KAPITEL 7

7.1 Skriv de kvadratiska formerna nedan i matrisform $x^T K x$, där K är symmetrisk.

a) $2x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2$

$$x^T K x = [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

$$= [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} k_{11}x_1 + k_{12}x_2 \\ k_{21}x_1 + k_{22}x_2 \end{bmatrix} =$$

$$= k_{11}x_1^2 + k_{12}x_1x_2 + k_{21}x_1x_2 + k_{22}x_2^2 =$$

$$= k_{11}x_1^2 + (k_{12} + k_{21})x_1x_2 + k_{22}x_2^2 = 2x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_{11} = 2 \\ k_{12} = 1 \\ k_{21} = 1 \\ k_{22} = -1 \end{cases}$$

Eftersom K är symmetrisk måste $k_{12} = k_{21} = 1$!

$$\Rightarrow \boxed{K = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}$$

b) $\boxed{-x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + x_1x_3 + 4x_2x_3}$

$$x^T K x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \& \quad \begin{cases} k_{12} = k_{21} \\ k_{13} = k_{31} \\ k_{23} = k_{32} \end{cases}$$

$$= k_{11}x_1^2 + k_{12}x_1x_2 + k_{13}x_1x_3 +$$
$$+ k_{21}x_1x_2 + k_{22}x_2^2 + k_{23}x_3x_2 +$$
$$+ k_{31}x_1x_3 + k_{32}x_2x_3 + k_{33}x_3^2 =$$

$$* = k_{11}x_1^2 + k_{22}x_2^2 + k_{33}x_3^2 + 2k_{12}x_1x_2 + 2k_{13}x_1x_3 + 2k_{23}x_2x_3$$

$$= -x_1^2 + 3 \cdot x_2^2 + 4 \cdot x_3^2 - 2x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + 4 \cdot x_2x_3$$

$$\Rightarrow \boxed{K = \begin{bmatrix} -1 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 3 & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 & 4 \end{bmatrix}}$$

c) $\boxed{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}$

Jag använder $*$: $k_{11} = k_{22} = k_{33} = 0$

$k_{12} = k_{13} = k_{23} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{K = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}}$$

$\boxed{7.7}$

$\boxed{\text{Visa att } K \text{ symmetrisk} \Rightarrow S^T K S \text{ symmetrisk}}$

$$(S^T K S)^T = S^T K^T (S^T)^T = S^T K^T S$$

K symmetrisk $\Leftrightarrow K = K^T$

$$\Rightarrow S^T K^T S = S^T K S \Rightarrow \boxed{S^T K S \text{ är symmetrisk!}} \quad \#$$

Samma sak gäller ej för $S^{-1}KS$, detta visas enklast mha ett motexempel.

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow S^{-1} K S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \boxed{\text{Ej symmetrisk!}}$$

$\boxed{7.8}$ Kontrollera att matriserna

$$S' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } S'' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

båda diagonaliserar den kvadratiska formen.

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$$

$$x^T K x = k_{11}x_1^2 + k_{22}x_2^2 + 2k_{12}x_1x_2$$

$$\Rightarrow K = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(S')^T \cdot K \cdot S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

Diagonala!

$$(S'')^T K S'' = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}}$$

$\boxed{7.11}$ Bestäm ortonormerade koordinatbyten $x = Q\hat{x}$ som diagonaliserar de kvadratiska formerna.

a) $\boxed{-x_1^2 + 16x_1x_2 + 11x_2^2}$

<u>Sats 7:2</u>

$$Q^T K Q = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$$

$$f(x) = \hat{x}^T \Lambda \hat{x} = \lambda_1 \hat{x}_1^2 + \lambda_2 x_2^2$$

$$K = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 8 & 11 \end{bmatrix}, \quad \det(K - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 8 \\ 8 & 11-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(11-\lambda) - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow -11 + \lambda - 11\lambda + \lambda^2 - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 10\lambda - 27 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 5 \pm \sqrt{25+27} = 5 \pm \sqrt{52} = 5 \pm 2\sqrt{13}$$

Vad är de ute efter?

7.12 Ange klassen på de kvadratiska formerna i

a) 7.8): $\boxed{\text{psd}}$

d) 7.11 a) $\boxed{\text{id}}$

e) 7.11 b) $\boxed{\text{pd}}$

f) 7.11 c) $\boxed{\text{pd}}$

7.23 Avgör genom kvadratkomplettering (i matrisform) om följande kvadratiska former är positivt definita.

a) $-x_1^2 + 16x_1x_2 + 11x_2^2$, $K = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 8 & 11 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 8 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)+8(1)} \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 0 & 75 \end{bmatrix}$, alla pivåelement till

K är ej positiva.

b) $\boxed{2x_1^2 + 2x_2^2 + 20x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_2x_3}$

$$\Rightarrow K = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 34 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix}$$

alla pivåelement $> 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{Positivt definit!}}$

c) $$K = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

alla pivåelement $> 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{Positivt definit!}}$

7.27 Bestäm antalet positiva och negativa egenvärden till matrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Två positiva pivåelement / egenvärden

7.35 Ange den geometriska betydelsen av $x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = 1$

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{indefinit!}$$

$\Rightarrow$ Hyperbel.

$\boxed{7.36}$ Ange den geometriska betydelsen av

$$x_1 + x_2^2 + 10x_3^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 3x_2x_3 = 1$$

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3/2 \\ 1 & 1 & 3/2 \\ 3/2 & 3/2 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{20}{3} \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{31}{6} \end{bmatrix}$$