Vektorvärda funktioner

DIFFERENTIAL KALKYL

Kurva i $\mathbb{R}^3$ är funktion $\bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

Derivatan $\bar{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ ger en tangentvektor till kurvan. ex: $\bar{r}(t)$ läget, $r'(t)$ hastighet

En yta i $\mathbb{R}^3$ (parameterform) funktion

$\bar{r}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

Ger: $\bar{r}'_s$ ger tangentvektor i en riktning och $\bar{r}'_t$ i en annan riktning.

En normalvektor till ytan är ortogonal mot både $\bar{r}'_s$ och $\bar{r}'_t \Rightarrow \boxed{\bar{n} = \bar{r}'_s \times \bar{r}'_t}$

Ex. $\bar{r}(s,t)$: $\begin{cases} x(s,t) = -1 + s + t \\ y(s,t) = 0 - s + 2t \\ z(s,t) = 0 + s - t \end{cases}$

$\bar{r}'_s = (1,-1,1)$ $\bar{r}'_t = (1,2,-1)$ riktningsvektorer

$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

$\bar{n} = \bar{r}'_s \times \bar{r}'_t = (1,-1,1) \times (1,2,-1) = (\underline{-1, 2, 3})$

$(\overline{-1,0,0})$ i planet: $\underline{-1}(x - \overline{(-1)}) + \underline{2}(y - \overline{0}) + \underline{3}(z - \overline{0}) = 0$

$-x + 2y + 3z - 1 = 0$

FUNKTIONALMATRIS & FUNKTIONALDETERMINANT

Hur samlar vi derivatorna till för tex. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ funktionen $\bar{y} = \bar{f}(\bar{x})$ given att

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2 \\ y_2 = f_2(x_1, x_2) = x_1 x_2 \end{cases}$$

So i en funktionalmatris!

$$\bar{f}'(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$$

Ex: För <u>linjära</u> avbildningen $\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2) = 3x_1 - x_2 \\ y_2 = f_2(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \end{cases}$

blir $\bar{f}'(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, dvs systemmatrisen A i $y = Ax$

OMG!

Enligt linalg. anger determinanten det A "areaförändringen" det vi tillämpar avbildningen på på något.

($\mathbb{R}^3$ - volymförändringen)

För att undersöka hur areor($\mathbb{R}^2$)/volymer($\mathbb{R}^3$) förändras (allmänt) inför vi funktionalmatrisen

$$\det \bar{f}'(\bar{x}) = \frac{d(y_1, y_2)}{d(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

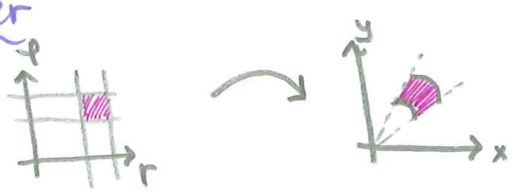
ovan: $\begin{vmatrix} 2x_1 & 2 \\ x_2 & x_1 \end{vmatrix} = 2x_1^2 - 2x_2$

eller ja tidigare!

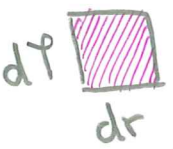
Lokala egenskaper. olika saker händer på olika ställen. Då ej linjärt här!

Polära kordinater

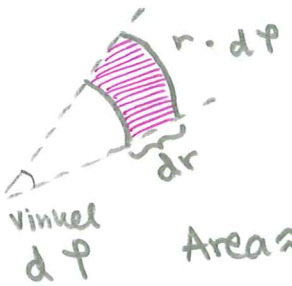
$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$



Förstoring



Area ≈ dr · dφ



Area ≈ dr · r · dφ = $\boxed{r}$ dr dφ

r ggr större

SLUTSATS: arenan verka ändras men en faktor r då vi tillämpar polära kordinater.

Prova med polära koordinater!

$$\frac{d(x,y)}{d(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix}$$

$= r$! Stämmer i detta fallet!

Fungerar för små områden därför att nära en punkt $\bar{a} = (a,b)$ är differensen $\bar{f}(\bar{a}+\bar{h}) - \bar{f}(\bar{a})$ nästan en linjär avbildning.

Taylor: $f_1(a+h, b+k) - f_1(a,b) =$

$f'_{1x}(a,b)\cdot h + f'_{1y}(a,b)\cdot k$ + "mindre"

$f_2(a+h, b+k) - f_2(a,b) =$

$f'_{2x}(a,b)\cdot h + f'_{2y}(a,b)\cdot k$ + "mindre"

linjär avbildningsmatris

$$A = \begin{pmatrix} f'_{1x}(a,b) & f'_{1y}(a,b) \\ f'_{2x}(a,b) & f'_{2y}(a,b) \end{pmatrix} = \bar{f}'(\bar{a})$$

Och systemet kan nästan skrivas

$$\begin{pmatrix} \Delta f_1 \\ \Delta f_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

Lin. alg: $\det A \neq 0 \iff$

Systemet entydig lösning $\iff$ A inventerbar

$\iff$ inversa avbildningen existerar! $\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix}\Delta f_1\\ \Delta f_2\end{pmatrix}$

Se sats 6.1

Implicita funktioner

$y = \sqrt{1-x^2}$ ger y explicit som funktion av x

Samma funktion ges implicit av $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=0 \end{cases}$

Vi kan lösa ut y som funktion av x utom i P och Q. I P och Q är normalen vågrät.

"Fungvar inte där det vänder!"

Om vi har kurva $F(x,y)=c$ ges normalen av $\operatorname{grad} F = (F'_x, F'_y)$

tj vågrät $\iff F'_y \neq 0$

sats 6.2