KAPITEL 4

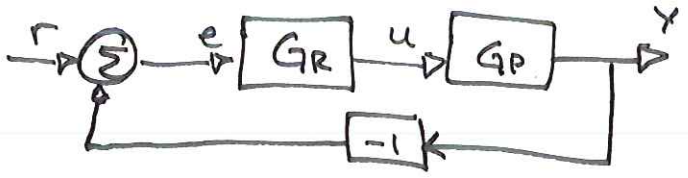
4.1 $\boxed{\dot{y} + 0.01y = 0.01u}$

a) $\boxed{\text{Bestäm } G_R(s)}$

Laplace ger:

$$sY + 0.01Y = 0.01U \Leftrightarrow Y = \underbrace{\boxed{\frac{0.01}{s+0.01}}}_{G_R(s)} U$$

b)



$\boxed{G_P = K}$

$$Y = (r - y)G_R G_P \Leftrightarrow Y = \underbrace{\boxed{\frac{G_R G_P}{1 + G_R G_P}}}_{G(s)} r$$

$$G(s) = \frac{G_P G_R}{1 + G_P G_R} = \frac{\frac{0.01}{s+0.01}K}{1 + \frac{0.01}{s+0.01}K} = \boxed{\frac{0.01K}{s + 0.01 + 0.01K}}$$

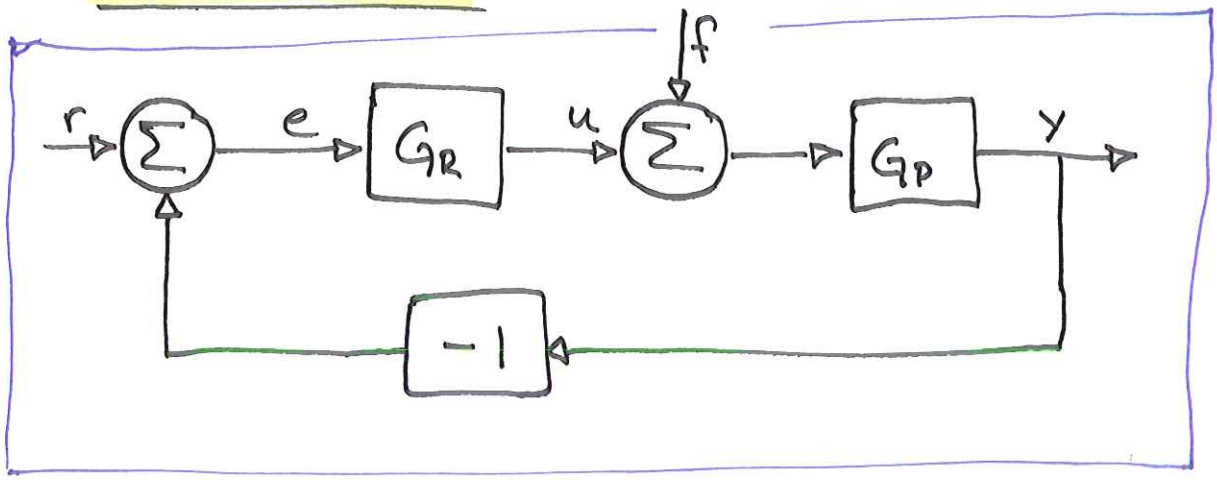
c) $\boxed{\text{Välj } k \text{ så att det slutna systemet får kar. pol: } s+0.1}$

$$0.1 = 0.01 + 0.01K \Leftrightarrow \boxed{K = 9}$$

Nämnaren ska vara lika med $s+0.1$.

4.2

Blockschema:



$$G_P(s) = \frac{1}{ms^2 + ds} \quad , r(t) = 0 \quad \text{(antas)}$$

a) Hur stor blir $e(t) = r(t) - y(t) = -y(t)$ då $f(t) = \theta(t)$?

$$G_R(s) = K$$

$$F(s) = \frac{1}{s}$$

Från blockschemat:

$$Y = ((R - Y)G_R + F)G_P = (F - YG_R)G_P$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{G_P}{1 + G_R G_P} \cdot F$$

Vi söker $y(\infty)$ och använder

Slutvärdesteoremet:

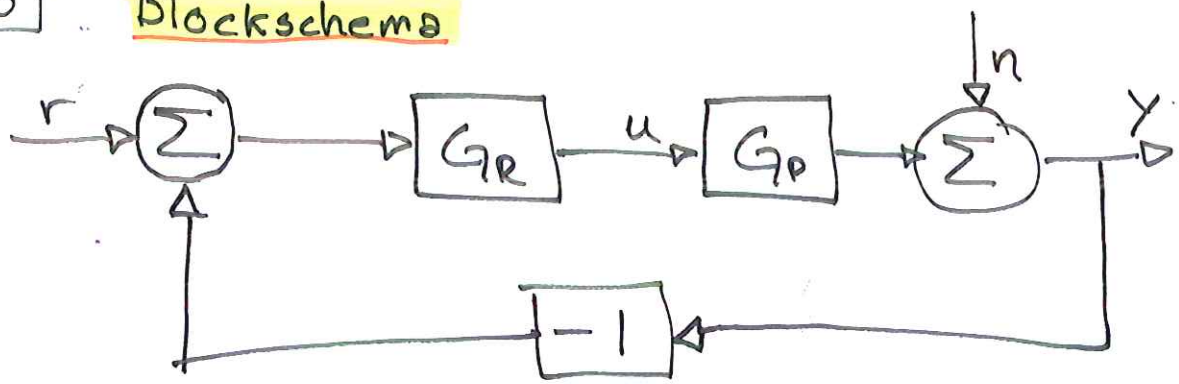
$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot Y(s)$$

$$\Rightarrow y(\infty) = \lim_{s \to 0} s \frac{1}{ms^2 + ds + K} \cdot \frac{1}{s} = \boxed{\frac{1}{K}}$$

b) Vad blir $y(\infty)$ om $G_R = K_1 + \frac{K_2}{s}$?

$$Y(\infty) = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{1}{ms^2 + ds + K_1 + \frac{K_2}{s}} \cdot \frac{1}{s} = \boxed{0}$$

4.3 Blockschema



a) Beräkna överföringsfunktionen $n \to y$ och $n \to u$

$n \to y$

$$Y = N + (R - Y) G_R G_P \qquad (\text{slutet system} \Rightarrow R = 0)$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \boxed{\frac{1}{1 + K G_P(s)}} N(s) \qquad (G_R = K)$$

$n \to u$

$$U(s) = K(0 - Y) = \boxed{\frac{-K}{1 + K G_P(s)}} N(s)$$

b) Låt $G_p(s) = \frac{1}{s+1}$ och $n(t) = A\sin(\omega t)$

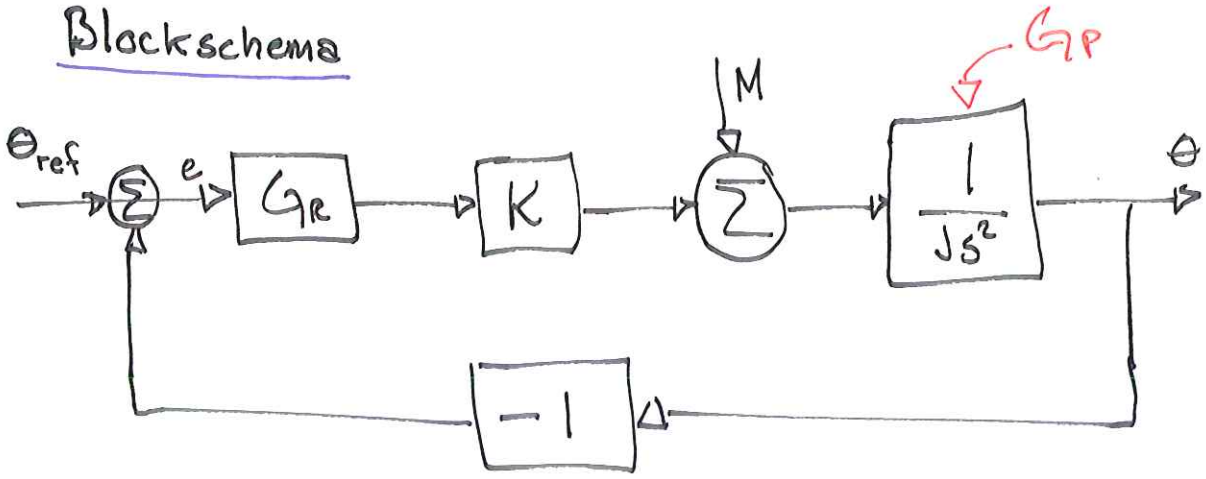
Vad blir u och y efter att transienterna avklingat?

Insättning ger:

$$U(s) = \frac{-K(s+1)}{s+1+K} N(s) \quad , \quad Y(s) = \overbrace{\frac{s+1}{s+1+K}}^{G_{yn}} N(s)$$

$\boxed{4.4}$

Blockschema



$\boxed{\text{Ange formen på överföringsfunktionen } G_R}$

Ansats $\boxed{G_R = \frac{Q}{P}}$ $\left(G_P = \frac{1}{Js^2}\right)$

Från figuren ser vi att:

$E = \theta_{ref} - \theta =$

$= \theta_{ref} - G_P(K \cdot G_R E + M)$

sätt in!

$$\Leftrightarrow E = \frac{1}{1+K G_P G_R}\theta_{ref} - \frac{G_P}{1+K G_P G_R} M =$$

$$= \begin{bmatrix} M = \frac{M_0}{s} \\ \theta_{ref} = \frac{\theta^\circ_{ref}}{s} \end{bmatrix} = \frac{s^2 J P}{s^2 J P + KQ} \cdot \frac{\theta^\circ_{ref}}{s} - \frac{P}{s^2 J P + KQ} \cdot \frac{M_0}{s}$$

Stationära felet ska vara noll.

$$e_\infty = \lim_{s \to 0} s \cdot E = 0 - \frac{P(0)}{KQ(0)} M_0 \Rightarrow P(0) = 0$$

. $P(0) = 0 \Rightarrow$ pol i $s=0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{Integrator!}}$

$\boxed{4.5}$

Temperaturen växer med 1°C / s

$$G(s) = \frac{1}{1+sT} \quad , T = 10$$

Vid en tidpunkt mättes temperaturen till 102.6°C, vad var badets verkliga temperatur?

Badets temp $u(t) = t \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s^2}$

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{1}{1+sT} \cdot \frac{1}{s^2}$$

Vi undersöker felet $e(t) = u(t) - y(t)$

$$E(s) = U(s) - Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{1+sT} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{sT}{1+sT} \cdot \frac{1}{s^2}$$

Slutvärdesteoremet

$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s^2 T}{1+sT} \cdot \frac{1}{s^2} = T = 10$$

$\Rightarrow$ Temperaturen $= 102.6 + 10 = \boxed{112.6\,°C}$

$\boxed{4.6}$ Vilka insignaler kan systemet följa utan stationärt fel.

Först beräknar vi $G_0(s)$

LF-asymptot: -2 i lutning $\Rightarrow G_{LF} = \frac{K}{s^2}$

Vi ser i figuren att $|G_{LF}(i \cdot 1)| = 1$

$$|G_{LF}(i\omega)| = \frac{K}{\omega^2} \overset{\omega=1 \Rightarrow |G|=1}{\Rightarrow} \boxed{K=1}$$

Vi har två brytfrekvenser:

$\omega_1 = 1$: -2 till $0 \Rightarrow (1+sT_1)^2$

$\omega_2 = 5$: 0 till $-1 \Rightarrow \frac{1}{(1+sT_2)}$

$$\Rightarrow G = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{(T_1 s + 1)^2}{1+sT_2}, \quad T_1 = \frac{1}{\omega_1} = 1, \quad T_2 = \frac{1}{\omega_2} = 0.2$$

Det slutna systemet:

$$G = \frac{G_0}{1+G_0} \text{ och } Y = G \cdot R$$

Felet $\boxed{E = R - Y = \ldots = \frac{s^2(1+0.2s)}{s^2(1+0.2s)+(1+s)^2} R}$

Nu använder vi slutvärdesteoremet för att se om felet går mot noll då $t \to \infty$.

a) $\boxed{r = a \Rightarrow R = \frac{a}{s}}$

$$\Rightarrow e_\infty = \lim_{s \to 0} s \cdot E(s) = 0 \quad , \quad \boxed{\text{Ja}}$$

b) $\boxed{r = bt \Rightarrow R = \frac{b}{s^2}}$

$$e_\infty = \lim_{s \to 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{s^2(1+0.2s)}{s^2(1+0.2s)+(1+s)^2} \cdot \frac{b}{s^2} = 0 \quad , \quad \boxed{\text{Ja}}$$

c) $\boxed{r = ct^2 \Rightarrow R = \frac{2c}{s^3}}$

$$e_\infty = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{s^2(1+0.2s)}{s^2(1+0.2s)+(1+s)^2} \cdot \frac{2c}{s^3} = 2c \neq 0 \quad , \quad \boxed{\text{Nej}}$$

d) $\boxed{r = a + bt \Rightarrow R = \underbrace{\frac{a}{s}}_{\text{som i a)}} + \underbrace{\frac{b}{s^2}}_{\text{som i b)}}}$

Linjärt: $e_\infty = 0 + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{\text{Ja}}$

e) $\boxed{r = \sin t \Rightarrow R = \frac{1}{1+s^2}}$

$$e_\infty = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{s^2(1+0.2s)}{s^2(1+0.2s)+(1+s)^2} \cdot \frac{1}{1+s^2} = 0$$

Men eftersom insignalen svänger så gör också utsignalen det $\Rightarrow$ slutvärdesteoremet kan inte användas.

$\boxed{\text{Nej}}$

$\boxed{4.7}$

$$G_P(s) = \frac{1}{(s+1)^3} \quad , \quad G_R(s) = 6.5$$

a) Bestäm känslighetsfunktionen $S(s)$

$$S(s) = \frac{1}{1+G_P \cdot G_R} = \frac{1}{1+\frac{6.5}{(s+1)^3}} = \boxed{\frac{s^3+3s^2+3s+1}{s^3+3s^2+3s+7.5}}$$

b) Hur mycket dämpas konstanta laststörningar av reglerkretsen (sluten loop jmf. m. öppen loop)?
Vid vilken vinkelfrekvens är reglerkretsen känsligast för störningar?
Hur mycket förstärks störningarna som mest?

$$\omega = 0 \Rightarrow S(i\omega) = \frac{1}{7.5}$$

Konstanta störningar dämpas med faktor 7.5

Från figuren ser vi att största värdet på

$|S(i\omega)| \approx 10^1$ vid $\omega \approx 1.6$ rad/s

4.9 I en enkel reglerkrets är

$$G_0(s) = G_R(s)\,G_P(s) = \frac{K}{s(s+2)}$$

Rotorten är rötterna till den karakteristiska ekvationen då K varierar!

Rita rotorten för det återkopplade systemets karakteristiska ekvation m.a.p. K.

Läs mer om rotortmetoden på s. 47!

Det slutna systemets karateristiska ekvation ges av:

$$\boxed{s(s+2) + K = 0}$$

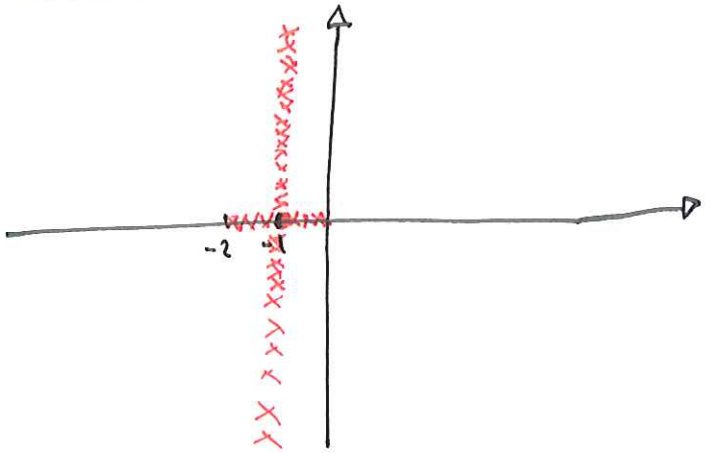
$$\Leftrightarrow s = -1 \pm \sqrt{1-K}$$

Vår uppgift är nu att undersöka vad som händer då K varierar på intervallet $[0, \infty]$.

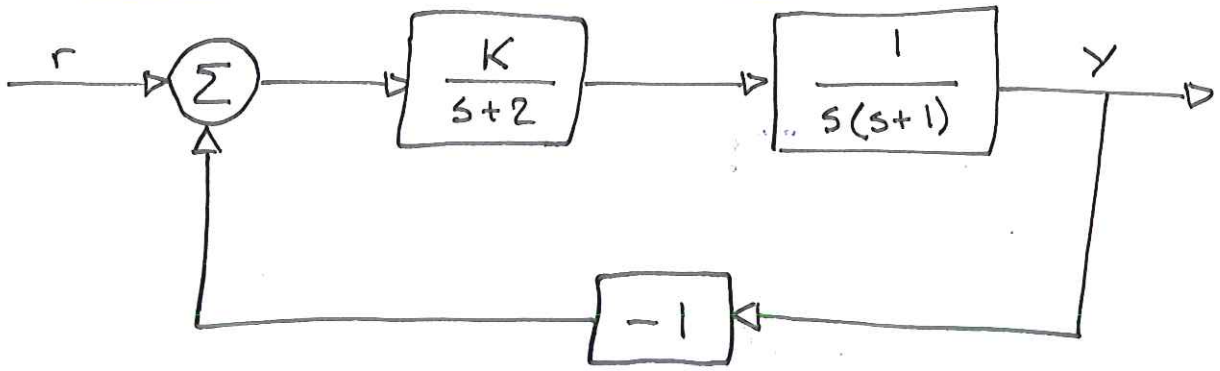
$K = 0 \Rightarrow \boxed{s_{1,2} = 0, -2}$

$K = 1 \Rightarrow \boxed{s_1 = s_2 = -1}$

$K \to \infty \Rightarrow \boxed{s_{1,2} = -1 \pm \infty i}$



4.11 Blockschema för en skrivare



a) För vilka K är systemet asymptotiskt stabilt?

$$Y = (r - Y)\frac{K}{s+2} \cdot \frac{1}{s(s+1)}$$

$$\Leftrightarrow Y = \underbrace{\boxed{\frac{K}{s(s+1)(s+2)}}}_{G_0(s)} r$$

Kar. ekv: $s(s+1)(s+2) + K = 0$

$$\Leftrightarrow s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

Systemet är asymptotiskt stabilt om samtliga nollställen har negativ realdel.

Alla koefficienter $> 0 \Rightarrow K > 0$

enl. s.46 $a_1 \cdot a_2 > a_3 \Rightarrow 3 \cdot 2 > K \Rightarrow K < 6$

$$\Rightarrow \boxed{0 < K < 6}$$

b)

$$Y = (R - Y)\underbrace{\frac{K}{s+2}}_{G_P} \cdot \underbrace{\frac{1}{s(s+1)}}_{G_R}.$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{Y = \frac{G_P G_R}{1 + G_P G_R} \cdot R}$$

Insignalen är en rampändring

$$r = 0.1\, t\, \theta(t) \quad \Rightarrow R = \frac{0.1}{s^2}$$

$$E = R - Y = R - \frac{G_P G_R}{1 + G_P G_R} R = \frac{0.1}{s^2}\left(1 - \frac{\frac{K}{s+2} \cdot \frac{1}{s(s+1)}}{1 + \frac{K}{s+2} \cdot \frac{1}{s(s+1)}}\right) =$$

$$= \frac{0.1}{s^2}\left(1 - \frac{K}{(s+2)(s+1)s + K}\right)$$

$$e_\infty = \lim_{s \to 0} s \frac{0.1}{s^2}\left(1 - \frac{K}{(s+2)(s+1)s + K}\right) = \ldots =$$

$$= \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{0.1(s+1)(s+2)}{s(s(s+1)(s+2) + K)} = \frac{0.2}{K} < 0.005$$

$$\Rightarrow \boxed{K > \frac{0.2}{0.005} = 40}$$

4.12 Betrakta Nyquistkurvorna i fig. 4.1.

$$u = K(r-y) \iff K = \frac{u}{r-y}$$

För vilka K är systemet stabilt?

a) $\frac{1}{0.5} = \boxed{2}$, b) $\frac{1}{1.5} = \boxed{2/3}$

c) $\frac{1}{1.5} = \boxed{2/3}$ d) $\frac{1}{0.67} = \boxed{1.5}$

4.13

$$G_p(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$

$$u = K(r-y)$$

Undersök stabiliteten hos det slutna systemet.

Vi vet att Nyquistkurvan skär negtiva axeln då

$$\arg(G_p(i\omega)) = -\pi$$

$$\iff \arg\left(\frac{1}{(i\omega+1)^3}\right) = -\pi$$

$$\iff \arg(1) - \arg(i\omega+1)^3 = -\pi$$

$$\iff 0 - 3\arctan(\omega) = -\pi \implies \omega = \sqrt{3}$$

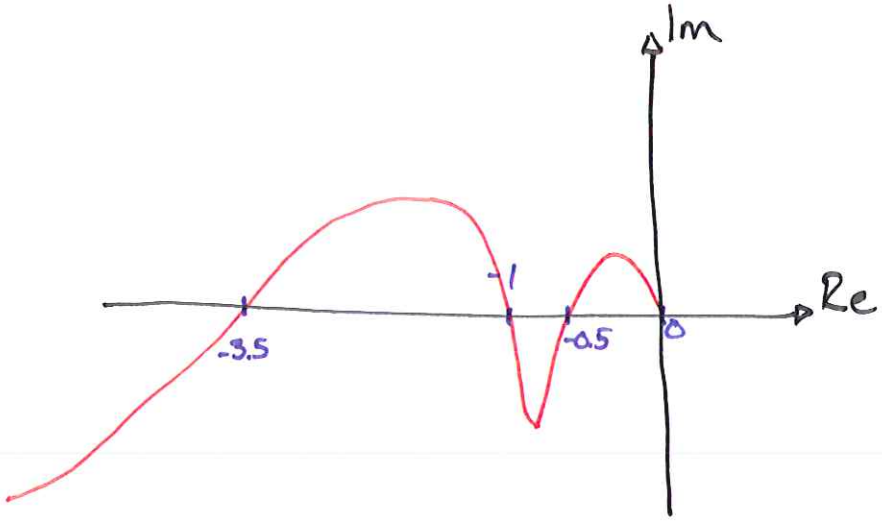
$$|G_p(i\sqrt{3})| = \frac{1}{8} \implies \boxed{K < 8}$$

4.14

Systemet i fig. 4.2 återkopplas proportionellt med styrlagen:

$$u = K(r - y)$$

För vilka K är systemet stabilt?



Avläsning i figuren ger:

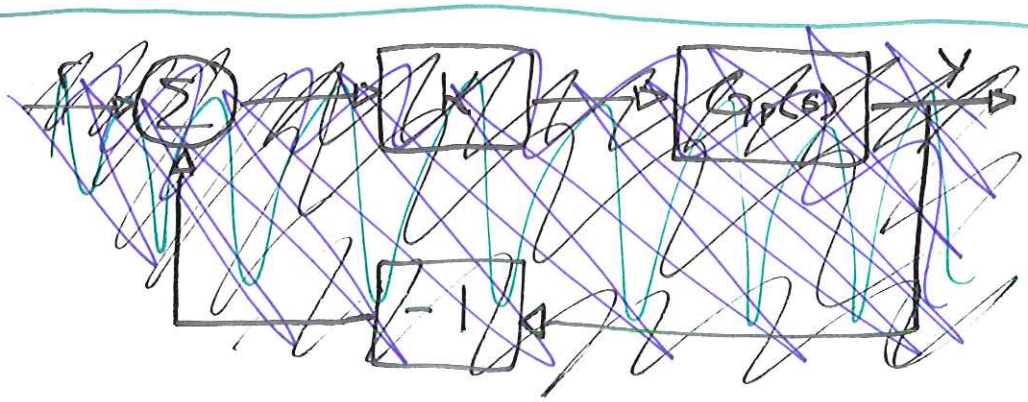
$0 < K < \frac{1}{3.5} = 0.29$

samt

$1 < K < \frac{1}{0.5} = 2$

Nyquistkriteriet.

4.15 Hur stort får K vara om systemet ska vara stabilt?



$$\boxed{G_P(s) = \frac{e^{-9s}}{(1+20s)^2}}$$

Vi använder Nyquistkriteriet

$$\arg\left(G_P(i\omega)\right) = -\pi$$

$$\Leftrightarrow -9\omega - 2\arctan(20\omega) = -\pi$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\omega_0 \approx 0.1}$$

$$\left|G_P(i\omega_0)\right| = \frac{1}{1+400\omega_0^2} = 0.2$$

svar

$$\Rightarrow A_m = \frac{1}{0.2} = 5 \quad \Rightarrow \boxed{K = 5}$$

4.16

$$G_P(s) = \frac{e^{-sL}}{1+10s} \quad , \quad G_R(s) = 10\left(1 + \frac{1}{2s}\right)$$

Hur stor får L högst vara för att systemet ska ha minst 10° fasmarginal?

$$\phi_m = 180^\circ + \arg(G_0(i\omega_c)) \quad , \quad$$

$$G_0 = G_P \cdot G_R = e^{-sL} \cdot \frac{10\left(1+\frac{1}{2s}\right)}{1+10s} = e^{-sL} \cdot \frac{5(1+2s)}{s(1+10s)}$$

För att få ω_c löser vi ekvationen:

$$|G_0(i\omega_c)| = \frac{5\sqrt{1+4\omega_c^2}}{\omega_c\sqrt{1+100\omega_c^2}} = 1 \Rightarrow \omega_c \approx 1.1 \text{ rad/min}$$

$$\arg(G_0(i\omega_c)) = \arctan 2\omega_c - \arctan 10\omega_c - 90 - \omega_c L$$

$$\Rightarrow \phi_m = 180^\circ + \arctan 2\omega_c - \arctan 10\omega_c - 90 - \omega_c L$$

$$\Leftrightarrow \phi_m \approx 70^\circ - \omega_c L \geq 10^\circ \Rightarrow L \leq \frac{60}{\omega_c} \cdot \frac{\pi}{180} = 1 \text{ min}$$

$\boxed{4.17}$ (se systemet i fig 4.4 och Nyquist i fig 4.5)

- $\arg(G_p(i\omega))$ är avtagande
- $G_p(s)$ har fler poler än nollställen.
- Systemet är stabilt för $K=1$

Vilka av följande alternativ är korrekta?

a) $A_m < 2$ om $K=1$

$$A_m = \frac{1}{|K \cdot G_p(i\omega_0)|} \approx \frac{1}{1 \cdot 0.8} < 2 \Rightarrow \boxed{\text{Rätt}}$$

b) $\phi_m < 45^\circ$ om $K=1$

$$\phi_m = \pi + \arg(G_p(i\omega)) < 45^\circ$$

$\Rightarrow$ Rätt

c) Om K sänks, minskar felmarginalen.

Fel. Om K minskar så kommer varje punkt på Nyquistkurvan flyttas närmare origo $\Rightarrow$ felmarginalen ökar.

d) $K=2 \Rightarrow$ Instabilt system

Rätt. Nyquist: för $K=2$ ligger -1 till höger om kurvan!

4.18 Undersök Bodediagrammet i fig 4.6.

a) Hur mycket kan förstärkningen öka utan att processen blir instabil?

Då fasen är $-180°$ är förstärkningen ≈ 0.4.

$$\Rightarrow A_m = \frac{1}{0.4} = \boxed{2.5}$$

b) Hur mycket ytterligare negativ fasförskjutning kan introduceras utan att det slutna systemet blir instabilt?

Fasf. = 1 $\Rightarrow$ fas = $-140°$

$$\Rightarrow \text{Fasmarginal} = -180 - (-140°) = \boxed{40°}$$

4.19 Vad är dödtidsmarginalen?

$$L_m = \frac{\phi_m}{\omega_c} = \frac{40^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}}{0.07} = \boxed{10}$$