9. ATOMKÄRNANS STRUKTUR

9.1 Betrakta skalet $N=3$. Bestäm kvant-talen för alla tillstånd i detta skal. Vilka värden på l förekommer här?

Vad vill vi göra?

Vi vill att $N = n_x + n_y + n_z = 3$

Vilka alternativ har vi?

$$\text{svar: } (n_x, n_y, n_z) = \begin{cases} (3,0,0),\ (0,3,0),\ (0,0,3) \\ (1,2,0),\ (1,0,2),\ (0,1,2),\ (2,1,0),\ (2,0,1),\ (0,2,1) \\ (1,1,1) \end{cases}$$

Vi har alltså degenerationsgrad $3+6+1=10$

Vi får $2 \cdot l + 1$ degenerationsgrader per l.

$l=3 \Rightarrow 7$ degenerationsgrader

$l=1 \Rightarrow 3$ degenerationsgrader

$\boxed{\text{svar: } l=1 \text{ och } l=3 \text{ förekommer...}}$

9.2 Bestäm degenerationsgraden för N.

$$\boxed{N = n_x + n_y + n_z}$$

Hur många lösningar finns?

Vi har en ekvation på formen $x+y+z=n$.

Om $x=0$

Då har vi alternativen $0, 1, 2, \ldots, n$ för y

$\Rightarrow$ y har $n+1$ alternativ.

När y är valt ~~kan~~ har z endast 1 alternativ.

Om $x=1 \Rightarrow y$ har n alt, z 1 alt.

om $x=2 \Rightarrow y$ har $n-1$ alt, z 1 alt

om $x=3 \Rightarrow y$ har $n-2$ alt, z 1 alt

$\vdots$

om $x=n-1 \Rightarrow y$ har 2 alt, z 1 alt

om $x=n \Rightarrow y$ har 1 alt z 1 alt

~~om x=n~~

Totalt har vi $1+2+\ldots+(n-1)+(n)+(n+1) =$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\boxed{\text{svar: } \frac{(N+1)(N+2)}{2}}$$

9.3 De magiska talen. (utan hänsyn till spinn)

Vi vill summera degenerationsgraderna till $N=4$

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{(k+2)(k+1)}{2} = \frac{2\cdot 1}{2} + \frac{3\cdot 2}{2} + \frac{4\cdot 3}{2} + \frac{5\cdot 4}{2} + \frac{6\cdot 5}{2} =$$

$$= 1+3+6+10+15 = \boxed{35}$$

9.4 Bestäm spektrum och degenerationsgrad för en tvådimensionell harmonisk oscillator.

$N = n_x + n_y$, $E_{n_x,n_y} = \hbar\omega\left(n_x + n_y + \frac{2}{2}\right) = \boxed{\hbar\omega(N+1)}$

spektrum

På hur många sätt kan vi välja n_x och n_y?

Vi kan välja n_x på $N+1$ sätt $(0,1,2,\ldots,N)$ och

n_y på ett sätt efteråt.

$\boxed{\text{Degeneration } g = N+1}$

$\boxed{9.5}$ $\boxed{\text{Bestäm spektrumet. Ange degenerationen.}}$

$$\boxed{\begin{aligned} &V(x,y,z)=\frac{1}{2}m\left(\omega_x^2x^2+\omega_y^2y^2+\omega_z^2z^2\right)\\ &\omega_x=\omega_y\neq\omega_z\end{aligned}}$$

$\omega_x=\omega_y=\omega \Rightarrow V(x,y,z)=\frac{1}{2}m\left(\omega^2(x^2+y^2)+\omega_z^2z^2\right)$

Detta $\Leftrightarrow$ ha en tvådimensionell oscillator i x- och y-led och en 1D osc. i z-led.

$\Rightarrow$ Symmetri kring z-axeln.

spektrum.

$$\boxed{E_{n_xn_yn_z}=\hbar\omega\left(n_x+n_y+\frac{2}{2}\right)+\hbar\omega_z\left(n_z+\frac{1}{2}\right)}$$

$\boxed{\text{Om } \omega_z=2\omega_y=2\omega_x=2\omega}$

$$\Rightarrow E=\hbar\omega\left(n_x+n_y+2n_z+1+\frac{1}{2}\cdot 2\right)=$$

$$=\boxed{\hbar\omega\left(n_x+n_y+2n_z+2\right)}$$

$N=n_x+n_y+2n_z$ ger degenerationsgraden.

Pss som 9.3 har vi:

om $n_z=0 \Rightarrow N+1$ alt för n_y, 1 för n_x

om $n_z=1 \Rightarrow N-1$ alt för n_y, 1 för n_x

$\vdots$

om $n_z=\frac{N}{2}-1 \Rightarrow 3$ alt för n_y, 1 för n_x

om $n_z=\frac{N}{2} \Rightarrow 1$ alt för n_x, 1 för n_x

Summerar vi detta får vi

Degeneration $g = 1+3+\ldots+(N-1)+(N+1) = \sum_{k=0}^{N/2} 1+2k$.

Vi kan inte ha $\frac{N}{2}$ om N är udda, vi hanterar detta fallet senare.

Om N är jämt

$$\sum_{k=0}^{N/2} 1+2k = \underbrace{\sum_{k=0}^{N/2} 1}_{\frac{N}{2}+1} + 2\sum_{k=0}^{N/2} k = \frac{N}{2} + 2\,\frac{\frac{N}{2}\left(\frac{N}{2}+1\right)}{2} =$$

$$= \left(\frac{N}{2}+1\right) + \frac{N}{2}\left(\frac{N}{2}+1\right) = \left(\frac{N}{2}+1\right)\frac{N^2}{4} + \frac{N}{2}$$

$$= N + \frac{N^2}{4} + 1 = \boxed{\frac{N^2+4N+4}{4}}$$

SVAR

Om N är udda

Vi skriver om $g = (N+1)+(N-1)+(N-3)+\ldots =$

$$= \sum_{k=0}^{(N+1)/2} N+1-2k = \sum_{k=0}^{(N+1)/2} N+1 - 2\sum_{k=0}^{(N+1)/2} k =$$

$$= (N+1)\left(\frac{N+1}{2}+1\right) - 2\left(\frac{N+1}{2}\right)\cdot\left(\frac{N+3}{2}\right) =$$

$$= \boxed{\frac{1}{4}\left(N^2+4N+3\right)}$$

SVAR