Exempel Vi har en rektangelpuls med bredd Δ och area 1

$$P_\Delta = \frac{1}{\Delta}[\theta(t) - \theta(t-\Delta)]$$

figur1

Hur är $\lim_{\Delta\to 0^+}(P_\Delta * w)$ för en insignal w?

(Vi vill behandla $\lim_{\Delta\to 0^+}(P_\Delta(t))$ ungefär som funktioner)

$$P_\Delta * w = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Delta}[\theta(t-\tau) - \theta(t-\tau-\Delta)]w(\tau)d\tau =$$

$$= \frac{q}{\Delta}\int_{t-\Delta}^{t} w(\tau)d\tau = [\text{Använd medelvärdessatsen}] =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\Delta w(t-3\Delta)$$

$$\Longrightarrow \lim_{\Delta\to 0^+}(P_\Delta * w) = \lim_{\Delta\to 0^+}\frac{\Delta}{\Delta}w(t-3\Delta) = \mathbf{w(t)}$$

Definition av distribution

En *distribution* U är en linjär och kontinuerlig avbildning som till varje testfunktion Φ tillordnar ett tal.

$< U, \Phi >$ eller $\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\Phi(\tau)d\tau$

Definition av testfunktion

$D =$ en *testfunktion* Φ sådan att:

$\Phi \equiv 0$ utanför en begränsad mängd (kallas kompakt) och

Φ är C^∞, det vill säga deriverbar hur många gånger som helst

Hur många funktioner har vi som uppfyllar detta?

Det är svår att hitta sådana funktioner men ett exempel (det enda) man känner till är:

$$\Phi(t) = e^{\frac{1}{t(t-1)}}(\theta(t) - \theta(t-1)$$

figur2 **Saker vi bör notera:**

1. Vanliga funktioner fungerar som distributioner $< u_f, \Phi >= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\Phi(\tau)d\tau$

Detta bör du enkelt komma ihåg: $u = v \Leftrightarrow < u, \Phi >=< v, \Phi >$

Derivatan i distributionsmening

$$< u', \Phi >= - < u, \Phi' >$$

Exempel $u = \theta$

$$\begin{aligned} < \theta', \Phi > &= - < u, \Phi' > \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\tau)\Phi' d\tau \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \Phi'(\tau) d\tau \\ &= [-\phi(t)]_0^{\infty} \\ &= \Phi(0) \end{aligned}$$

Räkneregler

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(cu)' = cu'$$

$$(f(t)u)' = f'u + fu'$$

Notera att

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

Det är ett väldigt bra sätt att direkt förenkla beräkningar. **Exempel**

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases} \Rightarrow f(t) = f_1(t)\theta(t-a)$$

$$< u_f', \phi >= -\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\Phi' d\tau = -\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)\theta(\tau - a)\Phi' d\tau$$

$$= -\left[f_1(t)\Phi(t)\right]_a^{\infty} + \int_a^{\infty} f_1'\Phi(\tau)d\tau$$

$$= f_1(a)\Phi(a) + < f_1', \Phi >=< f_1(a)\delta_a, \Phi > + < f_1', \Phi >$$

Sats 11.4

Funktionen **f** är styckvis deriverbar, men **brytpunkten** $t_1, t_2, \ldots, t_n$ och

språng $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$

$$(u_f)' = f' + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \delta_{t_i}$$

Där f' är den punktvisa derivatan av f.

$$(u_f)' = \begin{cases} f_0' & t < t_1 \\ f_1' & t_1 < t < t_2 \\ f_2' & t_2 < t < t_3 \\ f_3' & t_3 < t \end{cases}$$

figur3

Derivera δ

$$< \delta', \Phi >= - < \delta, \Phi' >= -\Phi'(0)$$

För en godtycklig funktion får vi

$$(f(t)\delta(t))' = f'(t)\delta(t) + f(t) + \delta'(t) = f(0)\delta'(t)$$

$$f(t)d'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(t)\delta(t) =$$
$$= f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)$$

Exempel 9

figur4

$$f(t) = \left(1 + \mathrm{e}^{2t}\right)\theta(t)$$

Beräkna $(u_f)''$

$$(u_f)' = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \\ 2\mathrm{e}^{2t} & t > 0 \end{cases} + 2\delta(t) = 2\mathrm{e}^{2t}\theta(t) + 2\delta(t)$$

$$(u_f)'' = 4\mathrm{e}^{2t}\theta(t) + 2\delta(t) + 2\delta'(t)$$

Integrering av distribution

Till varje distribution **u** finns en primitiv distribution **V**, sådan att $V' = u$. Om V', då är även $(V + C))' = u$ där C är en konstant.

ffl

Exempel I

$\theta + C$ är en primitiv till δ.

Exempel II

$f(t) = t\theta(-1)$. Finn en primitiv.

figur5

$$\text{Styckvis primitiv} \begin{cases} C_1 & t < 1 \\ \frac{t^2}{2} + C_2 & t > 1 \end{cases}$$

C_1 och C_2 måste anpassas så att primitiven **inte** har ett språng, dvs att $C_1 = \frac{1}{2} + C_2$.

$$F = \begin{cases} c_1 & t < 1 \\ \frac{t^2}{2} + C_1 - \frac{1}{2} & t > 1 \end{cases} = C_1 + \begin{cases} 0 & t < 1 \\ \frac{t^2}{2} + C_1 - \frac{1}{2} & t > 1 \end{cases}$$