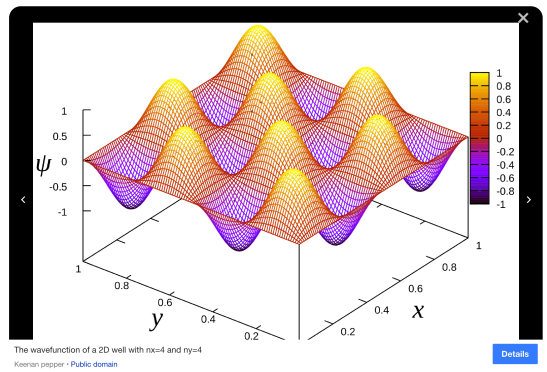
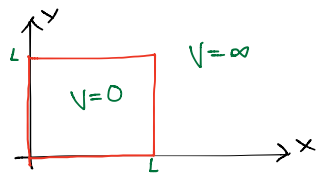
12) 2D-elektrongas, $k_{2D} = (k_x, k_y)$

a) Oändlig 2D-kvadratisk potentialbrunn med sida L. Vad blir energierna?

$V=0$ i brunnen och ∞ utanför.



S.E i brunnen:



$H\phi = E\phi$

$\Leftrightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\phi = E\phi$

Variabelseparation: $\phi = X(x)Y(y)$

$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}(X''Y + Y''X) = EXY$

$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{X''}{X}}_{-\alpha} + \underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{-\beta} = -\frac{2mE}{\hbar^2} \quad \Leftrightarrow \alpha + \beta = \frac{2mE}{\hbar^2}$

$$\begin{cases} X'' + \alpha X = 0 \\ Y'' + \beta Y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X(x) = A_1 \sin(\sqrt{\alpha}\, x) + B_1 \cos(\sqrt{\alpha}\, x) \\ Y(y) = A_2 \sin(\sqrt{\beta}\, y) + B_2 \cos(\sqrt{\beta}\, y) \end{cases}$$

RV: $X(0) = X(L) = Y(0) = Y(L) = 0$ ger:

$$\left.\begin{array}{l} X(x) = A_1 \sin(\sqrt{\alpha}\, x), \quad \sqrt{\alpha}\, L = \pi n_x \Leftrightarrow \sqrt{\alpha} = \frac{\pi k_x}{L} \\ Y(y) = A_2 \sin(\sqrt{\beta}\, y), \quad \sqrt{\beta}\, L = \pi n_y \Leftrightarrow \sqrt{\beta} = \frac{\pi k_y}{L} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2mE}{\hbar^2} = \left(\frac{\pi n_x}{L}\right)^2 + \left(\frac{\pi n_y}{L}\right)^2 \Leftrightarrow \boxed{E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}(n_x^2 + n_y^2)}$$

b) Antag nu periodiska RV istället.

$X(0) = X(L) \Rightarrow B_1 = A_1 \sin(\sqrt{\alpha}\, L) + B_1 \cos(\sqrt{\alpha}\, L)$

$Y(0) = Y(L) = B_2 = A_2 \sin(\sqrt{\beta}\, L) + B_2 \cos(\sqrt{\beta}\, L)$

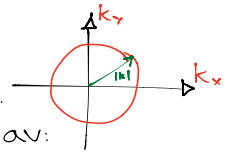
$A_1 = A_2 = A$, $B_1 = B_2 = B$ (pga symmetri)

$\Rightarrow A \sin(\sqrt{\alpha}\, L) + B \cos(\sqrt{\alpha}\, L) = A \sin(\sqrt{\beta}\, L) + B \cos(\sqrt{\beta}\, L)$

Använd resultatet från 11 ist..

c) Bestäm tillståndstätheten per ytenhet för en 2D-gas.

$E = \frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2) = \frac{\hbar^2}{2m} \cdot k^2$, $k^2 = k_x^2 + k_y^2$



Vi kan säga att E ligger på randen.

Antal tillstånd $S(k)$ i cirkeln ges av:

$S(k) = \pi k^2 \cdot 2 / \text{Area per k-punkt}$ (gånger 2 pga spin)

$k = \frac{2\pi n}{L} \Rightarrow \Delta k = \frac{2\pi}{L}$, $(\Delta k)^2 = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 =$ Area per k-punkt

$$\Rightarrow S(k) = \pi k^2 \cdot 2 \Big/ \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 = \frac{\pi k^2 \cdot 2 L^2}{2^2 \pi^2} = \frac{k^2 L^2}{2\pi}$$

Eftersom $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ så kan vi gå över till $\tilde{S}(E)$.

$$\tilde{S}(E) = \frac{L^2}{2\pi} \cdot \frac{2mE}{\hbar^2}$$

Vi vill ta fram $Z(E) = \frac{dS(E)}{dE} = \frac{L^2 \cdot 2m}{2\pi\hbar^2} = \frac{L^2 m}{\pi\hbar^2}$

Per volymsenhet får vi alltså: $\boxed{\frac{m}{\pi\hbar}}$

d) Bestäm Fermienergin. Vi har n som är $= \frac{N}{A} = \frac{N}{L^2}$.

$$N = \int_0^{E_F} Z(E)\,dE = \frac{L^2 m}{\pi\hbar^2} \cdot E_F$$

$$n = \frac{N}{L^2} = \frac{m}{\pi\hbar} \cdot E_F \Leftrightarrow \boxed{E_F = \frac{n\pi\hbar^2}{m}}$$

13) Boltzmannfaktorn

a) i) $\frac{P(\Delta)}{P(0)} = \frac{e^{-\Delta/kT}}{e^0} = e^{-\Delta/kT} = e^{-kT/kT} = e^{-1} = \boxed{0{,}36}$ $\quad P(\Delta) = 0{,}36\,P(0)$

ii) $\frac{P(2\Delta)}{P(0)} = e^{-2} \approx \boxed{0{,}13}$ $\quad P(2\Delta) = 0{,}13\,P(0)$

b) Skriv ner ett uttryck för sln att $E = 9\Delta$ är besatt. Ökar eller minskar sln då $kT \to \Delta$?

Vi ser att 10 är besatt en gång i Δ, en gång i 3Δ .... (se figuren)

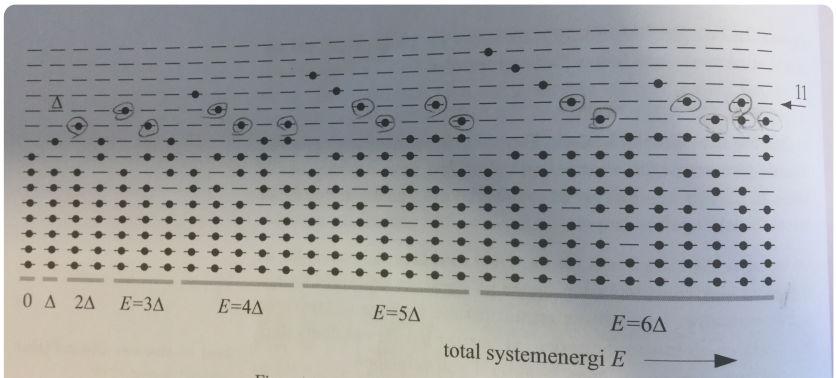
b)

$$P(10) = \frac{e^{-2\Delta/kT} + e^{-3\Delta/kT} + 2e^{-4\Delta/kT} + 2e^{-5\Delta/kT} + 4e^{-6\Delta/kT}}{1 + e^{-\Delta/kT} + 2e^{-2\Delta/kT} + 3e^{-3\Delta/kT} + 5e^{-4\Delta/kT} + 7e^{-5\Delta/kT} + 11e^{-6\Delta/kT}}$$

$kT = 0 \Rightarrow P(10) = 0$

$kT \to \infty \Rightarrow P(10) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

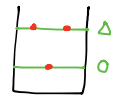
$kT = \Delta \Rightarrow P(10) = 0{,}1255$



Figur 4.16: Elektronkonfigurationer ordnade efter total energi med grundtillståndet längst till vänster.

14)

a) Ställ upp ett uttryck för systemets medelenergi.



$$P(0) = \frac{1}{1+2e^{-\Delta/kT}}, \quad P(\Delta) = \frac{2e^{-\Delta/kT}}{1+2e^{-\Delta/kT}}$$

$$\bar{E} = P(0)\cdot E_0 + P(\Delta)\cdot E(\Delta) = \boxed{\frac{2\Delta e^{-\Delta/kT}}{1+2e^{-\Delta/kT}}}$$

b) Vad blir $\bar{E}$ då $kT \gg \Delta$ och $kT \ll \Delta$?

$$kT \gg \Delta \Rightarrow \bar{E} = \frac{2}{3}\Delta$$

$$kT \ll \Delta \Rightarrow \bar{E} = 0$$

15) Litiums ledningsförmåga är $\sigma = 1{,}05\cdot 10^7 / \Omega m$.

a) Vad är Fermihastigheten?

$E_F = \frac{1}{2}mv_F^2 \Leftrightarrow v_F = \sqrt{\frac{2E_F}{m}}$, vad är Fermienergin E_F då?

$E_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{3}{8\pi}n\right)^{2/3}$, formelsamling: $n = 4{,}7\cdot 10^{28}\, m^{-3}$

$$\Rightarrow \boxed{v_F = 1{,}29\cdot 10^6\ m/s}$$

b) Bestäm v_{Th} vid $T = 300\,K$.

$$\frac{1}{2}mv_{Th}^2 = \frac{3}{2}kT \Leftrightarrow v_{Th} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \boxed{1{,}17\cdot 10^5\ m/s}$$

Det är elektronerna vid E_F som bidrar till el osv, därför är det deras hastighet v_F som vi är intresserade av!

c) Bestäm v_d om $\mathcal{E} = 100\ V/m$.

$$v_d = -\frac{eE}{m}\tau, \quad \tau = \frac{m\sigma}{e^2 n}$$

$$\Rightarrow v_d = -\frac{eE}{m}\cdot\frac{m\sigma}{e^2 n} = \frac{E\sigma}{en} = \boxed{0{,}14\ m/s}$$

d) Bestäm l.

$$l = v_F\cdot\tau = 1{,}29\cdot 10^6\cdot\frac{m\sigma}{e^2 n} \approx \boxed{10{,}2\ nm}$$

e) Hur många litiumatomer passerar en elektron utan att spridas?

Sträcka mellan två atomer: 3,02 Å (se formelsamlingen)

Den åker en sträcka $l = 10{,}2\,nm$ utan att spridas, det ger antalet..

$$\frac{10{,}2\,nm}{3{,}02\,Å} = \frac{10{,}2\,nm}{0{,}302\,nm} \approx \boxed{34\ st}$$

De verkar inte bry sig så mkt om jonerna.

16) Uppskatta andelen elektroner i $[E_F-kT, E_F]$. Uppskatta elektronernas bidrag till värmekapaciteten. Fuck uppskattn.

$$N_{kT} = \int_{E_F-kT}^{E_F} Z(E)\,dE \quad , \quad N_{tot} = \int_0^{E_F} Z(E)\,dE, \qquad Z(E) = C\sqrt{E}\,.$$

Vi söker: $$\frac{N_{kT}}{N_{tot}} = \frac{\int_{E_F-kT}^{E_F} Z(E)\,dE}{\int_0^{E_F} Z(E)\,dE,} = \frac{\cancel{C}\int_{E_F-kT}^{E_F}\sqrt{E}\,dE}{\cancel{C}\int_0^{E_F}\sqrt{E}\,dE} = \frac{\left[\frac{2}{3}E^{3/2}\right]_{E_F-kT}^{E_F}}{\left[\frac{2}{3}E^{3/2}\right]_0^{E_F}} = \boxed{\frac{E_F^{3/2}-(E_F-kT)^{3/2}}{E_F^{3/2}}}$$

b) "Uppskatta C_V".

$$E = E(0) + \frac{N_{kT}}{N_{tot}}\cdot N\cdot kT$$

$$C_V = \frac{dE}{dT} = R$$

17) Koppar

a) Beräkna E_F för ledningselektronerna.

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{3}{8\pi}n\right)^{2/3}, \quad \text{FS: } n = 8{,}45\cdot 10^{28}\,m^{-3} \Rightarrow \boxed{E_F \approx 7{,}03\ eV}$$

b) Uppskatta atomgittrets bidrag till C_V vid $T=300$ K.

$$C_V^{atom} = 3k\cdot N_{atom} = /FS/ = 3k\cdot 8{,}45\cdot 10^{28} \approx \boxed{393\ J/m^3K}$$

c) Uppskatta ledningselektronens bidrag.

$$E^{el}/mol = \frac{3}{2}kT\cdot N_A \Rightarrow C_V^{el}/mol = \frac{dE}{dT}\cdot N_A = \frac{3}{2}kN_A \approx \boxed{196\ J/kgK}$$

18) $M_{sol} = 1{,}99\cdot 10^{30}$ kg, $R_{sol} = 6{,}96\cdot 10^8$ m,

$M_{dvärg} = 0{,}5 M_{sol}$, $R_{dvärg} = 10^7$ m, $T_{dvärg} = 10^7$ K

Beräkna Fermienergin och Fermitemperaturen för elektronerna i en vit dvärg. Kan dessa elektroner betraktas som en klassisk gas?

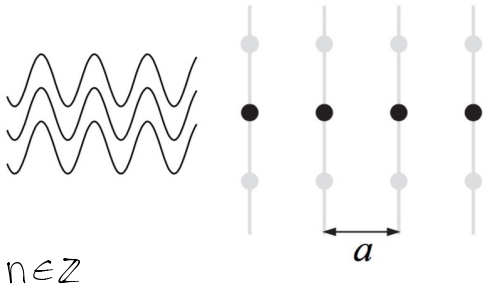
$$n = \frac{N}{V}, \quad N = \frac{M_{dvärg}}{\text{molmassa}[kg]}\cdot N_A \cdot \underbrace{2}_{\text{2 valens-e}^-}, \quad V = \frac{4}{3}\pi(R_{dvärg})^3$$

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{3}{8\pi}n\right) \approx \boxed{10^{-14}}, \quad \text{Fermitemp: } \underbrace{kT = E_F}_{\text{inte } \frac{3}{2} \text{ pga skit i det du.}} \Leftrightarrow T = \frac{E_F}{k} = \boxed{7{,}3\cdot 10^8\ K}$$

Gräns för klassisk gas: $e^{(E-E_F)/kT} \gg 1$, $E = \frac{3}{2}kT$, $T = 10^7$ K $\Rightarrow e^{(E-E_F)/kT} = 1{,}5\cdot 10^{-31} \cancel{\gg} 1 \Rightarrow$ $\boxed{\text{Ingen klassisk gas!}}$

21) Elektroner som vågor

a) För vilka våglängder får du konstruktiv interferens mellan vågor reflekterade i olika plan?



Vi får konstruktiv interferens om $\Delta L = \lambda \cdot n$, $n \in \mathbb{Z}$

Beroende på var vågen reflekteras får vi:

$\Delta L = 2a$, $\Delta L = 4a$, $\Delta L = 6a$, ...

$\Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{2a}{n}}$

Om $2a$ är ett helt antal λ så är även $4a, 6a, \ldots$ det

b) Vad är vågtalen k vid konstruktiv interferens?

$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi n}{2a} = \boxed{\frac{\pi n}{a}}$

22) 1D-metall med längd L, $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ikx}$

a) Ange sannolikhetstätheten.

$|\phi(x)|^2 = \boxed{\frac{1}{L}}$

b) Ange elektronernas kinetiska energi

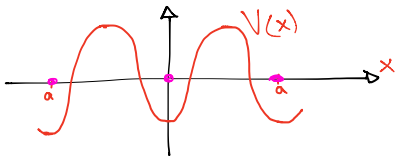
$H\phi = E\phi$, $V = 0 \Rightarrow \boxed{E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}}$ Orkar inte gå igenom härledningen igen.

c) Ange rörelsemängden.

$\boxed{p = \hbar k}$

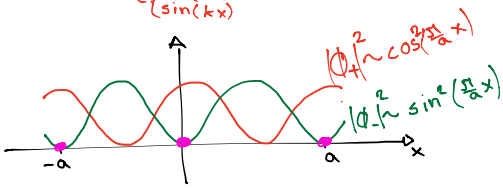
d) Skissa potentialen relativt atomernas lägen.

$V(x) = -V_0 \cos\left(\frac{2\pi}{a} x\right)$, $V_0 > 0$.



e) Skissa sh-tätheten för ϕ_+ & ϕ_- relativt atomernas läge.

$\phi_\pm = \frac{1}{\sqrt{2L}} \underbrace{\left(e^{ikx} \pm e^{-ikx}\right)}_{\sim \begin{cases} \cos(kx) \\ \sin(kx) \end{cases}}$, $k = \frac{\pi}{a}$.



f) Hur stor är elektronens rörelsemängd i de två tillstånden?

$$\langle\phi_+|\bar{p}|\phi_+\rangle \sim \int_0^L \phi_+^*(i\hbar)\phi_+' dx \sim \int_0^L \phi_+\cdot\phi_- dx = \int_0^L \sin(kx)\cos(kx)dx = \left[\frac{\sin^2(kx)}{2k}\right]_0^L = \frac{\sin^2(kL)}{2k} = \Big/ k=\frac{\pi}{a} \Big/ = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi L}{a}\right)}{2\pi/a} = \boxed{0}$$

Stämmer om $\frac{L}{a}$ är heltal, vilket det är!

$$\langle\phi_-|\bar{p}|\phi_-\rangle \sim \int_0^L \phi_-^*(i\hbar)\phi_-' dx \sim \int_0^L \phi_-\cdot\phi_+ dx = \int_0^L \cos(kx)\sin(kx)dx = \boxed{0}$$

g) Hur stor är elektronens kinetiska energi i de två tillstånden?

$$\langle\phi_+|\hat{E}|\phi_+\rangle = \int_0^L \frac{2}{\sqrt{2L}}\cos(kx)\frac{-\hbar^2}{2m}\cdot\frac{2}{\sqrt{2L}}\cdot k^2\cdot(-\cos(kx))dx = \frac{4\hbar^2k^2}{4mL}\int_0^L \cos^2(kx)dx = \Big/ L = Na \Big/ = \frac{\hbar^2k^2}{mL}\underbrace{\int_0^{Na}\cos^2(kx)dx}_{\frac{aN}{2}} = \boxed{\frac{\hbar^2k^2N}{2m}}$$

Du kan typ skippa N pga...

Pss för $\langle\phi_-|\hat{E}|\phi_-\rangle = \ldots = \frac{\hbar^2k^2}{2m}$

h) Hur stor är elektronens potentiella energi i de två tillstånden?

$$V(x) = -V_0\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)$$

$$\langle\phi_+|V(x)|\phi_+\rangle = \int_0^L \frac{2}{\sqrt{2L}}\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cdot(-V_0)\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{2L}}\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)dx = \boxed{-\frac{V_0}{2}}$$

P.s.s. för $\langle\phi_-|V(x)|\phi_-\rangle = \ldots = V_0/2$

i) Hur stort är bandgapet?

Vi har att skillnaden i potentiell energi mellan ϕ_+ & ϕ_- är $\frac{V_0}{2}+\frac{V_0}{2} = V_0$

$$\Rightarrow \boxed{E_g = V_0}$$

23) $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$, $V(x) = \begin{cases} 0 & ; 0 \leq x \leq L \\ \infty & ; \text{annars} \end{cases}$

a) Plocka E_n^0 och ϕ_n^0 från uppgift 6).

$$\boxed{E_n^0 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}n^2, \quad \phi_n^0 = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}$$

b) Visa att vågfunktionerna är ortogonala.

$$\langle\phi_n|\phi_{n'}\rangle = \int \frac{2}{L}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cdot\sin\left(\frac{n'\pi x}{L}\right)dx \quad , n \neq n'$$

$$\Rightarrow \underbrace{\boxed{\frac{L}{2}\langle\phi_n|\phi_{n'}\rangle}}_{VL} = \cancel{\left[\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left(-\frac{L}{n'\pi}\right)\cos\left(\frac{n'\pi x}{L}\right)\right]} - \int \frac{n\pi}{L}\cdot\left(-\frac{L}{n'\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n'\pi x}{L}\right)dx =$$

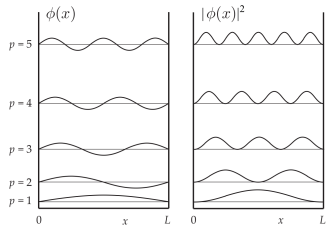
$$= \frac{n}{n'}\cancel{\left[\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left(\frac{L}{n'\pi}\right)\sin\left(\frac{n'\pi x}{L}\right)\right]} - \frac{n}{n'}\int \frac{L}{n'\pi}\left(\frac{n\pi}{L}\right)\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n'\pi x}{L}\right)dx =$$

$$= \left(\frac{n}{n'}\right)^2\int \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n'\pi x}{L}\right)dx = \underbrace{\boxed{\left(\frac{n}{n'}\right)^2\cdot\frac{L}{2}\langle\phi_n|\phi_{n'}\rangle}}_{HL}$$

$$VL = HL \Leftrightarrow \langle\phi_n|\phi_{n'}\rangle - \left(\frac{n}{n'}\right)^2\langle\phi_n|\phi_{n'}\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle\phi_n|\phi_{n'}\rangle\left(1-\left(\frac{n}{n'}\right)^2\right) = 0$$

Eftersom $n \neq n'$ så måste $\langle\phi_n|\phi_{n'}\rangle = 0$ $\square$

c) Skissa vågfunktionerna och slh-fördelningarna för de tre lägsta tillstånden.

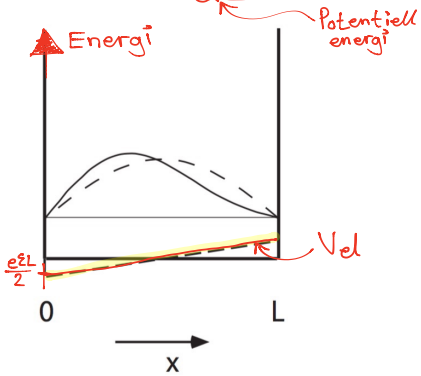


Figur 4.2: Lådpotentialens vågfunktioner $\phi(x)$ och sannolikhetstätheter $|\phi(x)|^2$.

d) Skissa hur potentialbrunnen ser ut med pålagt fält.

$U(x) = -\mathcal{E}(x - L/2)$, $V_{el}(x) = e\mathcal{E}(x - L/2)$

$H = H_0 + H' = \underbrace{V_{el}(x)}_{\text{Potentiell energi}} + H'$



e) Hitta nya energier mha störningsräkning.

$H\phi = (H_0 + H')\phi = H_0\phi^0 + V'\phi' = E^0\phi^0 + E'\phi'$

Vi har redan E_n^0, vad är E'?

$V'\phi' = E'\phi'$, vi antar att $\phi' = \phi^0 = \phi_n^0 = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

$\overbrace{\langle V' \rangle}^{=E'} = \langle \phi' | V' | \phi' \rangle = \int_0^L \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot e\mathcal{E}(x - L/2) \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2e\mathcal{E}}{L}\int_0^L \underbrace{\sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}_{\text{jämn kring } L/2.} \underbrace{(x - L/2)}_{\text{Udda kring } L/2.} dx = \boxed{0.}$

$\Rightarrow E = E^0 + E' = \boxed{\frac{\hbar^2\pi^2}{2m} + 0}$ Ingen skillnad.

f) Utifrån din skiss i d), vilken av följande tror du bäst motsvarar den nya vågfunktionen för lägsta energinivån.

Konstruktion 1: $\phi = \phi_1^0 + \phi_2^0$, tänk efter bara.

g) Bestäm c_1 & c_2.

$$(H_0+H')(c_1\phi_1^0+c_2\phi_2^0)=E_1(c_1\phi_1^0+c_2\phi_2^0)$$

h) $\lambda\left(\begin{bmatrix} E_1^0 & c \\ c & E_2^0 \end{bmatrix}\right)$ ges av: $(E_1^0-\lambda)(E_2^0-\lambda)-c^2=0 \iff \boxed{\lambda=\frac{E_1^0+E_2^0}{2}-\sqrt{\frac{(E_2^0-E_1^0)}{4}+c^2}<E_1^0}$

24) Koppar

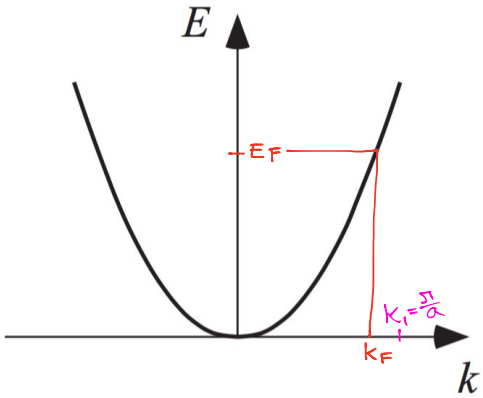
a) Bestäm våglängden hos ledningselektronerna i koppar vid Fermienergin.

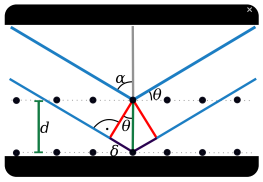
Uppgift 17 $\Rightarrow E_F=7{,}03\,eV$

$E_F=\frac{\hbar^2k^2}{2m}$, $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ $\Rightarrow \lambda=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2mE_F}{\hbar^2}}}\approx\boxed{4{,}64\cdot10^{-10}\,m}$

$E_F=\frac{hc}{\lambda_F}$ kan inte användas eftersom vi inte snackar om fotoner

b) $a=0{,}209\,nm$. Markera k_F och de vågtal där Braggreflektion kan ske.





$k_F=\frac{2\pi}{\lambda_F}\approx1{,}35\cdot10^{10}\,m.$

Braggreflektion sker då:

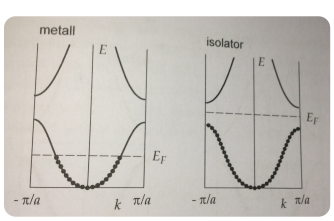
$2a=\lambda n \iff \lambda=\frac{2a}{n}$

$k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{\pi n}{a}$

$\boxed{k_1=\frac{\pi}{a}\approx1{,}5\cdot10^{10}>k_F}$ Nu vet vi var k_1 ska placeras!

c) Är koppar en metall eller inte?

Eftersom $k_F<\frac{\pi}{a}$ så ligger E_F inte i bandgapet $\Rightarrow$ Koppar är en metall



I figuren (5.19) ser vi precis detta, i metaller ligger inte valenselektronerna still och alltså leder de ström!

25) 1D-kristall, $a = 0{,}25$ nm, z valens-e^-, periodiska RV.

a) Bestäm E_F för $z=3$ & $z=4$ inom frielektronmodellen.

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

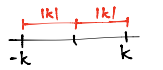
Vi kan säga att E ligger på en linje.
Antal tillstånd $S(k)$ i cirkeln ges av:

$S(k) = 2 \cdot k$ / längd per k-punkt (gånger 2 pga spin)

$$k = \frac{2\pi n}{L} \Rightarrow \Delta k = \frac{2\pi}{L}$$

spin k åt båda hållen

$$\Rightarrow S(k) = 2 \cdot 2 \cdot k \Big/ \frac{2\pi}{L} = \boxed{\frac{kL}{\pi}}$$



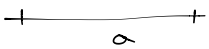
Eftersom $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ så kan vi gå över till $\tilde{S}(E)$.

$$\tilde{S}(E) = \frac{L}{\pi}\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$Z(E) = \frac{d\tilde{S}(E)}{dE}$$

$$N = \int_0^{E_F} Z(E)\,dE = \left[\tilde{S}(E)\right]_0^{E_F} = \frac{L}{\pi}\sqrt{\frac{2mE_F}{\hbar^2}}$$

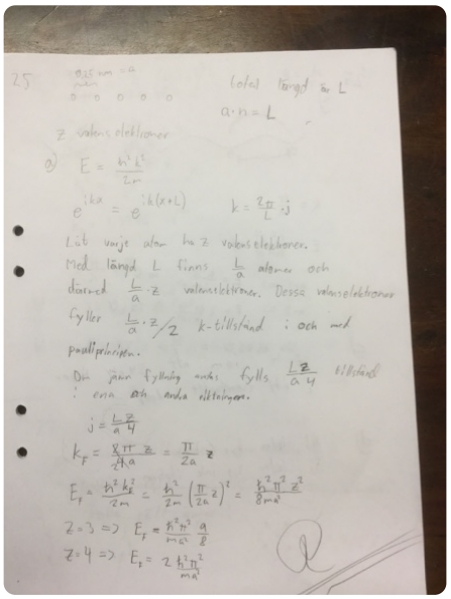
$$n = \frac{N}{L} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2mE_F}{\hbar^2}}$$



Vi vet också att $n = \frac{z}{a}$.

$$\Rightarrow \frac{z}{a} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2mE_F}{\hbar^2}} \Leftrightarrow \boxed{E_F = \frac{z^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}}$$

Simon Paulsson



25 $0{,}25\text{ nm} = a$

Total längd är L

$a \cdot n = L$

z valens elektroner

a) $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

$e^{ikx} = e^{ik(x+L)}$ $k = \frac{2\pi}{L} \cdot j$

- Låt varje atom ha z valenselektroner.
- Med längd L finns $\frac{L}{a}$ atomer och därmed $\frac{L}{a} \cdot z$ valenselektroner. Dessa valenselektroner fyller $\frac{L}{a} \cdot z / 2$ k-tillstånd i och med pauliprincipen.
  Om jäm fyllning ankn fylls $\frac{Lz}{a\,4}$ tillstånd i ena ah andra riktningen.
- $j = \frac{Lz}{a\,4}$
- $k_F = \frac{z\pi}{2Aa} = \frac{\pi}{2a} z$

$E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{2a} z\right)^2 = \frac{\hbar^2 \pi^2 z^2}{8ma^2}$

$z=3 \Rightarrow E_F = \frac{\hbar^2\pi^2}{ma^2}\frac{9}{8}$

$z=4 \Rightarrow E_F = 2\frac{\hbar^2\pi^2}{ma^2}$

b) Bestäm bandgapsenergin.

Vi får bandgap då $k = \frac{\pi}{a} \cdot n$

$$E = \frac{k^2\hbar^2}{2m} = \frac{\pi^2\hbar^2 n^2}{2ma^2}, \quad n=1 \Rightarrow 6{,}02\text{ eV}, \quad n=2 \Rightarrow 24{,}07\text{ eV}.$$

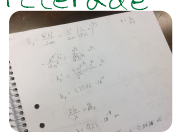
c) När är kristallen en isolator? ($z=3$ eller $z=4$?) Hur många band är fyllda?

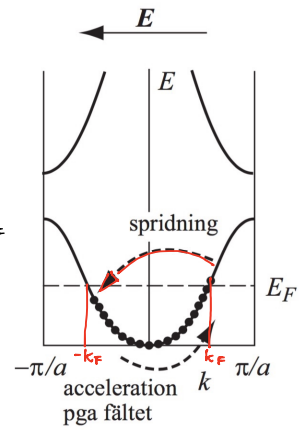
Vid $z=4$ är $E = E_F$ och Fermienergin ligger precis i mitten av ett bandgap, därför har vi då en isolator

d)

26) Cu, blabla...

a) Uppskatta vågtalet hos den emitterade fononen.





$k - k' = k_{fonon}$

Tänk att både början & slutet på pilen ligger ca på $\pm k_F$

facit...

$\Rightarrow k_{fonon} \approx 2k_F \approx \boxed{2{,}7 \cdot 10^{10}/m}$

b) Uppskatta energin som elektronen som e^- förlorar när den sprids?

$\lambda = \frac{2\pi}{k}$

$$\Delta E = hf_1 - hf_2 = h\left(\frac{v}{\lambda_1} - \frac{v}{\lambda_2}\right) = hv\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) = \frac{hv}{2\pi}(k_1 - k_2) = \boxed{\frac{hv}{2\pi} \cdot 2k_F}$$

Svar: $\boxed{\Delta E \approx 64 meV}$

c) Bestäm kvoten mellan e^- energiförlust & E_F.

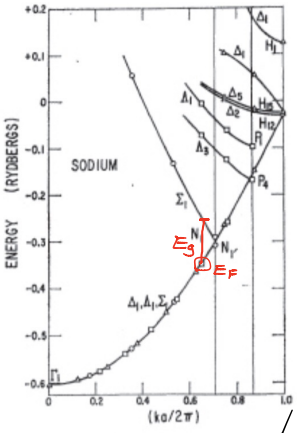
$$\frac{\Delta E}{E_F} = \frac{h \cdot v \cdot 2k_F}{\frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}} = \frac{hv \cdot 4\pi m}{\hbar^2 k_F} = \boxed{\frac{16\pi^2 m}{h k_F} = 0{,}009}$$

Det är alltså mkt liten relativ ändring!

27) Alkaliämnen.

	Li	Na	K	Rb	Cs
a_0(Å)	3.491	4.225	5.225	5.585	6.045
a_0(a.u.)	6.597	7.984	9.847	10.555	11.424
E_{FS}	-0.420	-0.367	-0.318	-0.302	-0.284
E_F	-0.431	-0.367	-0.320	-0.308	-0.297
$E(N)$	-0.412	-0.302	-0.293	-0.295	-0.296
$(m_\ell/m_0)_s$	1.32	1.00	1.02	0.99	1.06
(m_ℓ/m_0)	1.66	1.00	1.09	1.21	1.76

E_F

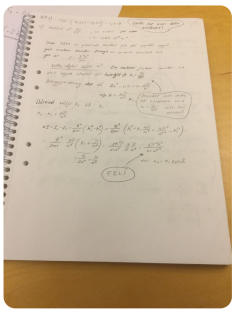


a) Uppskatta minsta fotonergin för vilken denna excitation kan ske.

$1 Ry = hcR_\infty \approx 13.6 eV$

E_F ligger mitt i bandgapet i metaller. Gå från E_F rakt upp till nästa band: $\boxed{E_g \approx 1{,}8 eV}$

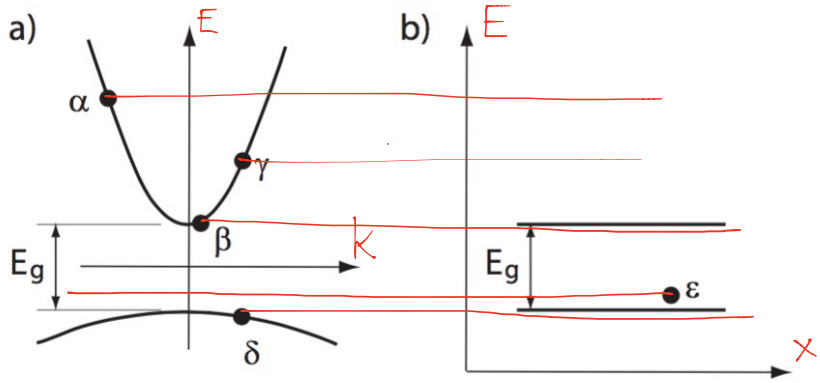
b) Uppskatta fotonenergin mha frielektronmodellen.



Gustav

28)

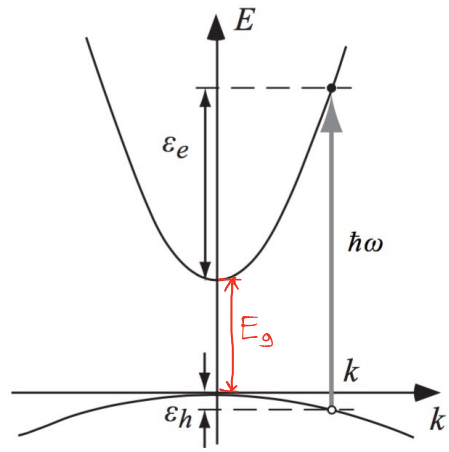
a) Sätt ut korrekta storheter på axlarna.



29) Bandgap E_g, energi $\hbar\omega > E_g$.

a) Skissa före & efter

eller i k-rummet:



b) Bestäm ett uttryck för vågvektorn k.

Bilden ger: $\varepsilon_h + E_g + \varepsilon_e = \hbar\omega$, $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

$\varepsilon_h = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_h^*}$, $\varepsilon_e = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e^*}$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{\hbar\omega - E_g}{\frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{1}{m_e^*} + \frac{1}{m_h^*}\right)} \Leftrightarrow \boxed{k = \sqrt{\frac{\hbar\omega - E_g}{\frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{1}{m_e^*} + \frac{1}{m_h^*}\right)}}}$$

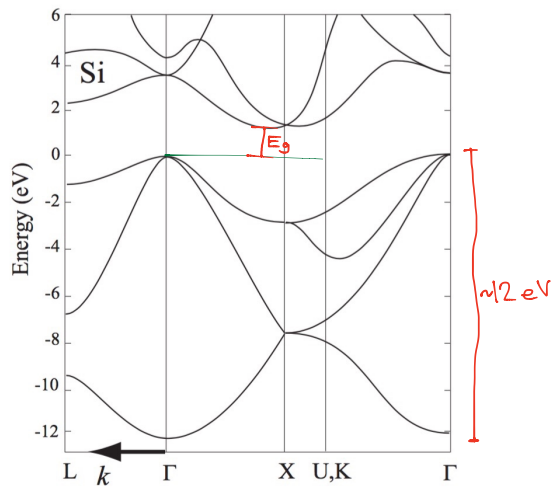
c) Vad blir k-vektorn?

Sätt in siffror: $\boxed{3{,}1 \cdot 10^8\ m^{-1}}$

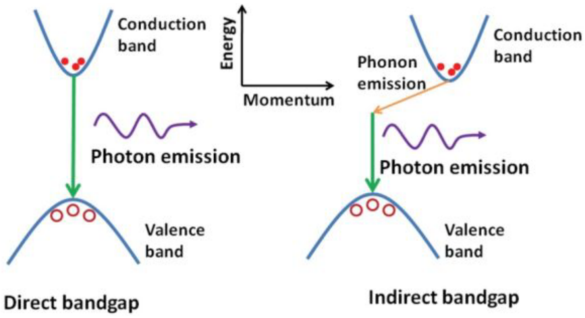
30) Γ symboliserar $(k_x, k_y, k_z) = 0$.

a) Hitta & markera bandgapet E_g.

Se figur!



b) Vilken typ av bandgap har kisel?



Indirekt bandgap, absorbtion och emission $\begin{cases}\text{kräver}\\ \text{skapar}\end{cases}$ fononer och ljusutsändning är därför ineffektiv. Använd inte kisel till lasrar!

c) Vad är Fermienergin enligt frielektronmodellen?

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{3}{8\pi}n\right)^{2/3} = \boxed{12.47\,eV}$$

d) Bestäm E_F från figuren

Se figuren. ~12eV.

31) Kisel

a) p-typ kisel, $\rho = 10\,\Omega m$. Hur stor måste koncentrationen Al-atomer vara om hålets mobilitet $\mu = 0{,}05\ m^2/Vs$?

$N_{Al} = n$

FS: $n = \frac{\sigma m}{\tau e^2} = \frac{\sigma m e}{m \mu e^2} = \frac{\sigma}{\mu e} = \frac{1}{\rho \mu e} = \frac{1}{10 \cdot 0{,}05 \cdot e} = \frac{2}{e} = \boxed{1{,}25 \cdot 10^{19}}$

b)