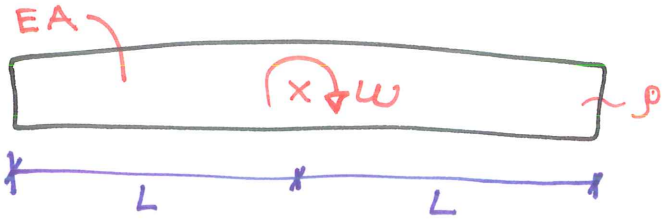
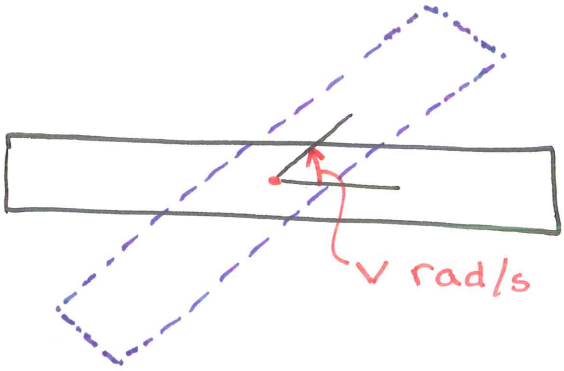
KAPITEL 4

4.2 Beräkna stångens längdökning pga centrifugalbelastningen,



Densitet $= \rho$



(FS 21:) $\frac{d}{dx}\left(EA\frac{du}{dx}\right) + \overbrace{A\rho v^2 x}^{X} = 0$

$$\Leftrightarrow \quad E\cancel{A}\frac{du}{dx} + \cancel{A}\rho v^2 \frac{x^2}{2} = C$$

$$\Leftrightarrow \quad u + \frac{\rho v^2 x^3}{6E} = C_1 x + C_2$$

Vi vet at $u(0) = 0$, $u'(L) = 0$

$$\Rightarrow 0 + 0 = 0 + C_2 \quad \Rightarrow C_2 = 0$$

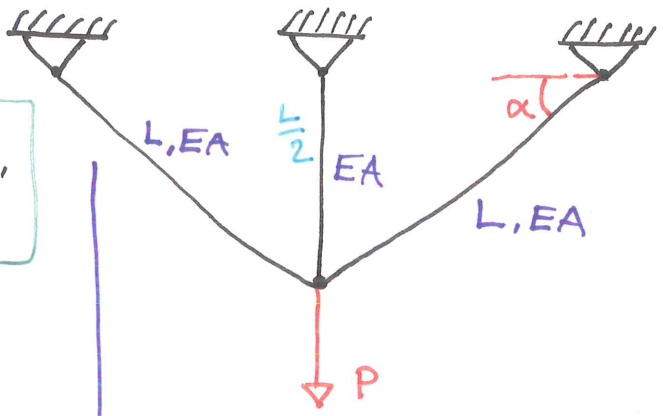
$$u' = -\frac{\rho v^2 x^2}{2E} + C_1 \quad \Rightarrow C_1 = \frac{\rho v^2 L^2}{2E}$$

$$\Rightarrow u = -\frac{\rho v^2 x^3}{6E} + \frac{\rho v^2 x L^2}{2E} = \frac{\rho v^2 x}{2E}\left(-\frac{x^2}{3} + L^2\right).$$

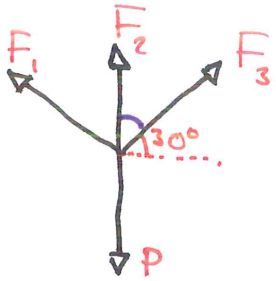
Stångens förlängning vid $u(L) = \frac{\rho v^2 L^3}{3E}$

$\boxed{4.3}$

Bestäm stångkrafterna, speciellt då $\alpha = 30°$



Friläggning



Jämvikt:

$\uparrow \; F_1 \sin 30° + F_2 + F_3 \sin 30° = P$

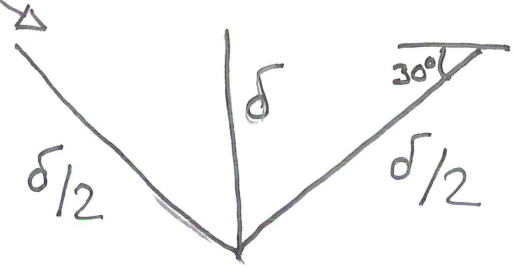
$\rightarrow \; F_1 \cos 30° = F_3 \cos 30° \Leftrightarrow \boxed{F_1 = F_3}$

$\Rightarrow \sin 30° (F_1 + F_3) + F_2 = P$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} F_1 \cdot 2 + F_2 = P$

$\frac{FL}{EA} = \delta \Leftrightarrow \boxed{F = \delta \cdot \frac{EA}{L}}$

Från figuren till höger:



Mittenstången töjs dubbelt så mycket som sidostängerna!

$F_1 = F_3 = \frac{\delta}{2} \cdot \frac{EA}{L}$

$F_2 = \delta \frac{EA}{L/2} = 2\delta \frac{EA}{L}$

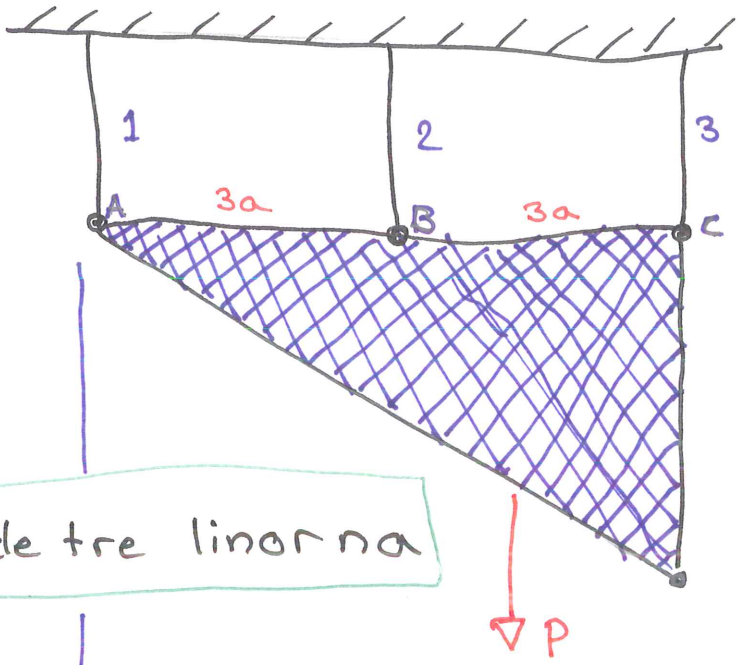
$\Rightarrow F_1 + F_2 = \frac{5}{2} \delta \frac{EA}{L} = P$

$\Leftrightarrow \boxed{\delta = \frac{2}{5} \frac{PL}{EA}}$

$$\Rightarrow \boxed{F_1 = F_3 = \frac{P}{5}, \quad F_3 = \frac{4}{5} P}$$

4.6

En plåttriangel med tyngden P hålls uppe av tre likadana linor av ett linjärt elastiskt material.



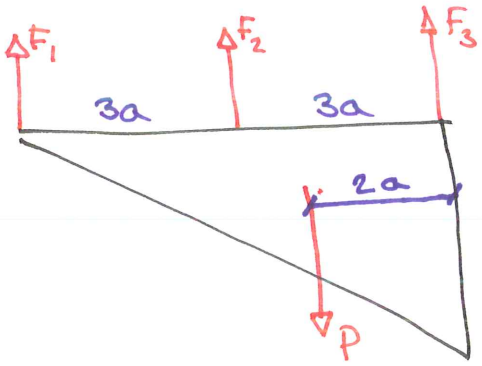
Bestäm krafterna i de tre linorna

Förlängningen av linorna blir:

1:	$\delta - \Delta$
2:	δ
3:	$\delta + \Delta$

(Eftersom triangeln kommer rotera kring mitten)

Friläggning



Vi vet sedan statiken att p är 2a från höger kant.

Kraftekvationen

$$P = F_1 + F_2 + F_3$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{(\delta - \Delta)EA}{L} + \frac{\delta EA}{L} + \frac{(\delta - \Delta)EA}{L}$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{3\delta EA}{L} \Leftrightarrow \boxed{\delta = \frac{PL}{3EA}}$$

Formel

$$F = \frac{\delta EA}{L}$$

Nu har vi δ!

Det som återstår är att beräkna Δ.

Momentekvationen

$$\curvearrowleft M_c = 2\cancel{a}P - 3\cancel{a}F_2 - 6\cancel{a}F_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow P - \frac{3}{2}F_2 - 3F_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow P - \frac{3}{2}\frac{\delta EA}{L} - 3\frac{(\delta - \Delta)\cdot EA}{L} = 0$$

$$\Leftrightarrow P - \frac{9}{2}\frac{\delta \cdot EA}{L} + \frac{3\Delta EA}{L} = 0$$

$$\Leftrightarrow \Delta = \left(\frac{9}{2}\frac{\delta EA}{L} - P\right)\frac{L}{3EA}$$

Insättning av δ (*)

$$\Delta = \left(\frac{9}{2}\cdot\frac{P\cancel{L}\,\cancel{EA}}{3\cancel{EA}\cancel{L}} - P\right)\frac{L}{3EA} =$$

$$= \left(\frac{3}{2}P - P\right)\frac{L}{3EA} = \boxed{\frac{PL}{6EA}}$$

SVAR

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} F_1 &= \frac{(\delta - \Delta)EA}{L} = \frac{1}{2}P \\ F_2 &= \frac{\delta EA}{L} = \frac{1}{3}P \\ F_3 &= P - F_1 - F_2 = \frac{1}{6}P \end{aligned}}$$

4.9 Genom mätningar på en konstruktion har man i en punkt på en obelastad yta funnit; att töjningarna i ytans plan i två vinkelräta riktningar är

$$\boxed{\begin{cases} \varepsilon_x = 10^{-4} \\ \varepsilon_y = 2 \cdot 10^{-4} \end{cases}}$$

I punkten gäller även

$$\boxed{\tau_{max} = 115 \ N/mm^2}$$

samt att en huvudspänning är positiv och en är negativ.

$$\boxed{\begin{array}{l} E = 2{,}1 \cdot 10^5 \ N/mm^2 \\ \nu = 0{,}3 \end{array}}$$

Beräkna huvudspänningens storlek.

(15) $$\sigma_x + \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) + \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\varepsilon_x + \varepsilon_y) =$$

$$= \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)\right) = \frac{E(1+\nu)}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) =$$

$$= \frac{E}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

(8) $$\sigma_{max} = \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R \ , \ R = \tau_{max} \Rightarrow \sigma_{1,2} = \frac{E}{1-\nu}\frac{(\varepsilon_x + \varepsilon_y)}{2} \pm \tau_{max}$$

$$= \boxed{45 \pm 115 \ N/mm^2 \ , \ \sigma_3 = 0 \ (\text{plant})}$$