KAPITEL 9

9.1 Följande är känt:

w	$y = Sw$
1	t
$\cos t$	t^2
$\cos 2t$	t^3

(S är ett linjärt system)

Bestäm svaret på insignalen $w(t) = \cos^2 t$.

$$\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t - 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 t = \frac{1}{2}(\cos(2t) + 1)$$

$$\Rightarrow w(t) = \cos^2 t = \frac{1}{2}(\cos 2t + 1)$$

SVAR

$$\Rightarrow \boxed{y = Sw = \frac{1}{2}(t^3 + t)}$$

9.2 Är systemet linjärt?

Man ser i figuren (på sida 101) att w_3 är en linjärkombination av w_2 & w_1 $(w_3 = w_2 - w_1)$.

Man kan däremot inte beskriva y_3 som en linjärkombination av y_2 & y_1.
Eftersom $y_2 = 0$ då $0 \leq t \leq 1$ så måste koefficienten före y_1 vara -1.
$\Rightarrow (y_3 = 2y_2 - y_1)$

Vi har alltså olika koefficienter framför y_1 & y_2 och w_1 & w_2.

SVAR

$\Rightarrow$ Systemet är ej linjärt

9.3 Vilka av följande insignal-utsignal-relationer definierar linjära system?

$$\boxed{Y(t) = S\,w(t) =}$$

a) $\boxed{w(t)}$

$$\begin{cases} S(0) = 0 \\ S(cw) = cw = c \cdot S(w) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{Linjär!}}$$

SVAR

b) $\boxed{w(t) + t}$

$$S(c \cdot w) = c \cdot w + t \neq c\,S(w) = c\,(w + t)$$

SVAR

$$\Rightarrow \boxed{\text{Ej linjär!}}$$

c) $\boxed{\dfrac{dw}{dt} + w(t)}$

$$\begin{cases} S(0) = 0 + 0 = 0 \\ S(c \cdot w) = c\,\dfrac{dw}{dt} + c \cdot w(t) = c\left(\dfrac{dw}{dt} + w(t)\right) = c\,S(w) \end{cases}$$

SVAR

$$\Rightarrow \boxed{\text{Linjär!}}$$

d) $\boxed{w(t)^2}$

$$\begin{cases} S(0) = 0^2 = 0 \\ S(cw) = (cw)^2 = c^2 w^2 = \underline{c^2 S(w) \neq c S(w)} \end{cases}$$

SVAR

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Ej linjär!}}$

e) $\boxed{w(t-2)}$

$S(0) = 0$

$S(cw) = cw(t-2) = c \cdot S(w)$

SVAR

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Linjär!}}$

f) $\boxed{\cos(w(t))}$

$S(0) = \underline{\cos(0) = 1}$

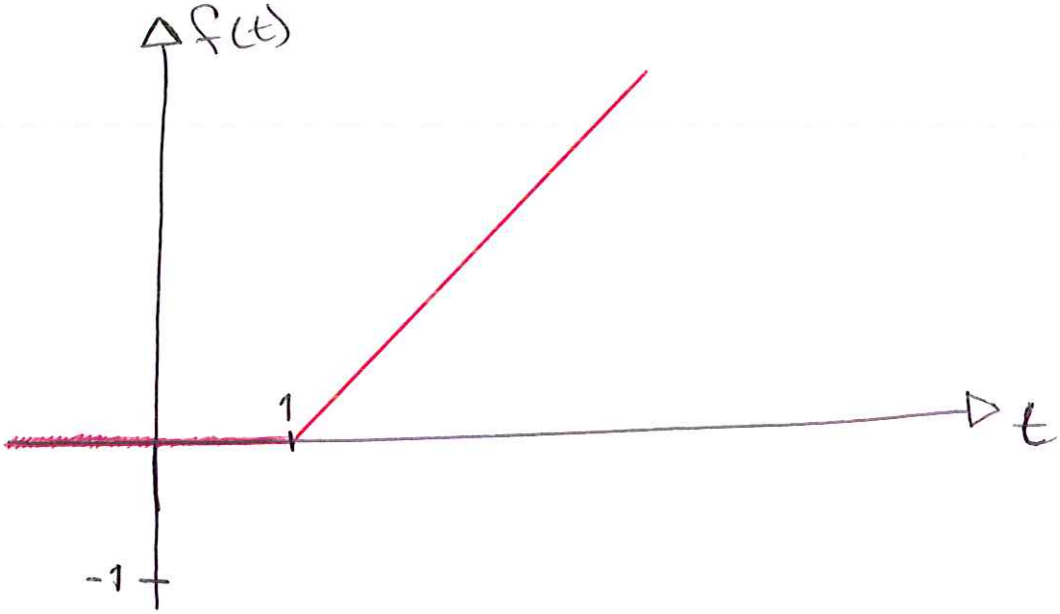
$S(cw) = \underline{\cos(cw) \neq c \cdot \cos(w)} = c\ S(w)$

SVAR

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Ej linjär!}}$

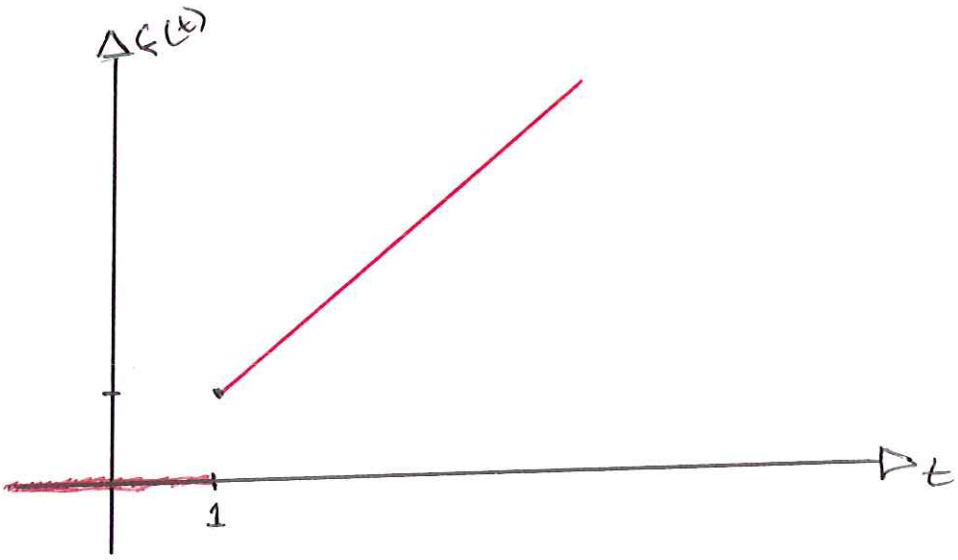
9.4 Rita funktionerna $f(t) =$

a) $(t-1)\Theta(t-1)$

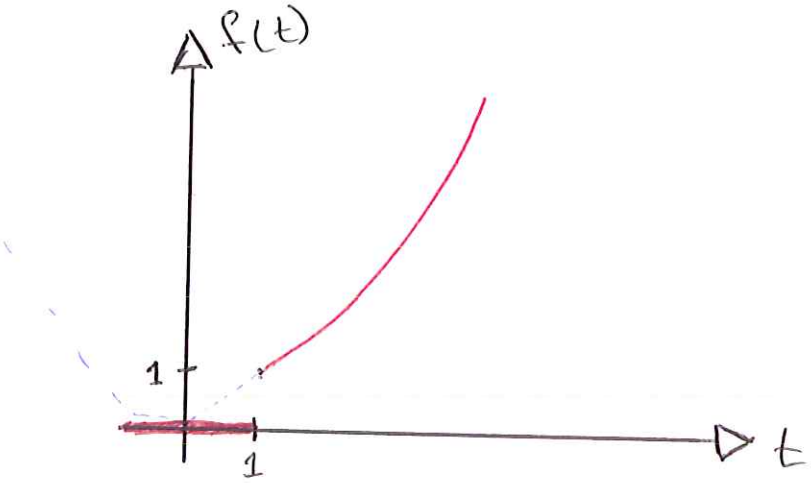


Då $t < 1$ blir $\Theta(t-1) = 0$ och då $t > 1$ blir $\Theta(t-1) = 1$.

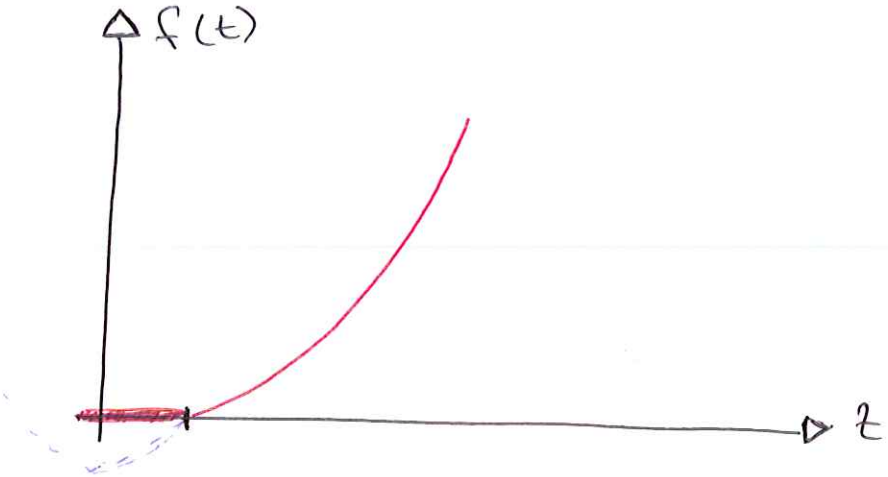
b) $t\,\Theta(t-1)$



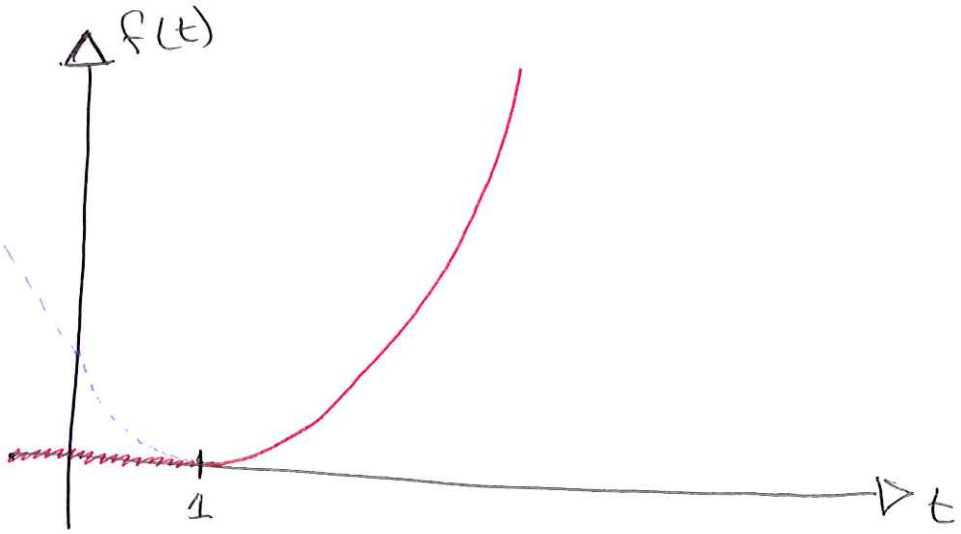
c) $\boxed{t^2(\Theta(t-1))}$



d) $\boxed{(t^2-1)\Theta(t-1)}$



e) $\boxed{(t-1)^2\cdot\Theta(t-1)}$



$\boxed{9.5}$

a)

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{då} \quad t < 0 \\ -1 & \text{då} \quad 0 < t < 1 \\ 1 & \text{då} \quad 1 < t < 2 \\ 0 & \text{då} \quad 2 < t \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(t) = -1 \cdot \left(\Theta(t-0) - \Theta(t-1)\right) + 1 \cdot \left(\Theta(t-1) - \Theta(t-2)\right) =$$

SVAR

$$= \boxed{-\Theta(t) + 2\Theta(t-1) - \Theta(t-2)}$$

SVAR

b) $\boxed{\cos(t)\left(1 - \Theta(t)\right) + e^{t}\left(\Theta(t) - \Theta(t-1)\right) + \Theta(t-1)}$

c) $-t\left(\Theta(t) - \Theta(t-1)\right) + (2t - 3)\left(\Theta(t-1) - \Theta(t-2)\right) +$

$+ \Theta(t-2) =$

$= -t\Theta(t) + t\Theta(t-1) + 2t\Theta(t-1) - 3\Theta(t-1) -$

$- 2t\Theta(t-2) + 3\Theta(t-2) + \Theta(t-2) =$

SVAR

$$= \boxed{-t\Theta(t) + 3(t-1)\Theta(t-1) - 2(t-2)\Theta(t-2)}$$

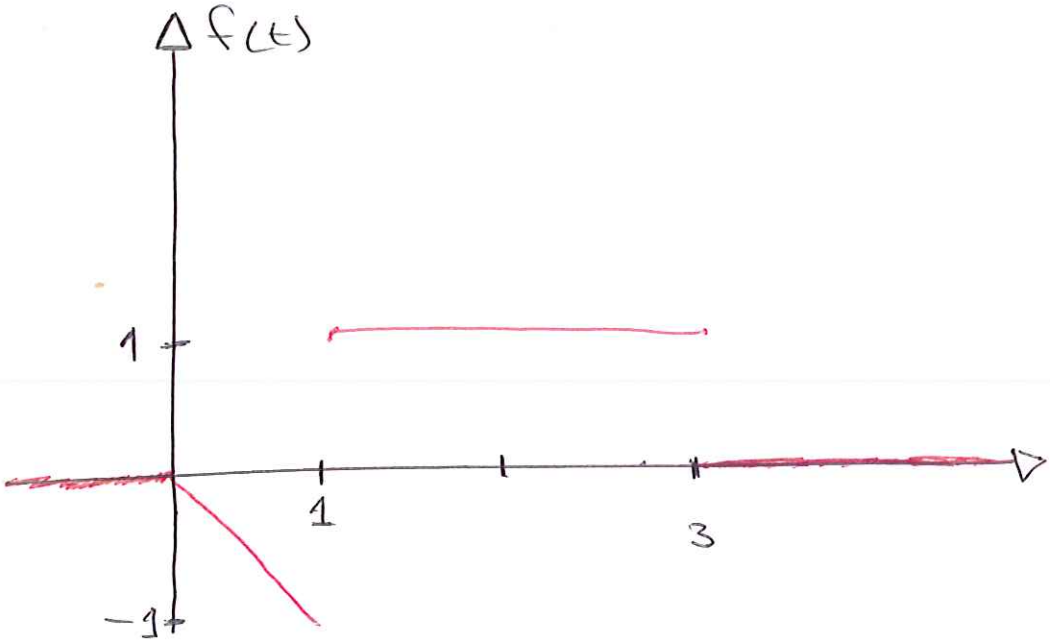
d)

$$f(t) = \begin{cases} e^{t} & \text{då } t < 0 \\ e^{-t} & \text{då } t > 0 \end{cases}$$

SVAR

$$\boxed{e^{t}(1-\Theta(t)) + e^{-t}\cdot\Theta(t)}$$

9.6 a) Skriv $f(t)$ mha en stegfunktion

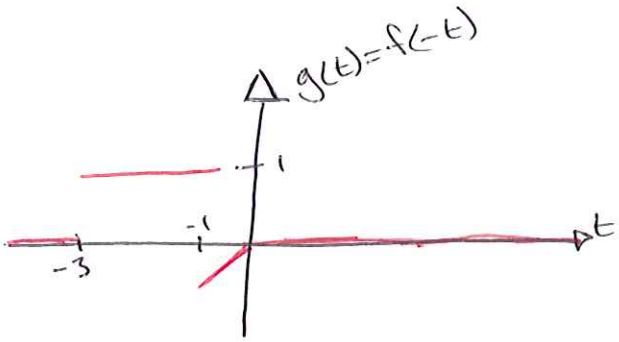


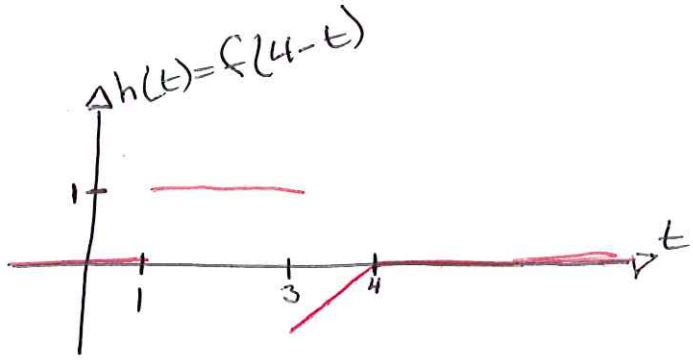
$$f(t) = -t(\Theta(t) - \Theta(t-1)) + 1\cdot(\Theta(t-1) - \Theta(t-3))$$

SVAR

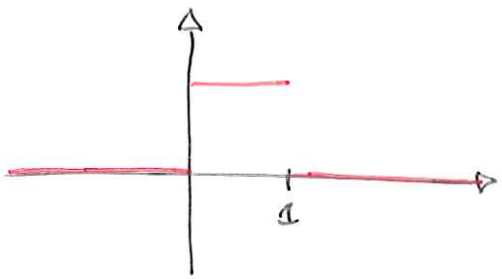
$$= \boxed{-t\,\Theta(t) + (t+1)\Theta(t-1) - \Theta(t-3)}$$

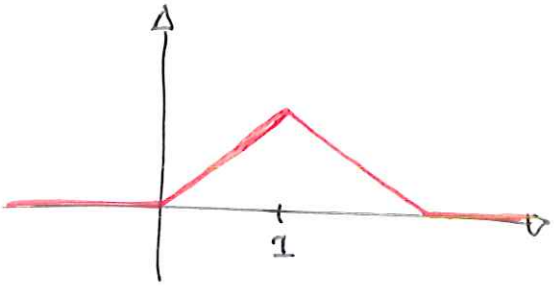
b)





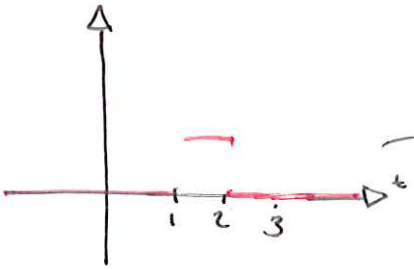
9.10 S är linjärt, svaret på en rektangelpuls p_1 är en triangelpuls.

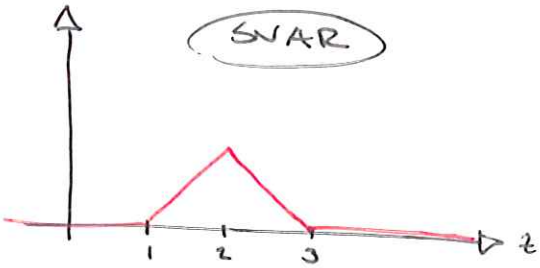




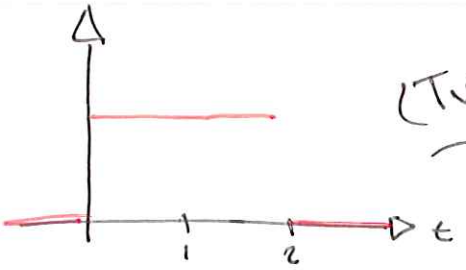
Bestäm grafiskt svaret på pulserna a–g

a)

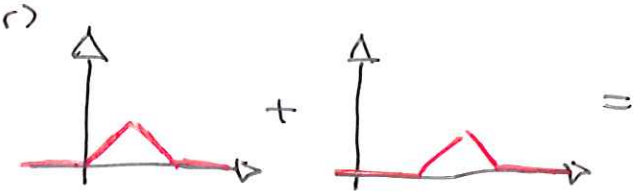


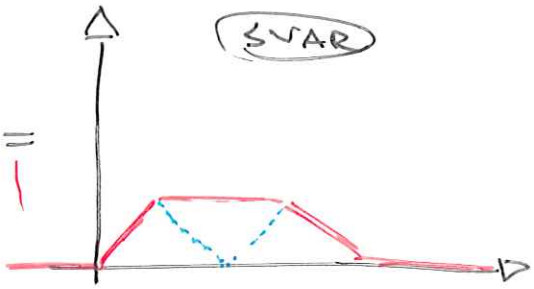


b)

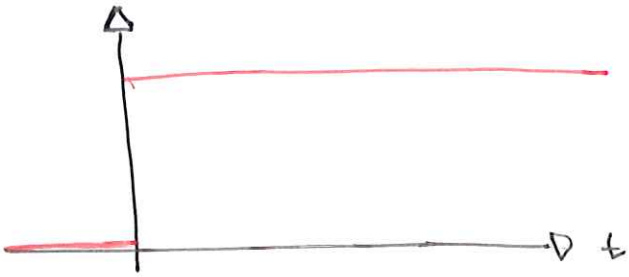


(Två rektangelpulser)

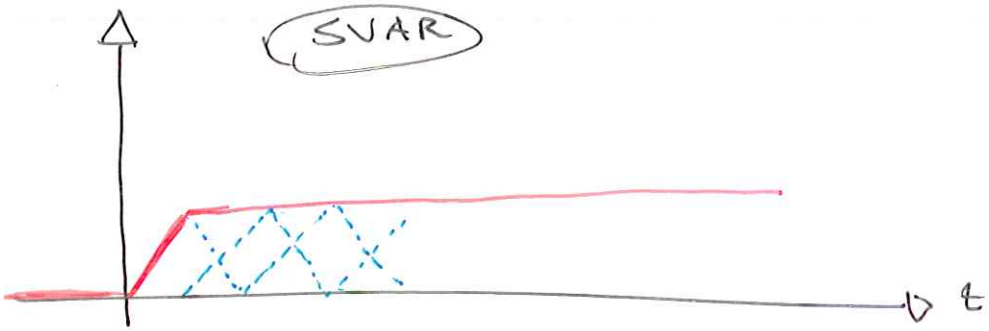




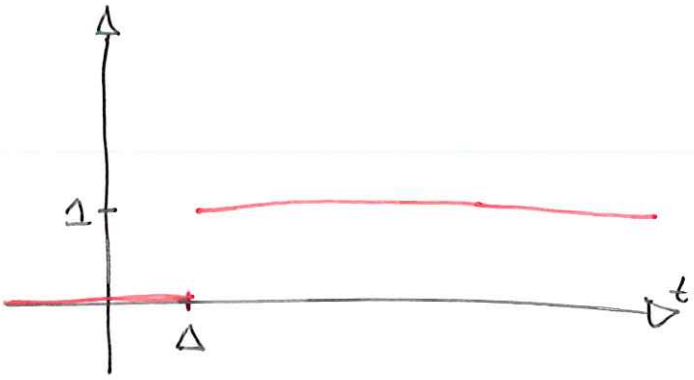
c)

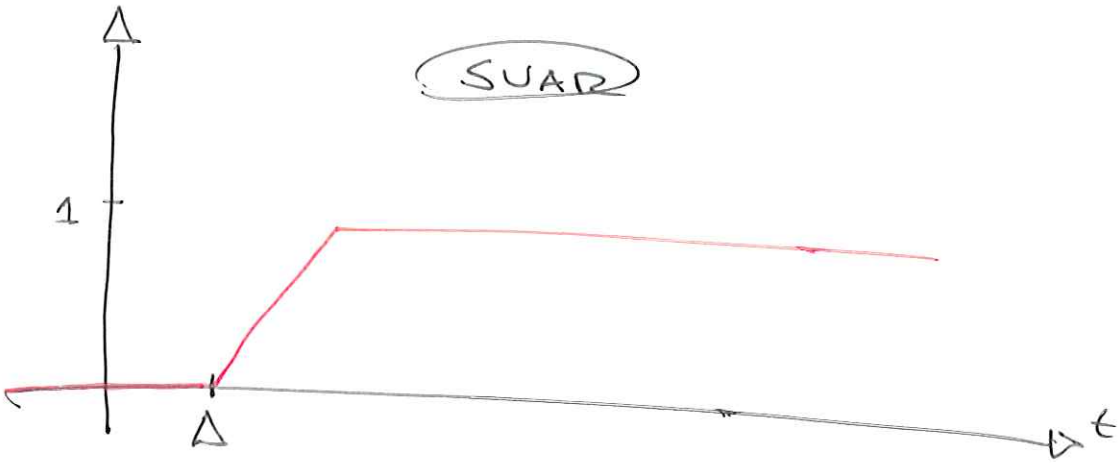


(oändligt många rektangelpulser)

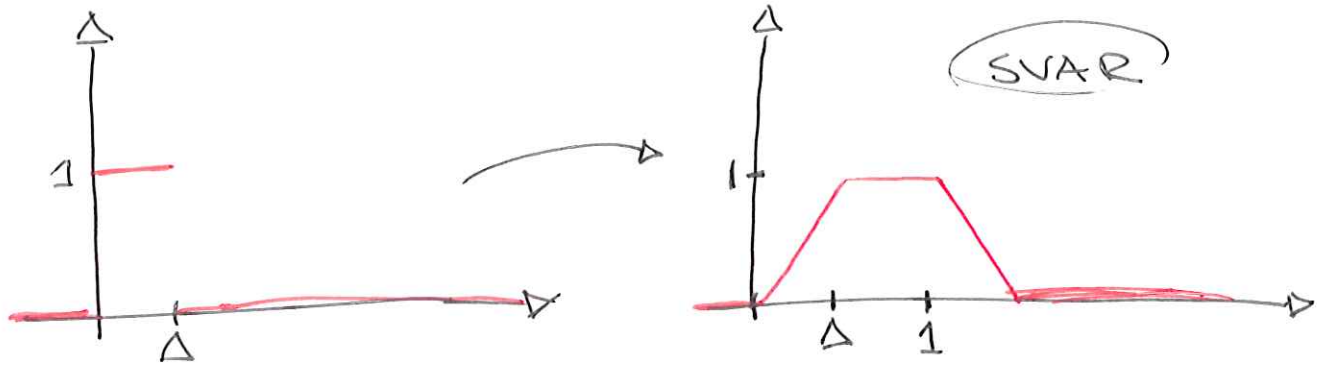


d)

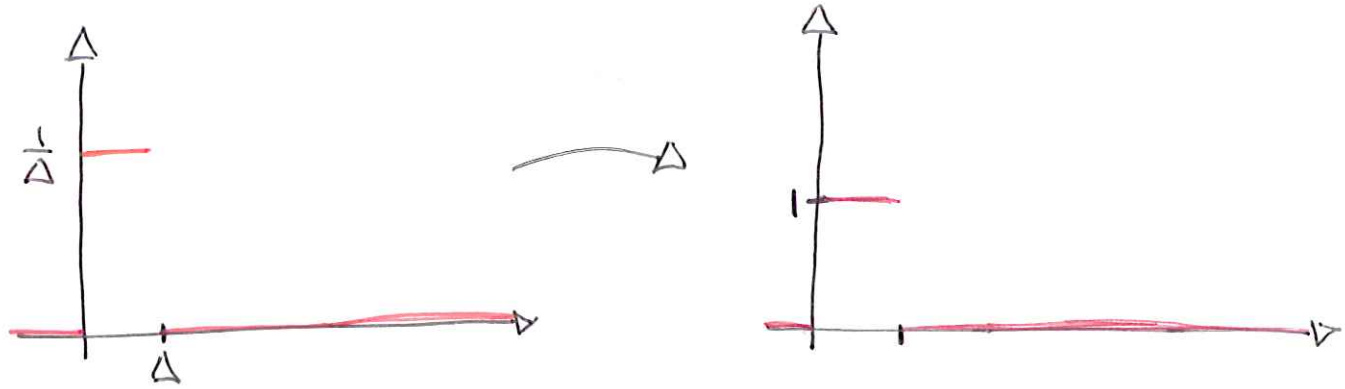




e)



f)



9.11 Visa att om insignal-utsignalrelationen för ett system är av formen

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\, w(\tau)\, d\tau$$

så är systemet linjärt och tidsinvariant.

Om systemet är linjärt så gäller:

$$\boxed{S(c_1 w_1 + c_2 w_2) = c_1 S(w_1) + c_2 S(w_2)}$$

$$c_1 S(w_1) = c_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\, w_1(\tau)\, d\tau$$

$$c_2 S(w_2) = c_2 \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\, w_2(\tau)\, d\tau$$

$$\boxed{S(c_1 w_1 + c_2 w_2)} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\left(c_1 w_1(\tau) + c_2 w_2(\tau)\right) d\tau =$$

$$= c_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\, w_1(\tau)\, d\tau + c_2 \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\, w_2(\tau)\, d\tau =$$

$$= \boxed{c_1 S(w_1) + c_2 S(w_2)} \Rightarrow \text{Systemet är linjärt}$$

#

Tidsinvarians:

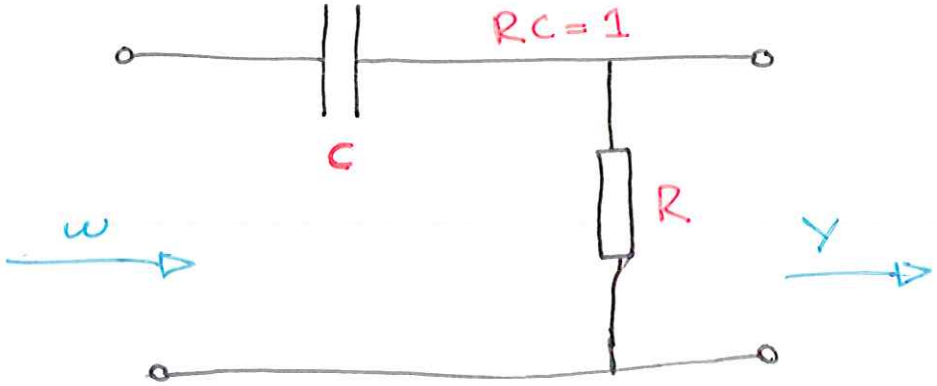
$$\hat{w}(t) = w(t - A) \Rightarrow \begin{bmatrix} \tau' = \tau - A \\ d\tau' = d\tau \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\, w(\tau)\, d\tau$$

$$\cancel{y(t')} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau'-A)\, \hat{w}(\tau')\, d\tau'$$

$$y(t-A) =$$

9.13 Högpassfiltret i figuren är linjärt och tidsinvariant och dess svar på ett enhetssteg $w(t) = \Theta(t)$ är $y(t) = e^{-t} \cdot \Theta(t)$.



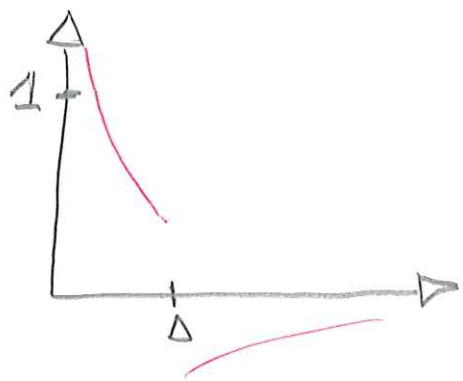
a) Ange svaret på ett förskjutet steg $w(t) = \Theta(t-a)$

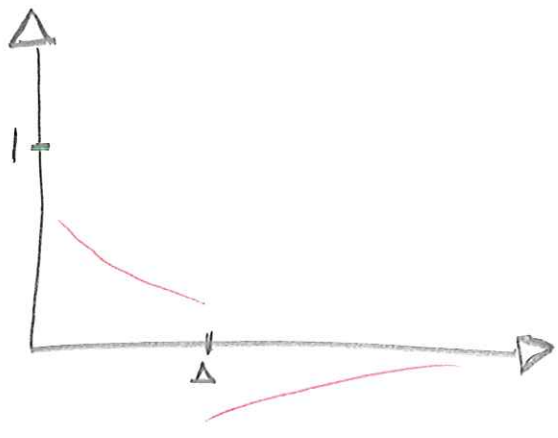
SVAR

$$\boxed{y(t-a) = e^{-(t-a)}\,\Theta(t-a)}$$

b) Ange och skissa svaret på en rektangelpols $w(t) = p_\Delta(t)$ både i fallet $\Delta \ll 1$ och $\Delta \gg 1$.

$$p_\Delta = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{\Delta} & 0 < t < \Delta \\ 0 & t > \Delta \end{cases} \longrightarrow \boxed{\frac{1}{\Delta}\left[e^{-t}\Theta(t) - e^{-(t-\Delta)}\Theta(t-\Delta)\right]}$$





9.14

Systemen i a-g är linjära & tidsinvarianta.
Vilka är kausala/stabila?

impulssvaret $h(t)$ är:

Kausala: b), d) f)

Stabila: a), b), c), e), g)

$\boxed{9.17}$

Bestäm impulssvaret $h(t)$ till det kausala system som bestäms av tillståndsekvationerna

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_2 + 3w \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 4x_1 + 3x_2 - w \\ y = 5x_1 - 6x_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$h(t) = C \cdot e^{At} \cdot B\, \theta(t) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{5t} + 2e^{-t} & e^{5t} - e^{-t} \\ 2e^{5t} - 2e^{-t} & 2e^{5t} + e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{3}\left(e^{5t} \cdot 14 - 77e^{-t}\right)}$$