Föreläsning 126

- Räknelagar för det
- Utvecklingar det efter rad eller kolonn
- Underdet och adjunktformeln
- Det av högre ordning
- Cramers regel

Räknelagarna $A = [A_1 A_2 A_3]$

* $\det([A_1 + B_1 \; A_2 \; A_3]) =$
  $= \det([A_1 A_2 A_3]) + \det([B_1 A_2 A_3])$
* $\det([\mu A_1 \; A_2 \; A_3]) = \mu \det([A_1 A_2 A_3])$
* $\det([A_2 A_1 A_3]) = -\det([A_1 A_2 A_3])$
* $\det A^T = \det A$

ex.

$\det([A_1 \; \mu A_2 \; A_3]) = -\det([\mu A_2 \; A_1 \; A_3]) =$
$-\mu \det([A_2 A_1 A_3]) = \mu \det([A_1 A_2 A_3])$

---

* $\det([A \; sA \; B]) = s\det([A A B]) = 0$

---

* $\det([A_1 + \mu A_2 \; A_2 \; A_3]) = \det([A_1 A_2 A_3])$

Bevis. $\det([A_1 + \mu A_2 \; A_2 \; A_3]) =$
$= \det([A_1 A_2 A_3]) + \mu \underbrace{\cancel{\det([A_2 A_2 A_3])}}^{0}$

Utveckling efter rad

ex. (7. s206)

a)
$$\begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} - (-4)\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot 5 + 4\cdot(-22) - 1\cdot(-23) = -60$$

b)
$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -5\cdot\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = (-5)\cdot 5 + 2\cdot 2 - 3\cdot 16 = -60$$

def. Underdeterminant D_{ij}

$$D_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ex. Utveckling efter första raden

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}D_{11} - a_{12}D_{12} + a_{13}D_{13}$$

Uttrycket för det A innehåller termer av formen $(-1)^{i+j}a_{ij}D_{ij}$

$\det A^T = \det A$

Def. A 3×3-matris

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} D_{11} & -D_{21} & D_{31} \\ -D_{12} & D_{22} & -D_{32} \\ D_{13} & -D_{23} & D_{33} \end{pmatrix}$$

Obs! indiceringen

Sats $A \cdot \operatorname{adj} A = \operatorname{adj} A \cdot A = (\det A) I$

Om $\det A \neq 0$ så är

$$\frac{\operatorname{adj} A}{\det A} \cdot A = A \frac{\operatorname{adj} A}{\det A} = I$$

m.a.o

$$\boxed{A^{-1} = \frac{\operatorname{adj} A}{\det A}}$$

ex (s. 208)