

KAPITEL 3

3.1 Bestäm egenvärden & egenvektorer till: $(A\bar{z} = \lambda \bar{z})$

a) Vridning med π kring origo.

Alla vektorer i planet utom nollvektorn är egenvektorer eftersom de får rak motstående riktning efter vridningen.

Egenvärdet är därför -1 .

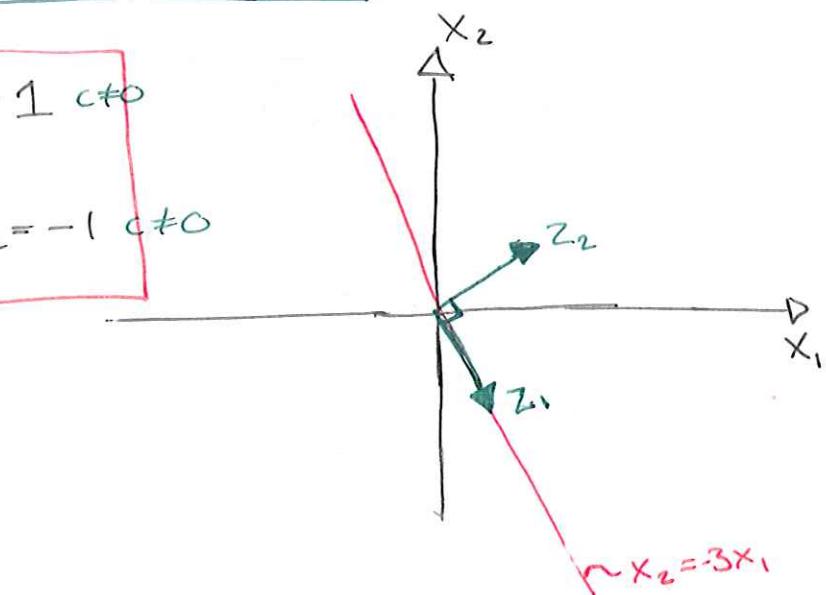
b) Vridning med $+\frac{\pi}{2}$ kring origo

Eftersom inga reella vektorer i planet uppfyller att de antingen pekar åt samma eller motstående håll efter vridningen så saknas egenvektorer och egenvärden.

c) Spegling i linjen $3x_1 + x_2 = 0$

$$z_1 = (1, -3)c \Rightarrow \lambda_1 = 1 \neq 0$$

$$z_2 = (3, 1)c_2 \Rightarrow \lambda_2 = -1 \neq 0$$

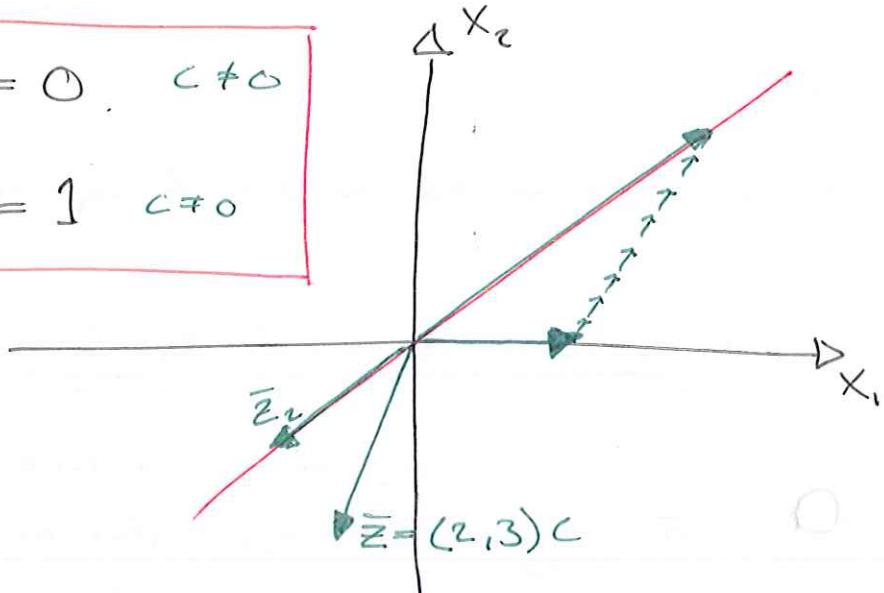


d) Projektion längs riktningen $(2,3)$ på $x_1 - x_2 = 0$

SVAR

$$\bar{z}_1 = c(2,3) \Rightarrow \lambda_1 = 0 \quad c \neq 0$$

$$\bar{z}_2 = c(1,1) \Rightarrow \lambda_2 = 1 \quad c \neq 0$$



3.2

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad A\bar{z} = \lambda\bar{z} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\bar{z} = 0$

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) - 4 \cdot 2 =$$

$$= 3 - 3\lambda + \lambda^2 - 8 = \boxed{\lambda^2 - 4\lambda - 5} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 2 \pm \sqrt{4+5} \Leftrightarrow \boxed{\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1}$$

b) $P(\lambda) = (-1-\lambda)(-1-\lambda) - (-2)(-2) = 1 + \lambda^2 + 2\lambda - 4 =$

$$= \boxed{\lambda^2 + 2\lambda - 3} = 0 \quad \Leftrightarrow \lambda = -1 \pm \sqrt{1+3} \Leftrightarrow \boxed{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3}$$

$$c) A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda) = (-2-\lambda)(-2-\lambda) - 1(-1) = 4 + \lambda^2 + 4\lambda + 1 =$$

$$= \boxed{\lambda^2 + 4\lambda + 5} = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2 \pm \sqrt{4-5}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\lambda_1 = -2+i, \lambda_2 = -2-i}$$

$$f) A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda) = (5-\lambda)(1-\lambda) - 4(-1) = 5 - 5\lambda - \lambda + \lambda^2 + 4 =$$

$$= \boxed{\lambda^2 - 6\lambda + 9} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3 \pm \sqrt{9-9} = 3$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = 3}$$

3.5 Bestäm egenvektorer till 3.2 a, c, f

$$a) \underline{\lambda_1 = 5}$$

$$(A - \lambda_1 I) z = \begin{bmatrix} 1-5 & 2 \\ 4 & 3-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1(1-5) + z_2 \cdot 2 = 0 \\ z_1 \cdot 4 + z_2(3-5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2z_1 + z_2 = 0 \\ 2z_1 - 2z_2 = 0 \end{cases}$$

$$z_1 = 1 \Rightarrow z_2 = 2 \Rightarrow z = c(1, 2), c \neq 0$$

$$\lambda = -1$$

$$(A - \lambda I)z = \begin{bmatrix} 1+1 & 2 \\ 4 & 3+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2z_1 + 2z_2 \\ 4z_1 + 4z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

SVAR

$$\Rightarrow z = c(1, 1), c \neq 0$$

$$c) \quad \lambda = -2+i$$

$$(A - \lambda I)z = \begin{bmatrix} -2 - (-2+i) & -1 \\ 1 & -2 - (-2+i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z_1 i - z_2 \\ z_1 - z_2 i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

SVAR

$$\Rightarrow z = c(1, -i), c \neq 0$$

$$\lambda = -2-i$$

$$\Rightarrow (A - \lambda I)z = \begin{bmatrix} 1 - (-1) & 2 \\ 1 & 1 - i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 + 2z_2 \\ z_1 + iz_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

SVAR

$$\Rightarrow z = c(1, i), c \neq 0$$

$$f) (\lambda - \lambda I) z = \begin{bmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 4 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} z_1(5-\lambda) - z_2 \\ z_1 \cdot 4 + (1-\lambda)z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 3 \Rightarrow z_1 \cdot 2 - z_2 = 0 \Rightarrow z = c(1, 2), c \neq 0$

3.3 Bestäm egenvärdena till:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 8 & 7 \\ 0 & 2 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - I\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 9 & 8 & 7 \\ 0 & 2-\lambda & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda) = 0$$

\Rightarrow SVAR: Egenvärdena är: 1, 2, 3, 4

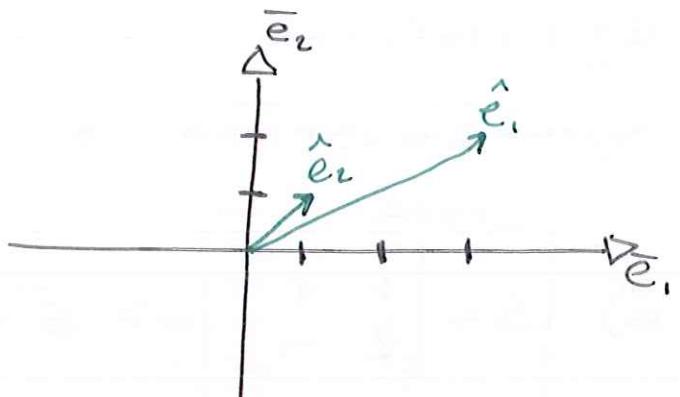
3.10

- a) Vad innebär det att \bar{x} har koordinaterna (x_1, x_2) respektive (\hat{x}_1, \hat{x}_2) i de olika systemen?

SVAR

$$\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2$$

$$\bar{x} = \hat{x}_1 \hat{e}_1 + \hat{x}_2 \hat{e}_2$$



$$\begin{cases} \hat{e}_1 = 3\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 \\ \hat{e}_2 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 \end{cases}$$

SVAR

$$\hat{e}_1: (1, 0) \text{ eller } (3, 2)$$

$$\hat{e}_2: (0, 1) \text{ eller } (1, 1)$$

$$c) \bar{x} = [x_1 \ x_2]^T = (x_1, x_2)$$

$$\hat{x} = [\hat{x}_1 \ \hat{x}_2]^T$$

Ange förhållandet
på formen:

$$\bar{x} = S \hat{x}$$

SVAR

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}$$

(Jmf. med b))

$$d) \bar{y} = A\bar{x} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$S\hat{A} = AS \Leftrightarrow \hat{A} = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -13 & 3 \end{bmatrix}$$

SVAR

3.11

Till vilka matriser i 3.2 kan man finna en matris S , sådan att $\hat{A} = S^{-1}AS$ är diagonal?

Om vi har två linjärt oberoende egenvektorer s_1 och s_2 så kan systemmatrisen S skrivas $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ s_1 & s_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

SVAR

a) $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow S^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \hat{A} = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

SVAR

Förkortat: $\hat{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

c) SVAR

$$S = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & i \end{bmatrix} \Rightarrow S^{-1} = \begin{bmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{A} = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+i & 0 \\ 0 & -2-i \end{bmatrix}$$

f) SVAR
 S finns ej eftersom vi inte har två linj. oberoende egenvektorer! A är alltså INTE diagonaliseringbar.

3.12 Diagonalisera (om möjligt) matriserna

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -2 \\ 2 & -\lambda & -2 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda)(1-\lambda) + 4 - 8 + \\ + 4\lambda + 4(1-\lambda) - 2(1-\lambda) =$$

$$= -(1-\lambda)^2 \lambda - 2(1-\lambda) = (1-\lambda)(-(1-\lambda)\lambda - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1, -\lambda + \lambda^2 - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$$

$$(A - \lambda I)z = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & -2 \\ 2 & -\lambda & -2 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} z_1(1-\lambda) + z_2 - 2z_3 \\ 2z_1 - 2z_2 - 2z_3 \\ -2z_1 + 2z_2 + (1-\lambda)z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_2 - 2z_3 = 0 \\ 2z_1 - z_2 - 2z_3 = 0 \\ -2z_1 + 2z_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow z = c(2, 2, 1), c \neq 0$$

$$\lambda = -1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2z_1 + z_2 - 2z_3 = 0 \\ 2z_1 + z_2 - 2z_3 = 0 \\ -2z_1 + 2z_2 + 2z_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow z_2 = 0, z_1 = z_2$$

$$\Rightarrow z = c(1, 0, 1), c \neq 0$$

$$\lambda = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -z_1 + z_2 - 2z_3 = 0 \\ 2z_1 - 2z_2 - 2z_3 = 0 \Rightarrow z_3 = 0, z_1 = z_2 \\ -2z_1 + 2z_2 - z_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = c(1, 1, 0) , c \neq 0$$

S^{NAR}

$$\Rightarrow S = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

S^{NAR}

$$S^{-1} A S = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$d) \quad A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -4 \\ 2 & 9 & 2 \\ -4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (6-\lambda)(9-\lambda)(6-\lambda) - 16 - 16(9-\lambda) - 4(6-\lambda) - 4(6-\lambda) =$$

$$= (6-\lambda)(9-\lambda)(6-\lambda) - 32 - 144 + 16\lambda - 48 + 8\lambda =$$

$$= (6-\lambda)(9-\lambda)(6-\lambda) - 224 + 24\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 10, \lambda_3 = 10$$

$$(A - \lambda I) z = \begin{bmatrix} 6-\lambda & 2 & -4 \\ 2 & 9-\lambda & 2 \\ -4 & 2 & 6-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\lambda_1 = 1}$$

$$\begin{cases} 5z_1 + 2z_2 - 4z_3 = 0 \\ 2z_1 + 8z_2 + 2z_3 = 0 \\ -4z_1 + 2z_2 + 5z_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5z_1 + 2z_2 - 4z_3 = 0 \\ z_1 + 4z_2 + z_3 = 0 \\ -4z_1 + 2z_2 + 5z_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5z_1 + 2z_2 - 4z_3 = 0 \\ 0 + 18z_2 + 9z_3 = 0 \\ 0 + 18z_2 + 9z_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{z = (2, -1, 2)c, c \neq 0}$$

$$\lambda = 10$$

$$\begin{cases} -4z_1 + 2z_2 - 4z_3 = 0 \\ 2z_1 - z_2 + 2z_3 = 0 \\ -4z_1 + 2z_2 - 4z_3 = 0 \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} -2z_1 + z_2 - 2z_3 = 0 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Vi behöver två vektorer för att beskriva } -2z_1 + z_2 - 2z_3 = 0$$

$$z_1 = 0 \Rightarrow z_2 = 2z_3 \Rightarrow z = c(0, 2, 1), c \neq 0$$

$$z_2 = 0 \Rightarrow z_1 = -z_3 \Rightarrow z = c(1, 0, -1), c \neq 0$$

SVAR

$$\Rightarrow S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

3.13

a) Antingen behövs n olika egenvärden
eller så ska matrisen vara reell
och symmetrisk (3.10 d) var symmetrisk!)

3.15

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \det(A - \lambda I) = (2-\lambda)^2(1-\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = 2, \lambda_3 = 1$$

$$(A - \lambda I)z = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\lambda = 2}$$

$$\begin{cases} 0 + 3z_2 + 0 = 0 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow z_2 = z_3 = 0 \Rightarrow z = (1, 0, 0)c, c \neq 0 \end{cases}$$

SVAR

$$\underline{\lambda = 1}$$

$$\begin{cases} z_1 + 3z_2 + 0 = 0 \\ 0 + z_2 + 0 = 0 \Rightarrow z_2 = 0, z_1 = 0 \Rightarrow z = (0, 0, 1)c, c \neq 0 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \end{cases}$$

SVAR

3.18

Beräkna egenvärdenas summa & produkt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Enligt sats 3.13

$$\sum_{i=1}^4 \lambda_i = \text{tr}(A) = 1 + 2 + 3 + 4 = \boxed{10}$$

$$\prod_{i=1}^4 \lambda_i = \det(A) = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right| =$$

$$= \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{array} \right| = 1 \cdot 3 \cdot 4 - 1 - 4 = \boxed{7}$$

3.20

SVÄR

a) Om z och λ uppfyller:

$$Az = \lambda z$$

så är λ egenvärde till A

b)

Kar. pol.

SVÄR

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

c) $Az = \lambda z \Leftrightarrow (A - \lambda I)z = 0$

$$z \neq 0 \Rightarrow (A - \lambda I) = 0$$

Enligt determinanteori har
ekvationen lösning då $\det(A - \lambda I) = 0$.

d)

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

3.27

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ t & 2 \end{bmatrix}$$

a) $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & t \\ t & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ t & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+t^2 & 3t \\ 3t & t^2+4 \end{bmatrix}$

b) $\frac{dA}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\frac{d(A^2)}{dt} = \begin{bmatrix} 2t & 3 \\ 3 & 2t \end{bmatrix}$

d) $A \cdot \frac{dA}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ t & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & 1 \\ 2 & t \end{bmatrix}$

e) $\frac{dA}{dt} \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ t & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & 2 \\ 1 & t \end{bmatrix}$

3.29

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = 4x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

a) Överför genom $x = S\hat{x}$ på ett diagonalt system

SATS 3.5

Vi d. variabelbytet $x = S\hat{x}$ överförs

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t)$$

på

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = S^{-1}AS\hat{x} + S^{-1}f(t).$$

Här är $f(t) = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \det(A - I\lambda) = (1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5$$

$$(A - I\lambda)z = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\lambda = -1}$$

$$\begin{cases} 2z_1 + 2z_2 = 0 \\ 4z_1 + 4z_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{z = c(-1, -1), c \neq 0}$$

$$\underline{\lambda = 5}$$

$$\begin{cases} -4z_1 + 2z_2 = 0 \\ 4z_1 - 2z_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{z = c(1, 2), c \neq 0}$$

$$\Rightarrow S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, S^{-1} = \frac{1}{2-(-1)} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1} A S = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

\Rightarrow SVAR

$$\begin{cases} \frac{d\hat{x}_1}{dt} = 5x_1 \\ \frac{d\hat{x}_2}{dt} = -x_2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{d\hat{x}_1}{dt} = 5x_1 \\ \frac{d\hat{x}_2}{dt} = -x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{x}_1 = C_1 e^{5t} \\ \hat{x}_2 = C_2 e^{-t} \end{cases}$$

Ur $\hat{x} = S\hat{\mathbf{x}}$ fäls:

SVAR

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = C_1 e^{5t} + C_2 e^{-t} \\ x_2 = 2C_1 e^{5t} - C_2 e^{-t} \end{cases}}$$

$$c) x_1(0) = a_1, \quad x_2(0) = a_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = -C_1 + C_2 \\ a_2 = 2C_1 - C_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{3}a_2 \\ C_2 = \frac{2}{3}a_1 - \frac{1}{3}a_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}(a_1 + a_2)e^{5t} + \frac{1}{3}(2a_1 - a_2)e^{-t} \\ x_2 = \frac{2}{3}(a_1 + a_2)e^{5t} + \frac{1}{3}(-2a_1 + a_2)e^{-t} \end{cases}}$$

3.30

Skriv upp den allmänna lösningen till 3.29, uttryckt i egenvektorerna

Enligt sats 3.8

$$X_H(t) = C_1 e^{5t} S_1 + C_2 e^t S_2$$

3.31

a) Bestäm egenvärden & egenvektorer till A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(4-\lambda) + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3 \leftarrow \text{Egenvärden!}$$

$$(A - \lambda I)z = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\lambda = 2}$$

$$\begin{cases} -z_1 - z_2 = 0 \\ 2z_1 + 2z_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = c(1, -1), c \neq 0$$



Egenvektorer!

$$\underline{\lambda = 3}$$

$$\begin{cases} -2z_1 - z_2 = 0 \\ 2z_1 + z_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = c(1, -2), c \neq 0$$



b) Bestäm den allmänna lösningen till systemet:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = 2x_1 + 4x_2 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Enligt sats 3.8

$$x_h(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} s_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \cdot s_2$$

$$\Rightarrow x_h(t) = C_1 e^{2t} \cdot s_1 + C_2 e^{3t} s_2 , \quad s_1 = (1, -1), \quad s_2 = (1, -2)$$

SVAR

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} \\ x_2(t) = -C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{3t} \end{cases}$$

3.35

$$\frac{dx}{dt} = \frac{9D}{\ell^2} A_0 x, \text{ där } A_0 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Bestäm den allmänna lösningen till systemet

$$\frac{\det(A_0 - \lambda I)}{\frac{9D}{\ell^2}} = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)^3 - (-2-\lambda) - (-2-\lambda)$$

$$= (-2-\lambda)((-2-\lambda)^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1 = -2 \frac{9D}{\ell^2}$$
$$\lambda_2 = -2 - \sqrt{2} \frac{9D}{\ell^2}$$
$$\lambda_3 = -2 + \sqrt{2} \frac{9D}{\ell^2}$$

$$(A - \lambda I)z = \begin{bmatrix} -2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -2 \cdot \frac{9D}{\ell^2} \Rightarrow S_1 = (1, \sqrt{2}, 1)c, c \neq 0$$

$$\lambda_2 = (-2 - \sqrt{2}) \frac{9D}{\ell^2} \Rightarrow S_2 = (1, 0, -1)c, c \neq 0$$

$$\lambda_3 = (-2 + \sqrt{2}) \frac{9D}{\ell^2} \Rightarrow S_3 = (1, -\sqrt{2}, 1), c \neq 0$$

Enligt sats 3.8

$$X_{\#}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} S_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} S_2 + C_3 e^{\lambda_3 t} S_3$$

I vilka proportioner kommer neutronerna att vara fördelade då lång tid förflutit?

För stora t växer $C_1 e^{\lambda_1 t} S_1$ mycket fortare än de andra termerna.

$$\Rightarrow X(t) \approx C_1 e^{\lambda_1 t} S_1 \Rightarrow \text{PROPORTIONER } X_1 : X_2 : X_3 = (1, \sqrt{2}, 1) = S_1$$

Vad räknas som lång tid?

$$e^{\lambda_1 t} \ll e^{\lambda_2 t} \ll e^{\lambda_3 t}$$

3.39

Löse Systemet

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_2 - 2e^t \\ \frac{dx_2}{dt} = 4x_1 + 3x_2 - 10e^t \end{cases}, \quad x_1(0) = 6, \quad x_2(0) = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t), \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad f(t) = \begin{bmatrix} -2e^t \\ -10e^t \end{bmatrix}$$

Satz 3.5

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = S^{-1}AS\hat{x} + S^{-1}f(t)$$

Steg ①: Bestimme S, S⁻¹

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 5$$

$$(A - \lambda I)x = 0$$

$$\underline{\lambda_1 = -1}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$$

 \Rightarrow

$$S_1 = (1, -1)c, \quad c \neq 0$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\lambda_2 = 5}$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

 \Rightarrow

$$S_2 = (1, 2)c, \quad c \neq 0$$

$$S^{-1} = \frac{1}{\det(S)} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{3} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = S^{-1}ASx + S^{-1}f(t) = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2e^t \\ -10e^t \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d\hat{x}_1}{dt} = 5x_1 + \frac{1}{3}(4e^t + 10e^t) \\ \frac{d\hat{x}_2}{dt} = -x_2 + \frac{1}{3}(-2e^t - 10e^t) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{d\hat{x}_1}{dt} = 5x_1 + 2e^t \\ \frac{d\hat{x}_2}{dt} = -x_2 - 4e^t \end{cases}$$

3.41

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 + 2x_2 + 1, \quad x_1(0) = 1 \\ \frac{dx_2}{dt} = 0 - x_2 + 1 \quad x_2(0) = 2 \end{array} \right.$$

a) Är systemmatrisen diagonalisierbar?

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \det(A - \lambda I) = (-1-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow (-1-\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

Eftersom $\lambda_1 = \lambda_2$ så finns ej två st. linjärt oberoende egenvektorer till
 SVAR
 $A \Rightarrow A$ är ej diagonalisierbar

b)

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + 1 \Leftrightarrow x_2 = Ce^{-t} + 1$$

$$x_2(0) = 2 \Rightarrow C + 1 = 2 \Rightarrow C = 1$$

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + 2e^{-t} + 3 \quad (\text{använd integrerande faktor!})$$

$$\frac{dx_1}{dt} + x_1 = 2e^t + 3$$

Integranden Faktor: ce^t

$$\dot{x}_1 \cdot ce^t + x_1 \cdot ce^t = ce^t(2e^t + 3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}(x_1 \cdot ce^t) = 2c + 3ce^t \quad (\text{integrierbar!})$$

$$\Leftrightarrow x_1 \cdot ce^t = 2ct + 3ce^t + D$$

$$x_1 = 2te^{-t} + 3 + \underbrace{\frac{D}{c} e^{-t}}_{E} = (2t + E)e^{-t} + 3$$

$$x_1(0) = 1 \Rightarrow (0 + E) \cdot 1 + 3 = 1 \Leftrightarrow \underline{E = -2}$$

SVAR

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = (2t - 2)e^{-t} + 3 \\ x_2 = e^{-t} + 1 \end{cases}$$