KAPITEL 3

3.1

a) $\boxed{\text{Beräkna } y(t)}$

$$\boxed{G(s) = \frac{0.01(1+10s)}{(1+s)(1+0.1s)} \quad , \quad u(t) = \sin 3t}$$

$$y(t) = S(\sin 3t) = S(\mathrm{Im}(e^{3it})) = \mathrm{Im}(S(e^{3it})) =$$

$$= \mathrm{Im}(G(3i)\, e^{3it}) =$$

$$= \mathrm{Im}(0.0909(\cos 3t + i \sin 3t)) =$$

$$= \boxed{0.0909 \sin 3t}$$

b) Avläsning ger att $G(3i) \approx 0.09$

och $\arg(G(3i)) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = 0.09 \sin 3t}$$

3.2

a) Vilket diagram hör till vilket system i 3.2?

Lufttemperaturen påverkar vattentemperaturen snabbare i den lilla bassängen än havet.

$\Rightarrow$ G_1 hör till den heldragna
G_2 hör till den streckade

b) Vad är skillnaden mellan högsta och lägsta vattentemp. under ett år?

Luften varierar mellan 19°C och -5°C.

$T = 1$ år $= \underline{8760 \text{ timmar}}$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{8760} = \underline{7 \cdot 10^{-4} \text{ rad/h}}$$

$$|G(i \cdot 7 \cdot 10^{-4})| \approx \underline{0.5}$$

$\hookrightarrow$ Svängningen i vattentemperaturen har halva amplituden av lufttemp.

$$\Rightarrow \Delta T_{vatten} = 0.5 \cdot \Delta T_{luft} = 0.5 \cdot (19 - (-5)) = \boxed{12°C}$$

c) Under en dag ($T = 24h$) varierar T_{luft} sinusformat. När under dagen var trädgårds-poolen som varmast?

$T_{luft}^{max} = 27°C$ (klockan 13.00)

$T_{luft}^{min} = 14°C$ (klockan 01.00)

$$\omega = \frac{2\pi}{24} = \underline{0.26 \text{ rad/h}}$$

$\arg(G(i \cdot 0.26)) = -30°$ (fasskillnad enligt FS)

Detta betyder att toppen av utsignalen (T_{vatten}^{max}) kommer $\frac{30°}{360°} \approx 0.08$ period $= 0.08 \cdot 24h =$

$= 1{,}92h$ senare än toppen för insignalen.

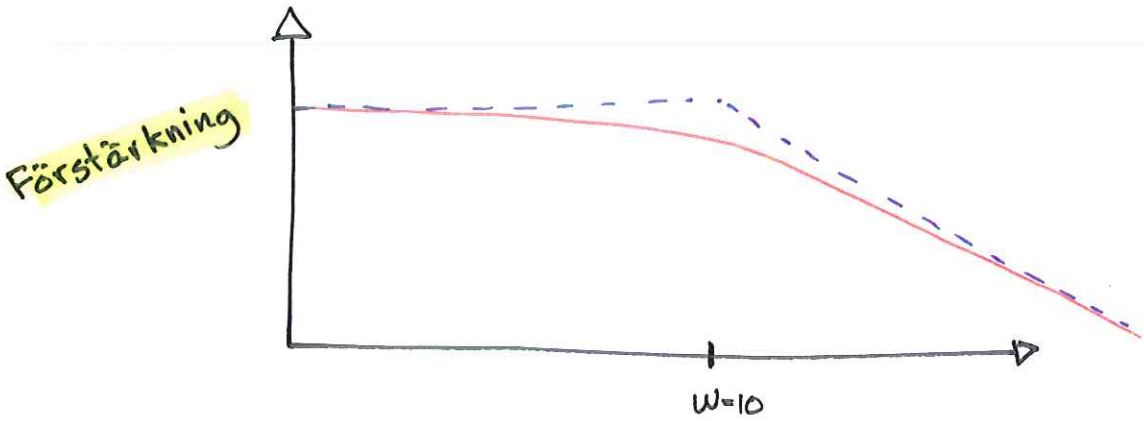
$\Rightarrow$ Polen är som varmast klockan 14:55

3.4 Rita Bodediagrammet för följande överföringsfunktioner.

a) $$\boxed{G(s) = \frac{3}{1 + \frac{s}{10}}}$$

Lågfrekvensasymptot : $\boxed{G(s) \approx 3 \cdot \frac{1}{1+0} = 3}$

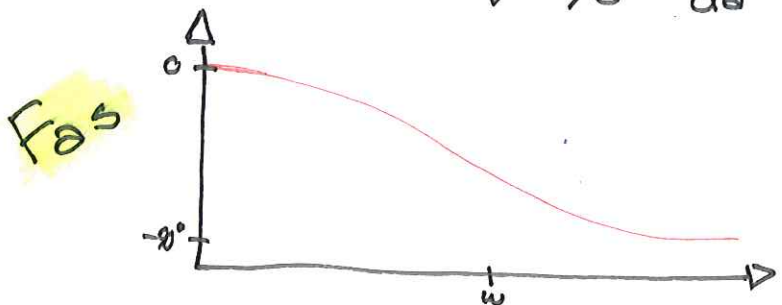
Brytfrekvensen ges av beloppet av systemets poler & nollställen: pol $= -10 \Rightarrow \boxed{\omega = |-10| = 10 \text{ rad/s}}$



$$\arg(G(0)) = \arg(3) = 0^\circ$$

$$\arg(G(i\omega)) = \arg\left(3 \cdot \frac{1}{1+i\omega/10}\right) = \arg\left(\frac{10 - i\omega}{100+\omega^2}\right) = \arg\left(\frac{\frac{10}{\omega} - i}{\frac{100}{\omega} + \omega}\right)$$

$$\longrightarrow -90^\circ \text{ då } \omega \longrightarrow \infty$$

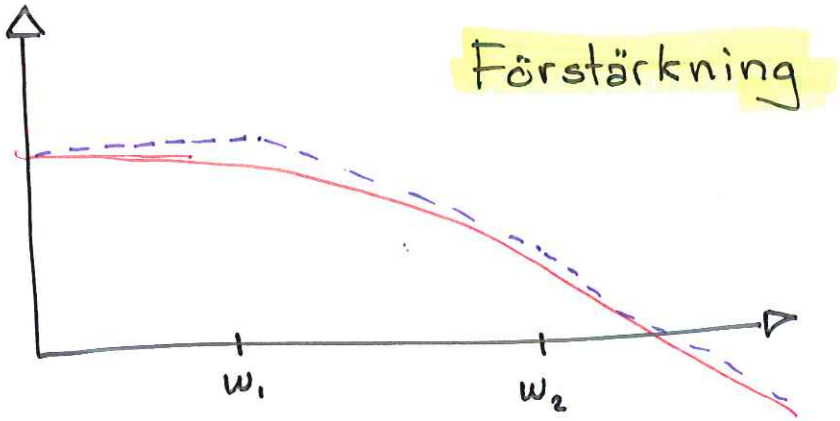


b) $\boxed{G(s) = 10 \cdot \frac{1}{1+10s} \cdot \frac{1}{1+s}}$

Vi har brytfrekvenserna $\boxed{\begin{array}{l} \omega_1 = 0.1 \text{ rad/s} \\ \omega_2 = 1 \text{ rad/s} \end{array}}$

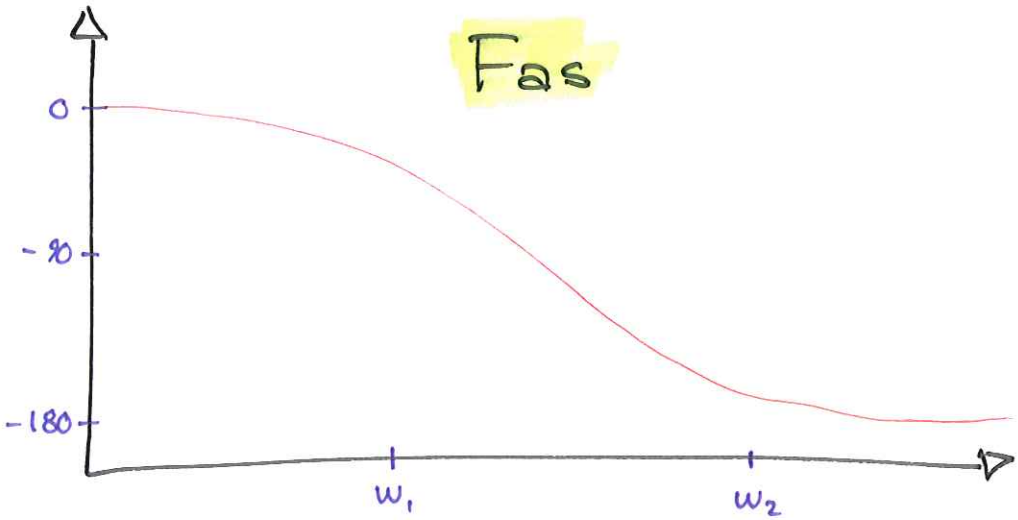
$G(0) = 10$ (lågfrekvensasymptot)

Polerna minskar lutningen med ett vid brytfrekvensen.



$\arg(G(0)) = 0$

~~arg(G(iω))~~ Argumentet minskar 90° vid varje brytfrekvens.



d)

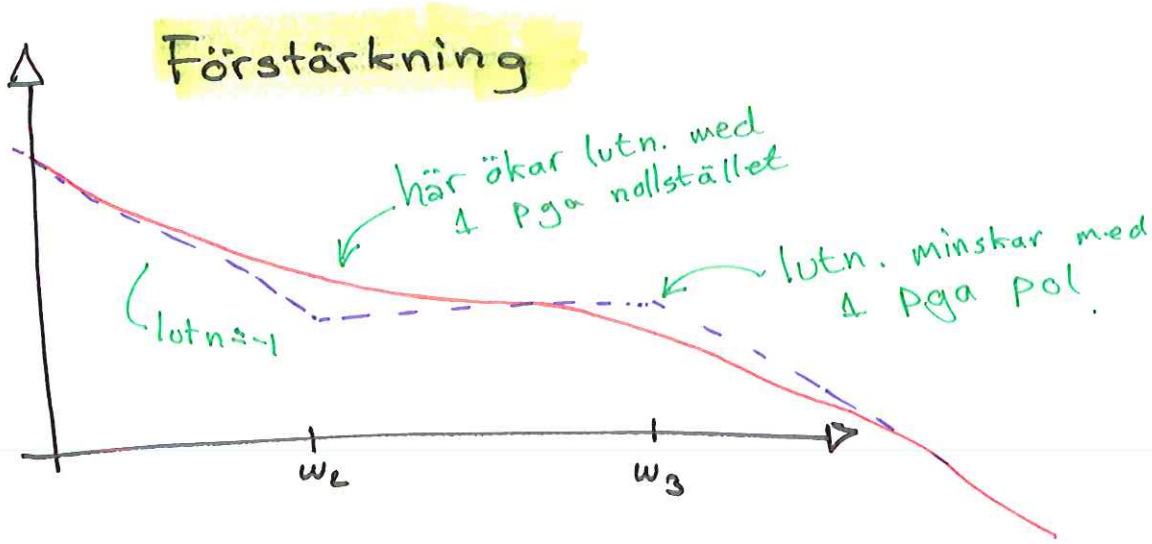
$$\boxed{G(s) = \frac{1+s}{s(1+s/10)}}$$

Poler: 0 och -10

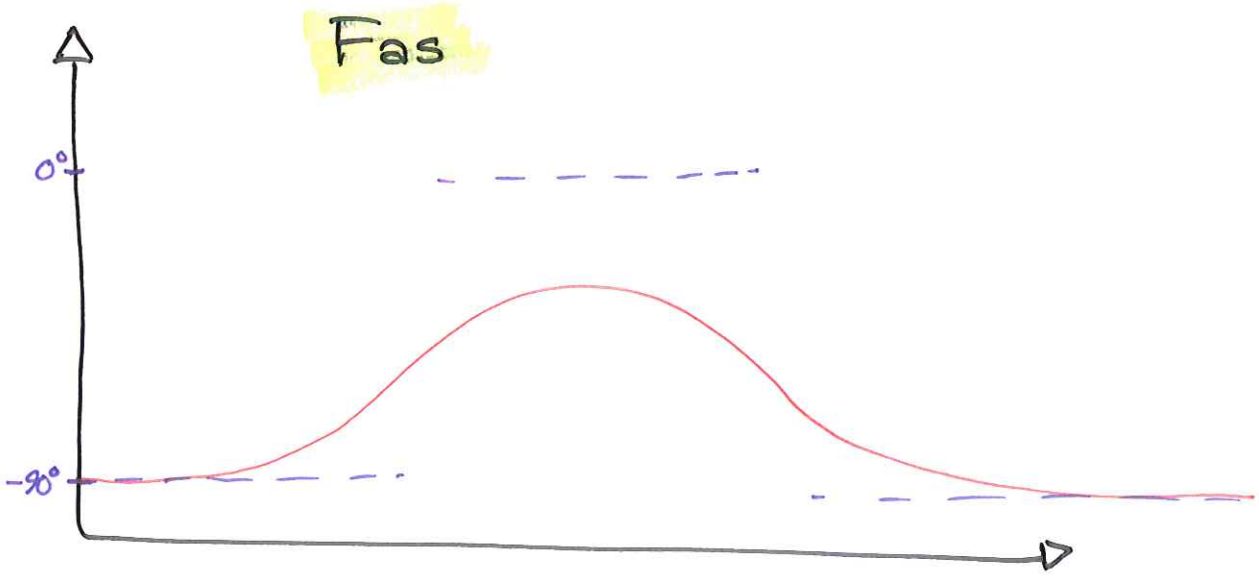
Nollst.: -1

Lågfrekvensasymptot: $\approx \frac{1}{s}$

Brytfrekvenser: $\omega_1 = 0$ (pol), $\omega_2 = 1$ (nollställe), $\omega_3 = 10$ (pol)



$\arg(G(0)) = -90°$



3.5 Rita Nyquistdiagram för följande överföringsfunktioner.

a) $$G(s) = \frac{3}{1 + \frac{10}{s}}$$

- Nyquistkurvan börjar i $G(0) = 3$.

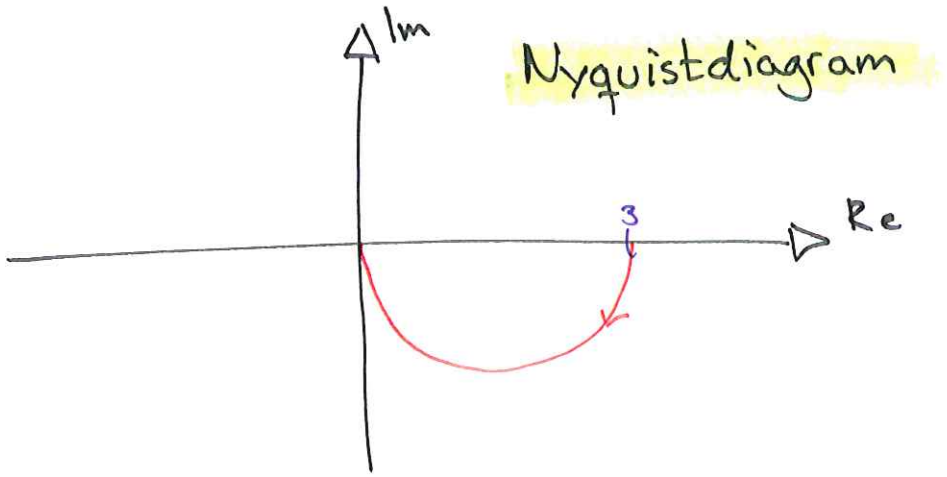
- Både förstärkningen $\sim |G(s)|$ och fasen $\sim \arg(G(i\omega))$ avtar monotont $\Rightarrow$ Kurvan vrids medurs och avståndet till origo minskar.

- $|G| \to 0$ då $\omega \to \infty$

- $\arg(G) \to -90°$ då $\omega \to \infty$

} Läs vf i 3.4 a).

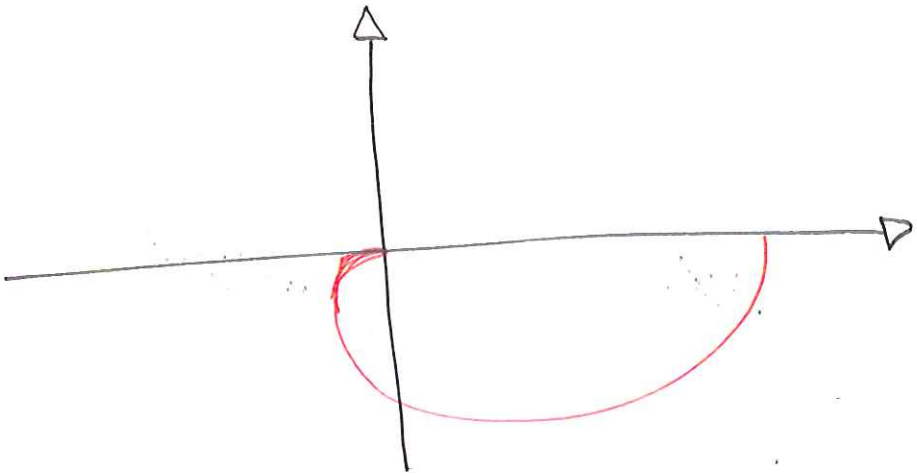
- Kurvan ligger därför i kvadrant 4.



Nyquistdiagram

b)

$$\boxed{G(s) = 10 \cdot \frac{1}{(1+10s)} \cdot \frac{1}{(1+s)}}$$



3.6 Undersök bodediagrammet i figuren till ett stabilt system och bestäm systemets överföringsfunktion.

Lågfrekvensasymptoten har lutning -1 och det innebär att vi har en faktor $\frac{1}{s}$ i $G(s)$. Vi ser också att vi har två brytfrekvenser $\omega_1 \approx 1$ och $\omega_2 \approx 100$ rad/s. Vid ω_1 bryter förstärkningskurvan uppåt vilket innebär att vi har en faktor $(1+s)$ i täljaren. Vid ω_2 bryter vi nedåt $\Rightarrow (100+s)$ i nämnaren.
K är vår konstanta förstärkningsfaktor.

$$\Rightarrow \boxed{G(s) = K \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{s+1}{s+100}}$$

$$|G(0.001i)| = \frac{K}{0.01} = 1 \Rightarrow \boxed{K = 0.01}$$

3.7 För att undersöka dynamiken hos ett okänt system har man mätt upp dess Bodediagram.
Bestäm överföringsfunktionen.
Förutsätt att systemet är stabilt och saknar komplexa poler och nollställen.

Lågfrekvensasymptot: 1 $\Rightarrow$ faktor s.
Brytfrekvenser: $\omega_1 \approx 2$ rad/s , $\omega_2 \approx 100$ rad/s

Vid ω_1 går fasen från 90 till 0 vilket innebär att den "bryter nedåt" en gång- och att vi har faktorn $\frac{1}{s+2}$.

Vid ω_2: fasen går från 0° till −270° $\Rightarrow$ tre ned-brytningar och vi har faktorn

$$\frac{1}{(s+100)^3}.$$

$$\Rightarrow G(s) \frac{Ks}{(s+2)(s+100)^3} = \frac{K's}{(\frac{s}{2}+1)(\frac{s}{100}+1)^3}$$

Betrakta lågfrekvensasymptoten:

$|G_{LF}(i\omega)| = K\omega = 4$ vid $\omega = 2$

$$\Rightarrow \boxed{G(s) = \frac{2s}{(\frac{s}{2}+1)(\frac{s}{100}+1)^3}}$$