e^{St}$ och kräv att $y = H(S)e^{St}$.

Detta ger:

Sats 12.3 Systemet

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bw \\ y = Cx + Dw \end{cases}$$

har **överföringsfunktionen**

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$