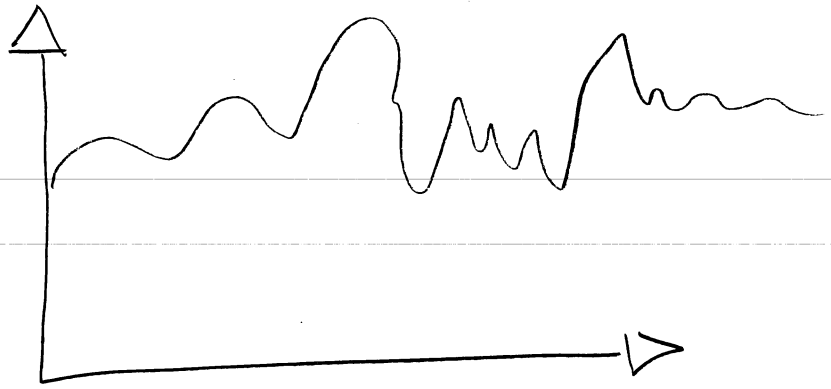
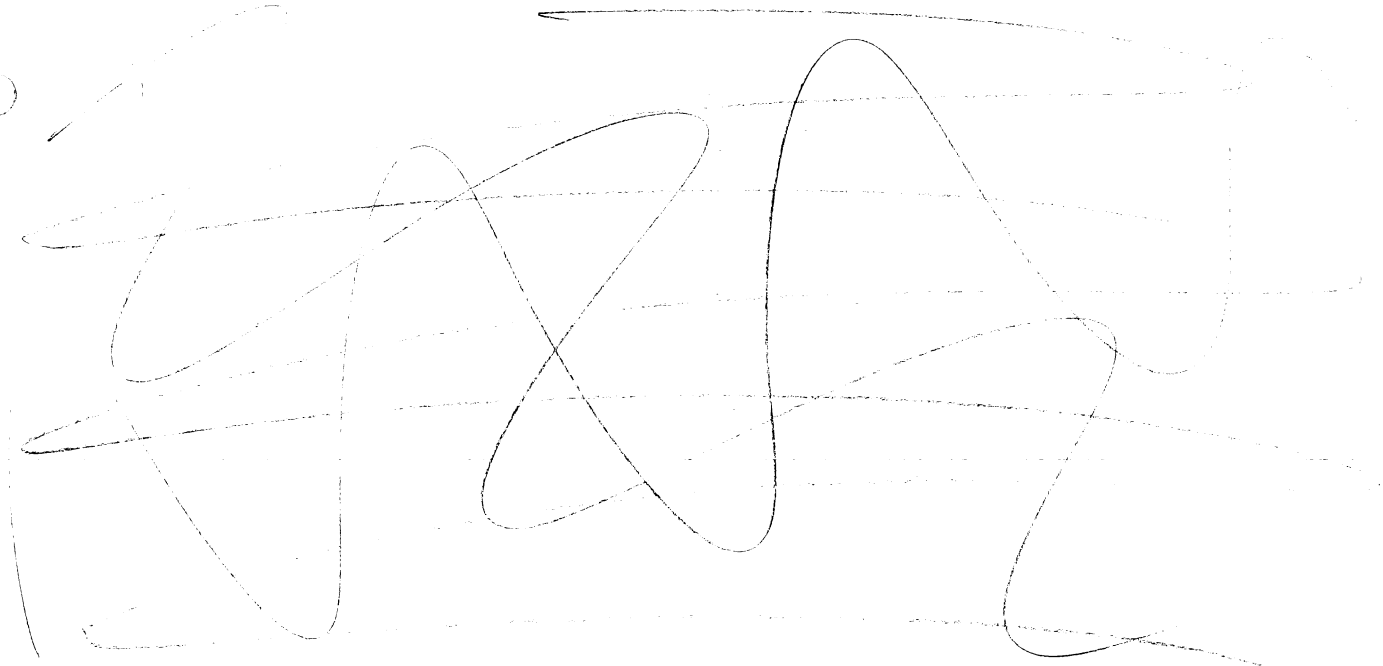
FÖRELÄSNING 1

Tidigare har vi arbetat med mycket specifika funktioner, men i många fall behövs mer avancerade sätt att beskriva funktionerna.



Det är kört om vi försöker hitta ett sätt $e^x \cdot \sin(kx) + 13t \ldots$ för att beskriva funktionen ovan.

Istället gör vi <u>Fourieranalys.</u>



FÖRELÄSNING 1

TALFÖLJDER

Def. En följd f är en funktion definierad på $\mathbb{Z}$ eller delmängd av $\mathbb{Z}$.

$$f = \langle f_n \rangle = \langle f_0, f_1, f_2, \ldots \rangle$$

Ex. om $f(n) = n^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$
är $f = \langle n^2 \rangle$ eller $f_n = n^2$

Def. Aritmetiska följder:
Följden x kallas aritmetisk om $x_n = x_{n-1} + d$, d kallas differens.

Ex. I en aritmetisk följd är $x_8 = 13$ och $x_{10} = 23$

Vad är x_n?

Låt $x_0 = a$

Då gäller att

$$x_1 = a + d \ , \ x_2 = (a+d) + d = a + 2d$$

$$\Rightarrow x_n = a + nd$$

$$\begin{cases} x_8 = a + 8d = 13 \\ x_{10} = a + 10d = 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 40 = 13 \\ 2d = 10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -27 \\ d = 5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x_n = -27 + 5n}$$

<u>Def:</u> En följd kallas <u>geometrisk</u> om $x_n = r x_{n-1}$, r kallas kvot.

<u>Ex.</u> $x_{14} = 16$ och $x_{17} = 128$

$$x_0 = a \ , \ x_1 = r \cdot a \ , \ x_2 = r(ra) = r^2 a$$

$$\boxed{x_n = r^n \cdot a}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{14} = a \cdot r^{14} = 16 \\ x_{17} = a r^{17} = 128 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 128/16 = 8 \\ a r^{14} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} r = 2 \\ a = 2^{-10} \end{matrix}}$$

Def Givet följden $a = \langle a_0, a_1, \dots \rangle$ så defineras summaföljden till a genom:

$$S_k = \sum_{j=0}^{k} a_j \quad , \text{ med } S = \langle S_n \rangle$$

Från endim gäller

$$\boxed{\sum_{j=0}^{k} ar^j = a\frac{r^{k+1}-1}{r-1}}$$

Sats Den geometriska följden $g = \langle ar^n \rangle$, $r \neq 1$ har summa-följden $\boxed{\sum g = \left\langle \frac{ar}{r-1} r^k + c \right\rangle}$ där c beror på var summationen börjar.

Alternativt

$$S = \sum_{k=2}^{n} = x^k = x^2 + x^3 + \dots + x^n$$

$$Sx = x^3 + x^4 + \dots + x^{n+1}$$

$$Sx - S = x^{n+1} - x^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{S = \frac{x^{n+1} - x^2}{x-1}}$$

Härled varje gång

Bevis

$$\sum_{j=k_0}^{k} ar^j = ar^{k_0} \cdot \frac{r^{k-k_0+1}-1}{r-1} =$$

$$= ar\frac{r^k}{r-1} \underbrace{- \frac{ar^{k_0}}{r-1}}_{C}$$

(konstant då termen ej innehåller k).

Specialfall: Låt $X_k = \boxed{Y_k - Y_{k-1}}$

$$\sum_{k=1}^{n} X_k = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_{n-1} + X_n$$

$$= (Y_1 - Y_0) + (Y_2 - Y_1) + (Y_3 - Y_2) + \ldots +$$
$$+ (Y_{n-1} - Y_{n-2}) + (Y_n - Y_{n-1}) = \boxed{Y_n - Y_0}$$

Varannan term tar ut varandra förutom Y_0 & Y_n! $\boxed{\text{Teleskopsumma}}$

Ex Summera $\sum_{k=2}^{100} \lg \frac{k}{k-1} = \sum_{k=2}^{100} \lg(k) - \lg(k-1)$

logaritmlag

Samma metod som innan ger

$= \lg(100) - \lg(1) = 2 + 0 = \boxed{2}$

Def $\boxed{\text{Potenssumma} \quad S_n^{(M)} = \sum_{k=1}^{n} k^M}$

$$S_n^{(0)} = \sum_{k=1}^{n} k^0 = 1+1+1+1+1+\ldots = \sum_{k=1}^{n} 1 = n.$$

$$S_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} k^1 = \underbrace{\frac{n(n+1)}{2}}_{\text{medelvärde}}$$

$$\boxed{S_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n} \quad * \text{ SATS}$$

Bevis

$$n^3 = n^3 - 0^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 - (k-1)^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 - (k^3 - 3k^2 + 3k - 1) =$$

Lös ut

$$= 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = n^3$$

Lös ut term ett och få *!

REKURSIONSEKVATIONER

Följder kan ibland skrivas antingen explicit eller rekursivt. till exempel:

$$X_n = n! \quad \text{eller} \quad \begin{cases} X_0 = 1 \\ X_n = n \cdot X_{n-1} \end{cases}, \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

$X_n = n X_{n-1}$ kallas rekursionsekvation (eller differensekvation

Differensekvationer i kursen:

1 Linjär av första graden med konstanta koefficienter

$$X_n - a X_{n-1} = W_n$$

2 eller andra graden:

$$X_n + a X_{n-1} + b X_{n-2} = W_n$$

Schema

1. Bestäm alla lösningar till den homogena ekvationen

$$\begin{cases} x_n^h - a x_{n-1}^h = 0 \\ x_n^h + a x_{n-1}^h + b x_{n-2}^h = 0 \end{cases}$$

2. Hitta någon lösning till:

$$\begin{cases} x_n^p - a x_{n-1}^p = w_n \\ x_n^p + a x_{n-1}^p + b x_{n-2}^p = w_n \end{cases}$$

3. $x_n = x_n^h + x_n^p$

$$x_n - a x_{n-1} = 0 \iff a = \frac{x_n}{x_{n-1}}$$

$$\Rightarrow x_0 = c,\ x_1 = ca,\ x_2 = ca^2, \ldots, x_n = ca^n$$

Ex $\begin{cases} x_n = 7x_{n-1}, \ n = 1,2,3\ldots \\ x_0 = 2 \end{cases} \Rightarrow x_n = c \cdot 7^n$

$$x_0 = c \cdot 7^0 = 2 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow \boxed{x_n = 2 \cdot 7^n}$$

Karaktäristiska polynomet: $\boxed{p(r) = r - a}$

Partikulärlösningar

1. W_n = polynom i n
2. $W_n = b^n$ (potens)
3. Linjärkombination av 1 och 2.

1. Ansätt x_n^p = polynom av samma grad som W_n.
   Om det ej fungerar så öka gradtalet tills det förr eller senare kommer fungera.

2. Ansätt $x_n^p = k b^n$
   Om b är ett nollställe till det karaktäristiska polynomet så ansätt
   $$\boxed{x_n^p = n \cdot k b^n}$$

Ex Finn partikulärlösning till

a) $x_n - 3x_{n-1} = 5^n$

b) $x_n - 5x_{n-1} = 5^n$

nollstället sammanfaller

a) Ansätt $x_n^p = K \cdot 5^n$,

$$K \cdot 5^n - 3(K \cdot 5^{n-1}) = 5^n$$

$$\Leftrightarrow 5K - 3K = 5 \Leftrightarrow K = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow x_n^p = \frac{5}{2} \cdot 5^n = \boxed{\frac{5^{n+1}}{2}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\text{Kom ihåg}} \\ 5 \cdot 5^{n-1} = 5^n \, ! \end{array}}$$

b) $x_n^p = K \cdot 5^n$

$$K \cdot 5^n - 5(K \cdot 5^{n-1}) = 5^n$$

$$\Leftrightarrow \cancel{5^n}(\cancel{K} - \cancel{K}) = 0 = 5^n$$

$\underline{\underline{\text{GÅR EJ}}}$

$$x_n^p = n \cdot K \cdot 5^n$$

$$x_n^p - 5x_{n-1}^p = nK5^n - 5((n-1)K \cdot 5^{n-1}) = 5^n$$

$$\Leftrightarrow 5^n \cdot K(n - (n-1)) = 5^n$$

$$\Leftrightarrow K = 1 \Rightarrow \boxed{x_n^p = n \cdot 5^n}$$

Ex Lös differensekvationen:

$$\begin{cases} x_n - 3x_{n-1} = 5^n \\ x_0 = 7 \end{cases}$$

1 (löser homogena ekvationen)

$$x_n^h - 3x_{n-1}^h = 0 \Rightarrow x_n^h = C \cdot 3^n$$

2. $x_n^p - 3x_{n-1}^p = 5^n$ ges av $x_n^p = \frac{5^{n+1}}{2}$

$$x_n = x_n^h + x_n^p = C \cdot 3^n + \frac{5^{n+1}}{2}$$

3. $x_0 = 7 = C \cdot 3^0 + \frac{5^{0+1}}{2} \Leftrightarrow \underline{C = \frac{9}{2}}$

så $\boxed{x_n = \frac{9}{2} \cdot 3^n + \frac{5^{n+1}}{2}}$ KLAR

Samma förfarande som när man löser diffrentialekvationer!

Ex En person lånar 10 000 kr. Lånet skall betalas tillbaka på 36 månader med a kr varje månad. Efter varje månad ökas skulden med 1% av det som fanns vid månadens början. Bestäm a:

$X_0 = 10\,000$

$X_{n+1} = 1{,}01 X_n - a$ * (minskar med a & ökar med 1 %)

$X_{36} = 0$

Vi löser enkla ekvationen *.

- $X_n^h = A \cdot 1{,}01^n$
- $X_n^p = C$

$X_{n+1}^p - 1{,}01 X_n^p = C - 1{,}01C = -a$

$\Rightarrow \boxed{C = 100a}$

två villkor och två okända

Så

$X_n = X_n^h + X_n^p = \boxed{A \cdot 1{,}01^n + 100a}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} A = \dfrac{10000}{1 - 1{,}01^{36}} \\ a = \dfrac{100 \cdot 1{,}01^{36}}{1{,}01^{36} - 1} \end{cases}}$$