KAPITEL 5

5.1 Beräkna e^{tA}

a) $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\Lambda = \text{diag}(5, -1) = A$ (redan diagonaliserad)

Jämför med ex 5.1 på s. 87:

SVAR

$$\boxed{e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}}$$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, $\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 0$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -1 \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 4 + 4x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{s_1 = (1, -1)}$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = 5 \Rightarrow \begin{cases} -4x_1 + 2x_2 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{s_2 = (1, 2}$$

$$\boxed{S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} \Rightarrow \Lambda = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{t\Lambda} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{bmatrix} \Rightarrow e^{tA} = S e^{t\Lambda} S^{-1} =$$

SVAR

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \boxed{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} e^{5t} + 2e^{-t} & e^{5t} - e^{-t} \\ 2e^{5t} - 2e^{-t} & 2e^{5t} + e^{-t} \end{bmatrix}}$$

c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda I) = (-\lambda)^2 + 1 = 0$

$\Rightarrow \boxed{\lambda = \pm i}$

$\lambda = i \Rightarrow \begin{cases} -ix_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 - ix_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{s_1 = (1, i)}$

$\lambda = -i \Rightarrow \begin{cases} ix_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 + ix_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{s_2 = (i, 1)}$

$\Rightarrow S = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$

$e^{tA} = S \cdot e^{t\Lambda} \cdot S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} =$

$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{it} & ie^{-it} \\ ie^{it} & e^{-it} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{it} + e^{-it} & -ie^{it} + ie^{-it} \\ ie^{it} - ie^{-it} & e^{it} + e^{-it} \end{bmatrix} =$

SVAR

$= \boxed{\begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}}$

e) $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & 0 & -2\\ -2 & 2 & 1\end{bmatrix}$, $P_A=\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & -2\\ 2 & -\lambda & -2\\ -2 & 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=$

$$=\dots=\lambda^3-2\lambda^2-\lambda+2=(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1)=0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_1=2,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=-1}$$

$$\boxed{\lambda_1=2}\Rightarrow\begin{bmatrix}-1 & 1 & -2\\ 2 & -2 & -2\\ -2 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\end{bmatrix}=\bar{0}\Leftrightarrow\begin{cases}-z_1+z_2-2z_3=0\\ 2z_1-2z_2-2z_3=0\\ -2z_1+2z_2-z_3=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow z_3=0\Rightarrow z_1=z_2\Rightarrow\boxed{z=c\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}}$$

$$\boxed{\lambda_2=1}\Rightarrow\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\ 2 & -1 & -2\\ -2 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\end{bmatrix}=\bar{0}\Leftrightarrow\begin{cases}z_2-2z_3=0\\ 2z_1-z_2-2z_3=0\\ -2z_1+2z_2=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2z_1-z_2-2z_3=0\\ z_2-2z_3=0\\ z_2-2z_3=0\end{cases}\Rightarrow z_2=2z_3\Rightarrow z_1=z_2$$

$$\Rightarrow\boxed{z=c\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}}$$

$$\lambda_3 = -1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \bar{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2z_1 + z_2 - 2z_3 = 0 \\ 2z_1 + z_2 - 2z_3 = 0 \\ -2z_1 + 2z_2 + 2z_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow z_2 = 0 \Rightarrow z_1 = z_3$$

$$\Rightarrow \boxed{z = c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow S^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{tA} = S e^{t\Lambda} S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \boxed{\begin{bmatrix} 2e^{2t} - 2e^{t} + e^{-t} & -e^{2t} + 2e^{t} - e^{-t} & -2e^{2t} + 2e^{t} \\ 2e^{2t} - 2e^{t} & -e^{2t} + 2e^{t} & -2e^{2t} + 2e^{t} \\ -e^{t} + e^{-t} & e^{t} - e^{-t} & e^{t} \end{bmatrix}}$$

$\boxed{5.2}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Denna har vi från 5.1 !

a) $A \cdot e^{tA} = \frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right) = \boxed{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5e^{5t} - 2e^{-t} & 5e^{5t} + e^{-t} \\ 10e^{5t} + 2e^{-t} & 10e^{5t} - e^{-t} \end{bmatrix}}$

$\Updownarrow$

b) $e^{tA} \cdot A = \frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right) = \boxed{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5e^{5t} - 2e^{-t} & 5e^{5t} + e^{-t} \\ 10e^{5t} + 2e^{-t} & 10e^{5t} - e^{-t} \end{bmatrix}}$

c) $\frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right) =$

$\boxed{5.3}$ Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = 4x_1 + 3x_2 \end{cases} \quad , x_1(0) = 6 \ , \ x_2(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = Ax + f(t)$$

Denna term kan strykas eftersom $f(t) = 0$

Enligt sats 5.3 (s. 92)

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \cancel{\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} \cdot f(\tau)\, d\tau}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow e^{At} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} e^{5t} + 2e^{-t} & e^{5t} - e^{-t} \\ 2e^{5t} - 2e^{-t} & 2e^{5t} + e^{-t} \end{bmatrix}$$ (se 5.1 b))

SVAR

$$x(t) = e^{tA} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \boxed{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} e^{5t} + 2e^{-t} & e^{5t} - e^{-t} \\ 2e^{5t} - 2e^{-t} & 2e^{5t} + e^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$\boxed{5.4}$ Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t) \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad f(t) = \begin{bmatrix} -2e^{t} \\ -10e^{t} \end{bmatrix}$$

Sats 5.3 används (se upg. 5.3)

$$\Rightarrow x(t) = e^{At}\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\begin{bmatrix} -2e^{\tau} \\ -10e^{\tau} \end{bmatrix} d\tau =$$

SVAR

$$= \ldots = \boxed{\begin{bmatrix} e^{5t} + 3e^{-t} + 2e^{t} \\ 2e^{5t} - 3e^{-t} + e^{t} \end{bmatrix}}$$

$\boxed{5.5}$ $\boxed{\text{Bevisa formeln}}$

$$\boxed{\det(e^A) = e^{\operatorname{tr} A}} \quad (A \text{ är diagonaliserbar})$$

$$e^A = Se^{\Lambda}S^{-1} = \quad (\text{def } 5.2 \text{ s. } 87)$$

$$= S \cdot \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) S^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\det(e^A)} = \det(S) \cdot \det(\operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})) \cdot \det(S^{-1}) =$$

De tar ut varandra

$$= e^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n} = e^{\operatorname{tr} \Lambda} = \boxed{e^{\operatorname{tr} A}}$$

SAMMA!

$\boxed{5.7}$ $\boxed{\text{Beräkna } e^{At} \text{ för}}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^k = 0 \ , \ k \geq 3$$

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \cdot t^k = I + A \cdot t + \frac{1}{2} A^2 t^2 =$$

SVAR

$$= \boxed{\begin{bmatrix} 1 & t & t + \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

$\boxed{5.8}$ Visa att om

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

så är $e^{At} \cdot e^{Bt} \neq e^{Bt} \cdot e^{At} \neq e^{(A+B)t}$

$$A^2 = 0 \quad , \quad B^2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{At} = I + At \quad , \quad e^{Bt} = I + Bt}$$

$$e^{At} \cdot e^{Bt} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -t & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-t^2 & 0 \\ -t & 0 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\#}$

$$e^{Bt} \cdot e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ -t & -t^2 \end{bmatrix}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad (A+B)^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(A+B)^3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad (A+B)^4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A+B)^5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = A+B$$

5.17 Bevisa entydighetssatsen:

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{d\Phi}{dt} = A\Phi \ , \ t \geq 0 \\ \Phi(0) = I \end{cases} \Rightarrow \Phi(t) = e^{tA}}$$

$$\Phi(t) \cdot e^{-tA} = 1 \quad (\text{konstant})$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\Phi(t) \cdot e^{-tA}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\Phi}{dt} e^{-tA} + \Phi(t) \cdot (-A) e^{-tA} =$$

$$= e^{-tA}\left(\frac{d\Phi}{dt} - A\Phi(t)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = A\Phi(t)$$

$$\Rightarrow \Phi(t) = Ce^{tA} \ , \ \Phi(0) = C = I$$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi(t) = e^{tA}} \quad \#$$

$\boxed{5.20}$ $\boxed{\text{Beräkna } A^{1000}}$

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}}$$

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 5 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} s_1 = (1,-1) \\ s_2 = (1,2) \end{cases} \Rightarrow S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow S^{-1} = \frac{1}{2+1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Trivialt

$$\boxed{SD = AS} \Leftrightarrow A = SDS^{-1}$$

$$A^{1000} = SD^{1000}S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^{1000} & 0 \\ 0 & 5^{1000} \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

SVAR

$$\boxed{= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5^{1000} + 2 & 5^{1000} - 1 \\ 2 \cdot 5^{1000} - 2 & 2 \cdot 5^{1000} + 1 \end{bmatrix}}$$

5.21

Låt $p(s)$ vara ett polynom. Visa att om z är en egenvektor till A med egenvärde λ, så är z en egenvektor även till $p(A)$. Vilket är egenvärdet?

$p(s) = a_0 + a_1 s^1 + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n$ och $Az = \lambda z$

$p(s) \cdot z = a_0 z + a_1 s z + a_2 s^2 z + \dots + a_n s^n z$

$p(A) \cdot z = a_0 z + a_1 A z + a_2 A \cdot A z + \dots + a_n A^{n-1} A z$

Vi vet att $Az = \lambda z$

$\Rightarrow p(A) z = a_0 z + a_1 \lambda z + a_2 A \lambda z + a_n A^{n-1} \lambda z =$

$= a_0 z + a_1 \lambda z + a_2 \lambda^2 z + \dots + a_n \lambda^n z$

$= \boxed{p(\lambda) \cdot z}$ $\square$

5.34

Antag att A är diagonaliserbar. Avgör under vilka villkor på egenvärdena som gränsvärdet $\lim_{k \to \infty} A^k$ existerar.

$$A^k = SD^kS^{-1} = S \cdot \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k) S^{-1}$$

SVAR

$\lim_{k \to \infty} A^k$ existerar alltså då $\boxed{|\lambda| \leq 1}$