3.1) 

$P: (2,1,4) = \overline{OP}$

$Q: (-2,5,0) = \overline{OQ}$

O:

Vet: $\overline{PR} = \frac{1}{4}\overline{PQ}$. Söker $\overline{OR}$

$$\overline{OR} = \overline{OP} + \frac{1}{4}\overline{PQ} = \overline{OP} + \frac{1}{4}\cdot(\overline{PO}+\overline{OQ}) = \frac{3}{4}\overline{OP} + \frac{1}{4}\overline{OQ} =$$

$$= \frac{3}{4}(2,1,4) + \frac{1}{4}(-2,5,0) = \underbrace{(1,2,3)}_{R}$$

3.2) $\frac{1}{2}\left((1,0,2)+(-1,2,2)\right) = \frac{1}{2}(0,2,4) = (0,1,2)$

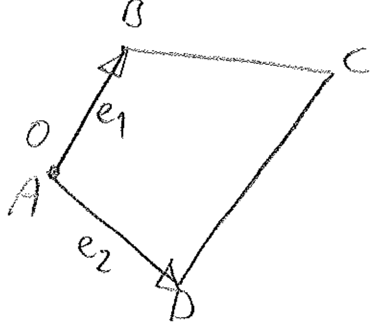
3.3) Vet (enl. $\overset{2,7}{2,6}$) att $\overline{OT} = \frac{1}{3}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC})$

och $\overline{OT} = \frac{1}{4}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD})$

a) $\overline{OT} = \frac{1}{3}\left((1,2,-1)+(2,1,0)+(-1,1,1)\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 0\right)$

b) $\overline{OT} = \frac{1}{4}\left((2,0,1)+(-1,1,1)+(1,0,2)+(3,1,4)\right) = \left(\frac{5}{4}, \frac{1}{2}, 2\right)$

3.4



Vet $\overline{AC} = 2\overline{AB} + 3\overline{AD}$

Uttryck $\overline{CA}$ i $\overline{CB}$ och $\overline{CD}$

$$\overline{CA} = -2\overline{AB} - 3\overline{AD} = -2\overline{AC} - 2\overline{CB} - 3\overline{AC} - 3\overline{CD}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$-4\overline{CA} = -2\overline{CB} - 3\overline{CD}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\overline{CA} = \frac{1}{2}\overline{CB} + \frac{3}{4}\overline{CD} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$$

3.5) a) $\bar{v} = (-3,4)-(1,2) = (-4,2) \parallel (-2,1)$

$$l: \begin{cases} x = 1-2t \\ y = 2+t \end{cases}$$

b) $\bar{v} = (2,1)-(1,1) = (1,0)$

$$l: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1 \end{cases}$$

c) $\bar{v} = (1,-5)$

$$l = \begin{cases} x = -2+t \\ y = -5t \end{cases}$$

d) Två punkter på linjen $P_1:(3,1)$; $P_2:(0,-5)$

$\bar{v} = (0,-5)-(3,1) = (-3,-6) \parallel (1,2)$

$$l: \begin{cases} x = 3+t \\ y = 1+2t \end{cases}$$

3.8) Byt en parameter till s och sätt koordinaterna lika

$$\begin{cases} 1-t = 1+s \\ t = s \\ -t = -1+s \end{cases}$$

Insättning av $t=s$ i rad 1 resp rad 3 ger

$$\begin{cases} 1-s = 1+s \Rightarrow s=0 \\ -s = -1+s \Rightarrow s = \frac{1}{2} \end{cases}$$ omöjligt

Lösning saknas så skär ej

$v_1 = (-1,1,-1)$ $v_2 = (1,1,1)$ ej parallella

3.9) I koordinatplanen gäller $x=0$ (i yz-planet), $y=0$ och $z=0$.

a) $\begin{cases} x = 2-t \\ y = 1+2t \\ z = -1+t \end{cases}$

$x=0$ ger $t=2$ och $(0,5,1)$

$y=0$ ger $t=-\frac{1}{2}$ och $(\frac{5}{2},0,-\frac{3}{2})$

$z=0$ ger $t=1$ och $(1,3,0)$

b) $\begin{cases} x = 3+2t \\ y = 2 \\ z = -1+t \end{cases}$

$x=0$ ger $t=-\frac{3}{2}$ och $(0,2,-\frac{5}{2})$

$y=0$ går ej, linjen skär ej xz-planet

$z=0$ ger $t=1$ och $(5,2,0)$

3.10) a) $\pi: \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2}t - s \\ y = 2 + \sqrt{3}t \\ z = 3 + t + 2s \end{cases}$

b) $\bar{v}_1 = (1,2,3)-(0,1,2) = (1,1,1)$

$\bar{v}_2 = (3,4,1)-(0,1,2) = (3,3,-1)$

$\pi: \begin{cases} x = t + 3s \\ y = 1+t+3s \\ z = 2+t-s \end{cases}$

3.11) a) $2x+y-z+3=0$

$\Leftrightarrow$

$\begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = 2t+s+3 \end{cases}$

b) $y+2z=1$

$\begin{cases} x = t \\ y = -2s+1 \\ z = s \end{cases}$

3.12) $\begin{cases} x = 1+s-t \\ y = 2+s+t \\ z = 3-s+2t \end{cases}$

$P_1:(0,-3,2)$; $\begin{cases} 0 = 1+s-t \\ -3 = 2+s+t \\ 2 = 3-s+2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s-t = -1 \\ s+t = -5 \\ -s+2t = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s-t = -1 \\ 2t = -4 \\ t = -2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} s = 1 \\ t = -2 \end{cases}$ JA

$P_2:(1,-2,1)$; $\begin{cases} 1 = 1+s-t \\ -2 = 2+s+t \\ 1 = 3-s+2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s-t = 0 \\ s+t = -4 \\ -s+2t = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s-t = 0 \\ 2t = -4 \\ t = -2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} s = -2 \\ t = -2 \end{cases}$ JA

$P_3:(2,3,1)$; $\begin{cases} 2 = 1+s-t \\ 3 = 2+s+t \\ 1 = 3-s+2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s-t = 1 \\ s+t = 1 \\ -s+2t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s-t = 1 \\ 2t = 0 \\ t = 3 \end{cases}$

LÖSNING SAKNAS

3.13) $\begin{cases} x = 1+s-t \\ y = 2+s+t \\ z = 3-s+2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+s-t \\ x+y = 3+2s \\ 2x+z = 5+s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+s-t \\ x+y = 3+2s \\ 2\text{III}-\text{II} \quad 3x-y+2z = 7 \end{cases}$

$3x-y+2z-7 = 0$

3.14 a) $\begin{cases} x = -1+s+t \\ y = \quad -s+2t \\ z = \quad s-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \qquad = -1+s+t \\ -2x+y \quad = 2-3s \\ x \quad +z = -1+2s \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{- - -} \\ -2x+y \quad = 2-3s \\ 3\text{III}+2\text{II} \quad -x+2y+3z = 1 \end{cases}$

$-x+2y+3z-1=0$

c) $\begin{cases} x = 1+s-t \\ y = 2-s \\ z = -1+2s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{- - -} \\ y = 2-s \\ \text{III}+2\text{II} \quad 2y+z = 3 \end{cases}$ *

$2y+z-3=0$ (parallellt med x-axeln)

d) $\begin{cases} x = 1+s \\ y = 1 \\ z = 3-t \end{cases}$ *

$y=1$ (parallellt med xz-planet).

3.15) $\pi: 2x+y-z-5=0$; $l: \begin{cases} x = 1-t \\ y = 3t \\ z = 2+t \end{cases}$

"Linjen i planet"

$2(1-t)+3t-(2+t)-5=0$

$-5=0$ orimligt, lösning saknas och därmed saknas skärning

3.16) $\pi \begin{cases} x = 1+s-t \\ y = 2+s+t \\ z = 3-s+2t \end{cases}$ $\quad l: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 3+2t \\ z = -4t \end{cases}$

Byt parametrar och sätt lika

$$\begin{cases} 1+t_1-t_2 = 1+s \\ 2+t_1+t_2 = 3+2s \\ 3-t_1+2t_2 = -4s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1-t_2-s=0 \\ t_1+t_2-2s=1 \\ -t_1+2t_2+4s=-3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1-t_2-s=0 \\ 2t_2-s=1 \\ t_2+3s=-3 \end{cases} \Leftrightarrow_{2III-II} \begin{cases} t_1-t_2-s=0 \\ 2t_2-s=1 \\ 7s=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1=-1 \\ t_2=0 \\ s=-1 \end{cases}$$

$s=-1$ i linjen ger $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=4 \end{cases}$

3.17) $l_1: (x,y,z) = (1+t, 1+2t, 1+3t)$

$l_2: (x,y,z) = (t, 2+t, b-2t)$

a)

$$\begin{cases} 1+t = s \\ 1+2t = 2+s \\ 1+3t = b-2s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+t = s \\ t = 2 \\ 3+5t = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+t = s \\ t = 2 \\ 3 = b-10 \end{cases}$$

Systemet lösbart (skärning finns) omm $b = 13$.

b)

$$\pi: \begin{cases} x = 1+t+s \\ y = 1+2t+s \\ z = 1+3t-2s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+t+s \\ y-2x = -1-s \\ z-3x = -2-5s \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} - \quad - \\ - \quad - \\ z-5y+7x = 3 \end{cases}$$

$\pi: 7x-5y+z-3=0$

3.18) a) $\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ 2x+y+5z-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ -3y+3z-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$-y+z-1=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2t+2 \\ y=t-1 \\ z=t \end{cases}$

$x=1-y-z=1-t+1-t=-2t+2$

c) $\begin{cases} x+y+z-2=0 \\ 2x+2y+2z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z-2=0 \\ 3=0 \end{cases}$

lösning och skärning saknas.

d) $\begin{cases} x-y+2z-4=0 \\ 3x-3y+6z-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+2z-4=0 \\ 0=0 \end{cases}$

planen sammanfaller.

2.19) a) $\begin{cases} -4=2\cdot\lambda \\ -2=4\cdot\lambda \end{cases}$ lösning saknas $\Rightarrow$ lin ober.

b) $(6,-3)=-1{,}5\cdot(-4,2)$ lin ber

c) $(0,0)=0\cdot(3,2)$ lin ber

* d) Tre vektorer i $\mathbb{R}^2$ lin ber (bassatsen sid 35)

e) —— " —— lin ber

3.20) $l: (x,y,z) = (1,a,7) + t\underbrace{(2,3,5)}_{\bar{v}}$

$\pi: 2x - 3y + z - 3 = 0$

$\bar{n} = (2,-3,1)$

$\bar{n} \cdot \bar{v} = 0$

så linjen och planet parallella.

"Insättning" av l i π ger:

$2 \cdot (1+2t) - 3(a+3t) + 7 + 5t - 3 = 0$

$\Leftrightarrow$

$2 + 4t - 3a - 9t + 7 + 5t - 3 = 0$

$\Leftrightarrow$

$6 - 3a = 0$

$\Leftrightarrow$

$a = 2$

Om $a=2$ ligger linjen i planet så skärningen är just linjen.

Om $a \neq 2$ så är plan och linje parallella och linje ej i planet. Ingen skärning.

3.21) $\pi: 2x - y + z + 3 = 0$ har normal $\bar{n} = (2,-1,1)$.

"Kolla" skalärprodukt mot föreslagna vektorer.

$(2,-1,1) \cdot (1,2,0) = 0$ parallell.

$(2,-1,1) \cdot (-1,1,1) = -2$ ej

$(2,-1,1) \cdot (2,1,3) = 6$ ej

$(2,-1,1) \cdot (2,1,-3) = 0$ parallella

3.23) ℓ ligger i planet $\pi: x + 3y - z + 4 = 0$

När skär ℓ_2 detta plan?

$$1 + t + 3(2 - t) - 3 - 2t + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$8 - 4t = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$t = 2$$

) Jo i $(3, 0, 7)$

) ℓ går alltså genom $(1, -2, -1)$ och $(3, 0, 7)$

$v: (3, 0, 7) - (1, -2, -1) = (2, 2, 8) \parallel (1, 1, 4)$

$\ell: (1, -2, -1) + t(1, 1, 4)$

$1, 1, 4$

)

)

3.24) $\ell_1: (x,y,z) = (1+t, 2-t, 3+2t)$

$\ell_2: (x,y,z) = (3+2t, 2+t, 1-t)$

a) $\pi_1:$

$$\begin{cases} x = 1 + t + 2s \\ y = 2 - t + s \\ z = 3 + 2t - s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = 7 + 5t \\ y + z = 5 + t \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 5y - 3z = -18 \\ \text{---} \end{cases}$$

b) $\pi_2:$

$$\begin{cases} x = 3 + t + 2s \\ y = 2 + t + s \\ z = 1 + 2t - s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5y - 3z = -10 \end{cases}$$

c) $\pi_3: x - 5y - 3z = -14$ (varför?)

T.ex. $(2,2,2) \in \pi_3$

3.25) ℓ parallell med yz-planet ger $\left(\bar{v} = (0, a, b) \right)$

$$\ell: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + as \\ z = 5 + bs \end{cases}$$

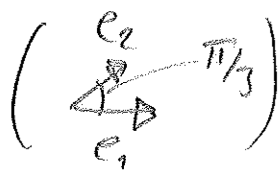
Skärning

$$\begin{cases} 2 + 3t = 1 \\ 3 + 2t = 2 + as \\ 1 + 2t = 5 + bs \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{3} \\ 7/3 = 2 + as \\ 1/3 = 5 + bs \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{3} \\ s = \frac{1}{3a} \\ s = -\frac{14}{3b} \end{cases}$$

$$\frac{1}{3a} = -\frac{14}{3b} \Leftrightarrow b = -14a$$

Så

$$\ell: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + s \\ z = 5 - 14s \end{cases}$$

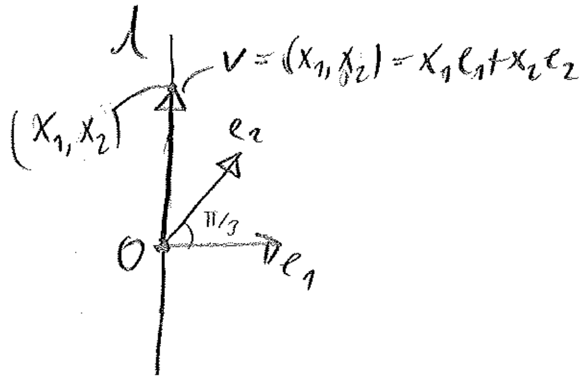
3.26) $|e_1| = |e_2| = 1$ Vinkeln mellan $\frac{\pi}{3}$. 

Ingen ON-bas!

Linjen genom origo, vinkelrät mot e_1:

Godtycklig punkt på linjen

$$(x_1, x_2) = x_1 e_1 + x_2 e_2$$



Riktningsvektor, från origo

$$\bar{v} = (x, y) - \underbrace{(0,0)}_{\text{origo på linjen}} = x_1 e_1 + x_2 e_2$$

$\bar{v} \cdot \bar{e}_1 = 0$ ger

$$0 = (x_1 e_1 + x_2 e_2) \cdot e_1 = x_1 e_1 \cdot e_1 + x_2 \underbrace{e_2 \cdot e_1}_{\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}} = x_1 + \frac{1}{2} x_2$$

Alltså $x_1 + \frac{1}{2} x_2 = 0$ eller $2x_1 + \underset{x}{x_2} = 0$.

Alt: $\bar{v} = e_2 - \frac{1}{2} e_1$; $l = t(e_2 - \frac{1}{2} e_1) = \boxed{-\frac{t}{2}} e_1 + t e_2$

$$l: \begin{cases} x = -\frac{t}{2}, \\ y = t \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{y}{2} \Leftrightarrow 2x + y = 0$$

3.28)

$$\begin{cases} 2+t = 3-s \\ 3+2t = -5+8s \\ 1+3t = 2-2s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+t = 3-s \\ -1 = -11+5s \\ -5 = -7+s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ s = 2 \end{cases}$$

Lösning ⇒ skär

$$\pi: \begin{cases} x = 2+t-s \\ y = 3+2t+3s \\ z = 1+3t-2s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ y+3x = 9+5t \\ z-2x = -3+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ y+13x-5z = 24 \\ \text{—} \end{cases}$$

$\pi: 13x+y-5z-24=0$