

# KAPITEL 5

5.1

Ett linjärt rum styrs av matriserna

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \beta \\ 1 \end{bmatrix}, C = [0 \ 1] \quad D = 0$$

a) För vilka värden på  $\beta$  är systemet styrbart?

Enligt s. 71 så är systemet styrbart om  
styrbarhetsmatrisen  $W_s = [B \ AB]$  har två  
linjärt oberoende kolonner.

$$W_s = [\cancel{\beta} B \ AB] = \begin{bmatrix} \beta & 1-\beta \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det(W_s) = -2\beta - 1 \cdot (1-\beta) \neq 0 \quad (\text{huvudsatsen})$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\beta \neq -1}$$

b) För vilka värden på  $\gamma$  är systemet observerbart?

Observerbarhetsmatrisen  $W_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}$  ska ha två

linjärt oberoende rader. (s. 76)

$$W_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & -2\gamma \end{bmatrix}$$

$\det(W_o) = 0$  för alla  $\gamma$ !

$\Rightarrow$  Systemet är inte observerbart för  
något värde på  $\gamma$ .

5.2

Ett linjärt system beskrivs av:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ange vilka tillstånd som är styrbara.

$$W_s = [B \ AB \ A^2B] = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 16 \\ -2 & 4 & -8 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} k_1 \\ \uparrow \\ k_2 \\ \uparrow \\ k_3 \\ \uparrow \end{array}$$

De tre kolonnerna ( $k_1, k_2, k_3$ ) kan alla skrivas på formen  $\alpha(4 -2 1)^T$ .

$\Rightarrow$  De styrbara tillstånden beskrivs av vektorn  $\alpha(4 -2 1)^T$ .

5.3

Är systemet observerbart?

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}u$$

$$y = [1 \ 1]x$$

$$W_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$W_o x_o = 0 \Rightarrow x_o = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

5.5

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 3 & 7 \end{bmatrix} x$$

a) Är systemet styrbart?

$$W_s = [B \ AB] = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & -7 & -16 \end{bmatrix}$$

Rangen (antalet linj. obero. kolonner) för  $W_s$  är två. Enligt s.71 behövs två linj. obero. kolonner.

$\Rightarrow$  Systemet är styrbart.

b)  $u_2 = 0$ . Är systemet styrbart?

$$u_2 = 0 \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$W_s = [B \ AB] = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\det(W_s) = -7 - 8 \neq 0 \Rightarrow$$
Systemet är styrbart

5.6

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{array} \right.$$

a) Är systemet styrbart?

$$W_s = [B \ AB] = \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\det(W_s) = 0 \Rightarrow$  systemet är **inte** styrbart.

De styrbara tillstånden är:

$$\mathbf{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T$$

b) Beräkna systemets överföringsfunktion

$$FS: G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{5}{s+2}$$

c) Kan relationen skrivas med färre antal tillstånd?

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}} = -2\mathbf{x} + 5u \\ \mathbf{y} = \mathbf{x} \end{array} \right.$$

5.8

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}u$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}x$$

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}$$

Bestäm en styrleg  $u = l_r r - Lx$  så att det återkopplade systemets poler placeras i  $-4$  och den stationära förstärkningen blir  $1$ .

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}(l_r r - Lx) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} -l_1 & -l_2 \\ 2l_1 & -2l_2 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}l_r r \\ Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} l_1 - 1 & -l_2 \\ -2l_1 & -2l_2 - 2 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}l_r r \\ Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}x \end{cases}$$

Enligt FS har vi överföringsfunktionen:

$$G = \frac{1 \cdot C}{\det(sI - A + BL)} \cdot \text{adj}(sI - A + BL) \cdot Bl_r$$

Vi är intresserade av nämnaren.

$$\det(sI - A + BL) = s^2 + (3 + l_1 + 2l_2)s + 2(1 + l_1 + l_2) = 0$$

$$\text{Identifieras med } (s+4)^3 = s^3 + 8s^2 + 16s = 0$$

$$\Rightarrow l_1 = 9, l_2 = -2 \quad G(0) = 1 \Rightarrow l_r = 4$$

5.9

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{array} \right.$$

Q) Beräkna en tillståndsåterkoppling

$$u = -Lx + l_r r$$

så att det slutna systemet får poler i  $-4 \pm 4i$   
& så att den statiska först. blir 1

PSS sam i 5.8

då

$$\det(sI - A + BL) = s^2 + (0.5 + 3l_1)s + 3l_2$$

$$\text{Identifieras m.: } (s+4+4i)(s+4-4i) = s^2 + 8s + 32$$

$$\Rightarrow l_1 = \frac{5}{2}, \quad l_2 = 32/3$$

$$G(0) = 1 \Rightarrow l_r = 32/3$$

b) Beräkna ett Kalmanfilter för systemet

Jag dubblar avståndet till båda polerna.

poler:  $-8 \pm 8i$ .

$$\text{Kar pol: } (s+8+8i)(s+8-8i) =$$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$$
$$= (s+8)^2 + (8i)^2 =$$

$$= s^2 + 16s - 64 + -64 =$$

$$= s^2 + 16s - 128$$

$$\det(sI - A + KC) = \begin{vmatrix} s+0.5 & k_1 \\ -1 & s+k_2 \end{vmatrix} = s^2 + (0.5+k_2)s + 0.5k_2 + k_1$$

Identifiering:  $K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120.25 \\ 15.5 \end{bmatrix}$

5.12

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}u \\ y = [0 \ 1]x \end{cases}$$

Bestäm  $K$  så att Kalmanfiltrets poler  
hamnar i  $s = -4$

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = Ax + Bu + K(y - C\hat{x})$$

$$\det(sI - A + KC) = s^2 + (4+k_2)s + (k_1, k_2 + 3) = 0$$

$$\text{Identificering med } (s+4)^2 = s^2 + 8s + 16$$

$$\Rightarrow k_1 = 5, \quad k_2 = 4$$

5.13

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ Y = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} x \end{array} \right.$$

2) Fixa poler i  $-4$ , återkoppla

$$\det(sI - A + BL) = \begin{vmatrix} s+4+l_1 & 3+l_2 \\ -1 & s \end{vmatrix} =$$

$$= s^2 + (4+l_1)s + 3+l_2 = 0$$

Identifiera med  $(s+4)^2 = s^2 + 8s + 16 = 0$

$$\Rightarrow l_1 = 4 \text{ och } l_2 = 13$$

$$\Rightarrow u = -4x_1 - 13x_2$$

b) Kan man med ett Kalmanfilter åstadkomma att skattningsfelet avtar med  $(s+6)^2$ ?

Vi vill ha en dubbelpol i  $-6$ .

$$\det(sI - A + KC) = s^2 + (4+k_1+3k_2)s + (3+3k_1+9k_2) = 0$$

$$\text{Identifiera med } (s+6)^2 = s^2 + 12s + 36$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4+k_1+3k_2 = 12 \\ 3+3k_1+9k_2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1+3k_2 = 8 \\ k_1+3k_2 = 11 \end{cases}$$

Inga lösningar!

(en av polerna är ict observerbar).

c) Kan vi ha dubbelpol i  $-3$  då?...

$$\det(sI - A + KC) = s^2 + (4+k_1+3k_2)s + (3+3k_1+9k_2) = 0$$

$$\text{Identifiera med: } (s+3)^2 = s^2 + 6s + 9 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4+k_1+3k_2 = 6 \\ 3+3k_1+9k_2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1+3k_2 = 2 \\ k_1+3k_2 = 2 \end{cases} \quad \text{och}$$

Vi har oändligt många lösningar på formen  $k_1+3k_2=2$ .