KAPITEL 4

4.1 Avgör om $\frac{dx}{dt} = Ax$ är stabilt, neutralt stabilt eller instabilt.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 0$

$\mathrm{Re}(\lambda_i)$

$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 5 \end{matrix}} \Rightarrow \sigma(A) = \max\limits_{i=1,2} = \boxed{5}$

SATS 4.1

stabilt $\Leftrightarrow \sigma(A) < 0$

neutralt stabilt $\Leftrightarrow \sigma(A) = 0$

instabilt $\Leftrightarrow \sigma(A) > 0$

Denna sats använder vi på alla uppgifter 4.1 a–h!

SVAR

$\sigma(A) = 5 > 0 \Rightarrow$ **A är instabil**

c) $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda I) = (-2-\lambda)^2 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{\lambda = -2 \pm i} \Rightarrow \sigma(A) = -2 < 0 \Rightarrow$ **stabilt**

e) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda I) = (2-\lambda)^2 + 9 = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{\lambda = 2 \pm 3i} \Rightarrow \sigma(A) = 2 > 0 \Rightarrow \boxed{\text{instabilt}}$

h) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & -8 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 6 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ -4 & 1 & -8 \end{vmatrix} = (-1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 6 \\ -4 & -8 \end{vmatrix} =$

$= (-1-\lambda)\Big((3-\lambda)(-8-\lambda) + 24\Big) = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 = -5 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = 0 \end{matrix}} \Rightarrow \sigma(A) = 0 \Rightarrow \boxed{\text{neutralt stabil}}$

$\boxed{4.2}$

SVAR

$$\boxed{\tau_a = -\frac{1}{\sigma(A)}} \quad (\text{sida } 68)$$

a) A är instabil, lösningarna går ej mot noll.

SVAR

$\Rightarrow \boxed{\tau_a \text{ ej definierad}}$

c) $\tau_a = -\dfrac{1}{-2} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

SVAR

e) $\boxed{\tau_a \text{ ej definierad}}$

h) Alla lösningar går ej mot noll

SVAR

$\Rightarrow \boxed{\tau_a \text{ ej definierad}}$

$\boxed{4.3}$ $A = \begin{bmatrix} 4+k & 1 \\ 4+2k & 2 \end{bmatrix}$.

SVAR

a) $\det(A) = (4+k)2 - (4+2k) = \boxed{4}$

SVAR

$$\mathrm{adj}(A) = \boxed{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4-2k & -4-k \end{bmatrix}}$$

SVAR

b) $A \cdot \mathrm{adj}(A) = \det(A)\, I \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \mathrm{adj} A = \boxed{\dfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4-2k & -4-k \end{bmatrix}}$

$\boxed{4.4}$

a) Visa att systemet är stabilt

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -4x_1 - 6x_2 + f_1(t) \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + f_2(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{dx}{dt} = Ax + f(t)}$$

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det(A - \lambda I) = (-4-\lambda)(1-\lambda) + 6 = 0$$

SVAR

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = -1 \end{matrix}} \Rightarrow \sigma(A) = -1 < 0 \Rightarrow \boxed{\text{stabilt}}$$

b) Beräkna resolventmatrisen

$$R_A(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{1}{p_A(s)} \operatorname{adj}(sI - A) =$$

SVAR

$$= \boxed{\frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s-1 & -6 \\ 1 & s+4 \end{bmatrix}}$$

c) $\boxed{\text{Avgör om det finns en generaliserat stationär lösning om } f_1(t) = 3e^{st},\ f_2(t) = 2e^{st}.}$

$$f(t) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} e^{st}$$

Enligt sats 4.6

Om $f(t) = e^{st} \cdot \bar{f}$ och s ej är egenvärde till A

$$\Rightarrow X_{gstat}(t) = (sI - A)^{-1} \cdot \bar{f} e^{st} = R_A \bar{f} e^{st} =$$

$$= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s-1 & -6 \\ 1 & s+4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} e^{st} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} 3s-15 \\ 2s+14 \end{bmatrix} e^{st}}$$

$\boxed{4.5}$ $\boxed{\text{Ange den allmänna lösningen till:}}$

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t) \iff \begin{cases} \dot{x}_1 = -4x_1 - 6x_2 + 3\sin t \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + 2\sin t \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ f = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \sin t = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)$$

Resolventmatrisen $s = \pm i$

$$R_A(\pm i) = \frac{1}{(\pm i)^2 + 3(\pm i) + 2} \begin{bmatrix} \pm i - 1 & -6 \\ 1 & \pm i + 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_A(-i) = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 2-4i & -6-18i \\ 1+3i & 7+11i \end{bmatrix} \\ R_A(i) = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 2+4i & -6+18i \\ 1-3i & 7-11i \end{bmatrix} \end{cases}$$

4.4 c) ger:

$$X(t) = \frac{1}{(i+1)(i+2)}\begin{bmatrix} 3i & -15 \\ 2i & +11 \end{bmatrix} e^{it} = \frac{1-3i}{10}\begin{bmatrix} 3i-15 \\ 2i+11 \end{bmatrix}(\cos t + i\sin t)$$

Partikulärlösningen ges av imaginärdelen.

$$\Rightarrow X_p = \mathrm{Im}(X(t)) = \dots = \boxed{\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 48 \\ -31 \end{bmatrix}\cos t + \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -6 \\ 17 \end{bmatrix}\sin t}$$

Den homogena lösningen ges av:

$$X_H = c_1 e^{-2t} S_1 + c_2 e^{-t} S_2 = \boxed{c_1 e^{-2t}\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

4.14

$$\boxed{p_A(\lambda) = \lambda(\lambda+1)^2(\lambda+2)(\lambda^2+4)(\lambda^2+9)}$$

a) Säkert falskt, A har >5 egenvärden

b) Säkert falskt A har flera lika λ.

c) $\mathrm{tr}\, A = \sum_i \lambda_i = 0-1-1-2+2i-2i+3i-3i = -4$

$\Rightarrow$ Säkert sant

d) $\det A = \prod_i \lambda_i = 0 \quad (\lambda_1 = 0) \Rightarrow$ Säkert falskt

e) Kan ej avgöras

f) säkert sant, $\sigma(A) = 0$

g) Säkert falskt, $\sigma(A) = 0$

h)

i)

j) Säkert sant, $\dot{X} + Ax$ har ju en entydig lösning.