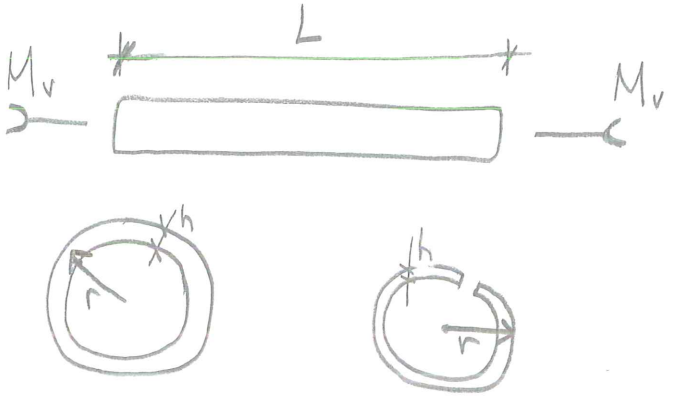
KAPITEL 6

6.1 En stång av längden L är utsatt för vridande moment. Bestäm förvridningen.

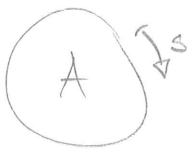


(26): $\varphi = \dfrac{M_v L}{GK}$

K är vridstyvhetens tvärsnittsfaktor och enligt formelsamlingen är:

$K_1 = \frac{1}{3}\int h^3(s)\,ds$ där t är tjocklek och s går längs med stången. (här är t konstant)

$\Rightarrow K_1 = \frac{1}{3} h^3 \cdot 2\pi$ (2π eftersom vi går ett varv)



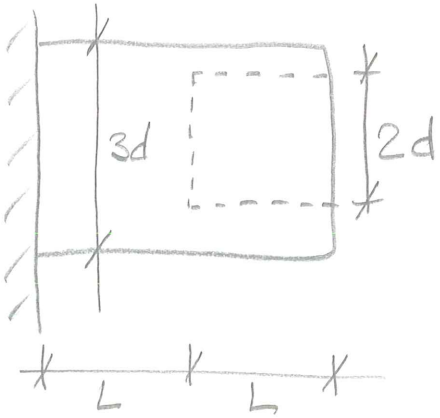
$$K_2 = \frac{4A^2}{\oint h^{-1} ds} = \frac{4A^2 h}{\oint ds} = \frac{4(\pi r^2)^2 h}{2\pi r} = 2\pi r h$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi_0^{(1)} = \dfrac{3M_v L}{2\pi G h^3 r} \\ \varphi_0^{(2)} = \dfrac{M_v L}{2\pi G r^3 h} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{\varphi_0^{(1)}}{\varphi_0^{(2)}} = 3\left(\frac{r}{h}\right)^2}$$

6.3

Vi har en till hälften urborrad cylindrisk axel som är belastad med det vridande momentet M_v. Beräkna fria ändens förvridning.

Urborrad cylindrisk axel

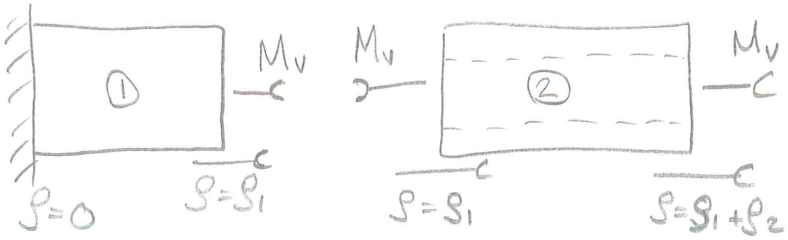


$\tau_{max} = 80\ N/mm^2$

$G = 80000\ N/mm^2$

$d = 20\ mm$

$L = 500\ mm$



$$\rho_1 = \frac{M_v L}{G K_1}, \quad K_1 = \frac{\pi}{32}(3d)^4 = \frac{81\pi d^4}{32}$$

$$\rho_2 = \frac{M_v L}{G K_2}, \quad K_2 = \frac{\pi}{32}\left((3d)^4 - (2d)^4\right) = \frac{65\pi}{48} d^4$$

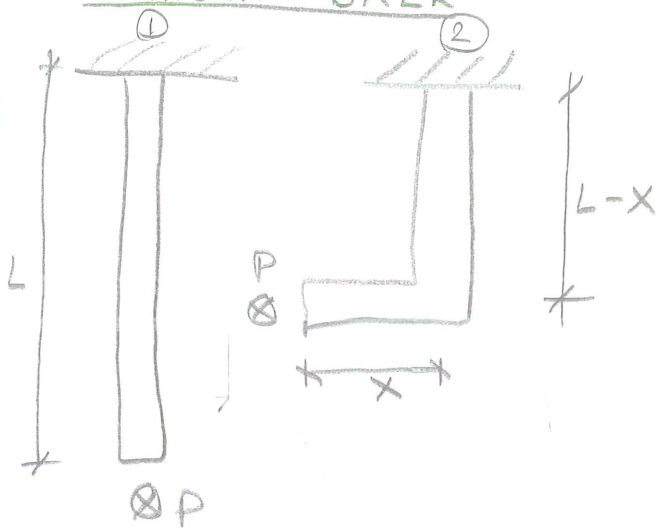
$$M_v = \tau_{max} \cdot W_v = \tau_{max} \cdot \frac{\pi}{16 \cdot 3d}\left((3d)^4 - (2d)^4\right) = \tau_{max} \cdot \frac{65\pi}{48} d^4$$

$$\Rightarrow \rho_1 + \rho_2 = \frac{32 M_v L}{81\pi G d^4} + \frac{32 M_v L}{65\pi G d^4} = \left(\frac{1}{81} + \frac{1}{64}\right)\frac{32L}{\pi G d^4} \cdot \frac{65\pi}{48}\tau_{max} =$$

$$= 0.03\ rad = \boxed{1.72^\circ}$$

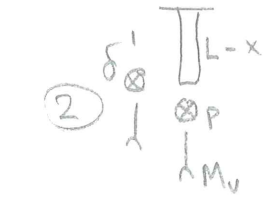
6.6

CIRKULÄR BALK



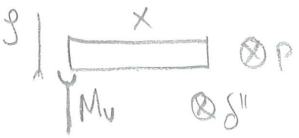
En konsolbalk med längden L är belastad med en tyngd P i ytteränden enligt vänstra figuren. Man vill flytta tyngden åt sidan men önskar att behålla samma nedböjning vid P.
Kan detta åstadkommas genom att bygga om balken enligt högra figuren? Vad är x isf?

① $\delta = \dfrac{PL^3}{3EI}$, $I = \dfrac{\pi r^4}{4}$

② 

$$\delta = \frac{P(L-x)^3}{3EI} \quad , \quad \varphi = \frac{M_v(L-x)}{GK} \quad , \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad (26)$$

$$K = \frac{\pi r^4}{2} = 2I \Rightarrow \varphi = (1+\nu)\frac{M_v(L-x)}{EI}$$



Jämvikt ger att $M_v = Px$

$$\delta'' = \frac{Px^3}{3EI} + \varphi x \quad , \quad \varphi = (1+\nu)\frac{Px(L-x)}{EI}$$

$$\delta'' = \frac{Px^3}{3EI} + (1+\nu)\frac{Px^2(L-x)}{EI} = \left(\frac{1}{3}\left(\frac{x}{L}\right)^3 + (1+\nu)\left(\frac{x}{L}\right)\left(1-\frac{x}{L}\right)\right)\frac{PL^3}{EI}$$

$$\delta = \delta' + \delta'' \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(1-\frac{x}{L}\right)^3 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{L}\right)^3 + (1+\nu)\left(\frac{x}{L}\right)^2\left(1-\frac{x}{L}\right)$$

$$0 = -\frac{x}{L} + \left(\frac{x}{L}\right)^2 + (1+\nu)\left(\frac{x}{L}\right)^2\left(1-\frac{x}{L}\right) \Rightarrow 1 = (1+\nu)\frac{x}{L}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{L}{1+\nu}}$$