KAPITEL 6

6.1

$X = (1, -3, -1, 1) \quad , Y = (1, -1, -1, 1)$

a) $|X| = \sqrt{1^2 + 9 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{12} = \boxed{2\sqrt{3}}$

$|Y| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{4} = \boxed{2}$

b) $|X \cdot Y| = |X||Y|\cos\theta \iff \cos\theta = \dfrac{1+3+1+1}{2 \cdot 2\sqrt{3}} = \dfrac{3}{2\sqrt{3}}$

$\iff \boxed{\theta = \arccos\left(\dfrac{3}{2\sqrt{3}}\right)}$

c) $Y - \alpha X \perp X \iff (Y - \alpha X) \cdot X = \bar{0}$

$\iff (1-\alpha, -1+3\alpha, -1+\alpha, 1-\alpha) \cdot (1, -3, -1, 1) = 0$

$\iff 1 - \alpha + (-1+3\alpha)(-3) + (-1+\alpha)(-1) + (1-\alpha) = 0$

$\iff \boxed{\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha X = \frac{1}{2}(1, -3, -1, 1),}$

$\boxed{(Y - \alpha X) = \frac{1}{2}(1, 1, -1, 1)}$

d) $|X_{norm}| = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2\sqrt{3}}(1, -3, -1, 1) = X_{norm}}$

$|Y_{norm}| = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}(1, 1, -1, 1) = Y_{norm}}$

6.16

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

a) $\boxed{\text{Kontrollera att kolonnerna i } Q \text{ är ortonormerade}}$

Enligt sats 6.5 ska $Q^T = Q^{-1}$ uppfyllas.

$\Leftrightarrow \boxed{Q^T Q = I}$

$$Q^T Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = I$$

#

$\boxed{\text{Ja, kolonnerna är ortonormerade.}}$

b) $Q^{-1} = Q^T = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}$

6.17

$\boxed{\text{Bestäm alla vektorer som är ortogonala både mot } (1,-1,0) \text{ och } (1,1,1).}$

Jag normerar vektorerna: $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$

Enligt sats 6.5: $Q^T = Q^{-1} \Leftrightarrow \boxed{Q^T Q = I}$

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & a \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & b \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & c \end{bmatrix}, \quad Q^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ a & b & c \end{bmatrix}, \quad Q^T Q = I \Rightarrow$$

$\boxed{V = (a,b,c) = (1,1,-2)k \quad k \text{ är godt.}}$

6.18

Bestäm en ortonormerad bas i planet

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$$

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1 \Rightarrow x_3 = \frac{x_1 + 2x_2}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{q_1 = \left(1, 1, \frac{3}{2}\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{17}}}$$

$$q_2 = \left(a, b, \frac{a+2b}{2}\right), \quad q_2 \perp q_1$$

$$\Rightarrow q_1 \cdot q_2 = 0 \ -$$

$$\Leftrightarrow \left(1, 1, \frac{3}{2}\right) \cdot \left(a, b, \frac{a+2b}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow a + b + \frac{3a + 6b}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow 7a + 10b = 0 \quad \Leftrightarrow b = \frac{7}{10} a$$

$$a = \frac{10}{7} \Rightarrow b = 1 \Rightarrow \frac{a+2b}{2} = \frac{5}{7} + \frac{7}{7} = \frac{12}{7}$$

$$\Rightarrow \boxed{q_2 = \left(\frac{10}{7}, 1, \frac{12}{7}\right) \cdot \frac{7}{\sqrt{293}}}$$

6.25

Visa att för varje matris A så är både AA^T och A^TA symmetriska.

Om en matris M är symmetrisk så innebär det att

$$M^T = M$$

På samma sätt så innebär det i uppgiften att

$$(AA^T)^T = AA^T \quad \text{och att} \quad (A^TA)^T = A^TA$$

Detta kan vi visa mha regeln

$$(AB)^T = B^T \cdot A^T \quad \text{(observera ordningen)}$$

$$\Rightarrow (AA^T) = (A^T)^T \cdot A^T = AA^T \quad \#$$

$$\Rightarrow (A^TA)^T = A^T \cdot (A^T)^T = A^TA \quad \#$$

$\boxed{6.26}$ Visa att om A är symmetrisk och inverterbar, så är även A^{-1} symmetrisk.

$A^T = A \implies (A^{-1})^T = A^{-1}$ (detta vill vi visa)

Vi vet att $AA^{-1} = I$

Transponering av $\rfloor$ ger:

$A^T \cdot (A^{-1})^T = I^T = I$

$\iff A^T$ har inversen $(A^{-1})^T$

$\iff (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Om A är symmetrisk $\implies A^T = A$

$\iff (A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$

$\iff$ $\boxed{A^{-1} \text{ är symmetrisk!}}$ #

6.27

a) Ge exempel på två symmetriska 2×2-matriser vars produkt ej är symmetrisk!

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$ ej symmetrisk!

b) Visa att om A och B är symmetriska och kommuterar så är AB symmetrisk

A och B kommuterar $\Leftrightarrow AB = BA$

$$(AB)^T = B^T A^T = B \cdot A = AB \quad \#$$

6.29

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{bmatrix}}$$

Finn en ortogonal matris Q så att $\hat{A} = Q^T A Q$ är diagonal.

$$A \cdot s = \lambda s \iff (A - \lambda I)s = 0$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & 3 \\ 3 & 3 & 20-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda^3 + 24\lambda^2 - 65\lambda + 42 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 21}$$

Ta fram egenvektorerna och sätt dem till kolumner i Q och du är klar.